

УДК 539.3

© 1998 г. С.А. КУЛИЕВ

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В МНОГОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКЕ С ДУГООБРАЗНЫМИ ТРЕЩИНАМИ

Рассматривается напряженно-деформированное состояние в многоугольной пластинке с двумя дугообразными трещинами различной длины. На пластинку действуют различные типы нагрузок: всестороннее равномерно-распределенное растягивающее усилие интенсивности p (фиг. 1); равномерно-распределенные по всей поверхности пластинки нагрузки интенсивности q , а также изгибающий момент M , приложенный по всему наружному контуру (фиг. 2). Аналогичные задачи для бесконечной плоскости рассмотрены в [1-5].

Приводится решение для конечной многоугольной пластинки путем использования метода наложения (суперпозиции). Как известно [3, 6], поле упругих элементов (напряжений или деформаций) можно представить в виде суммы двух полей, первое из которых соответствует сплошному телу под действием нагрузок, приложенных к телу, а второе поле упругих элементов соответствует телу с разрезами под действием симметричных нагрузок, приложенных только на поверхности разреза.

Используя этот прием, решение рассматриваемой задачи получаем путем суперпозиции решений двух задач: определения напряженно-деформированного состояния сплошной многоугольной пластины от действующих различных нагрузок; определения напряженно-деформированного состояния в пластине с дугообразной трещиной вдоль одной и той же окружности, когда на берегах трещин действует нагрузка (напряжение), которая находится из первой задачи (напряжение в точках сплошной пластинки, соответствующих напряжению на месте разрезов).

1. Напряженно-деформированное состояние сплошной многоугольной пластины при действии произвольных нагрузок. Как известно [1, 3, 7, 8], решение этой задачи приводится к определению двух аналитических функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, удовлетворяющих граничным условиям

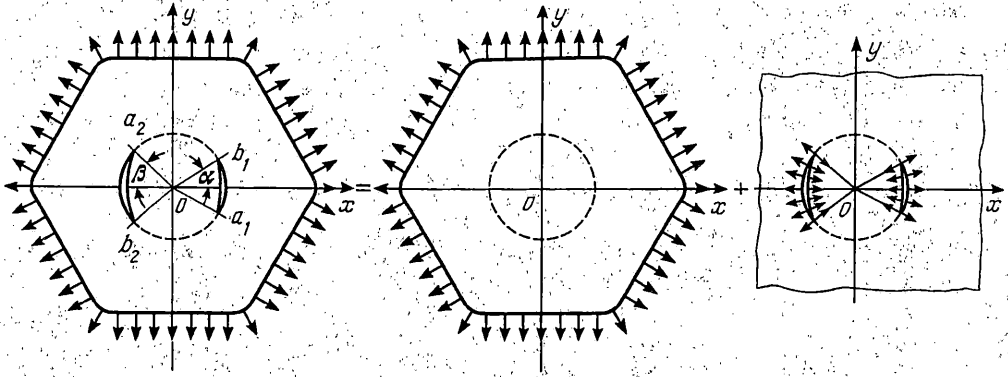
$$\kappa\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = f_1 + if_2 \quad (1.1)$$

Правая часть этого уравнения имеет следующие значения:
для плоской задачи теории упругости

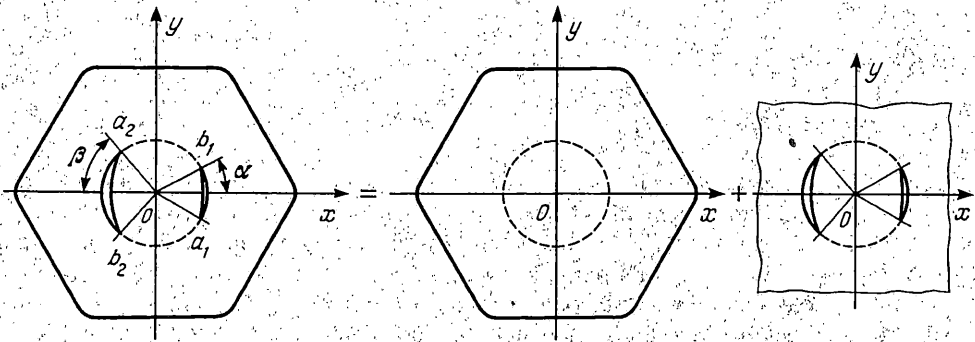
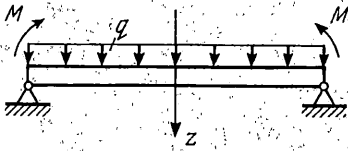
$$f_1 + if_2 = i \int_0^s (T_{nx} + iT_{ny}) ds, \quad \kappa = 1 \quad (1.2)$$

Как известно, в случае всестороннего растяжения или сжатия имеет место равенство

$$i \int_0^s (T_{nx} + iT_{ny}) ds = \pm Pt$$



Фиг. 1



Фиг. 2

для первой основной задачи изгиба пластинок

$$f_1 + if_2 = \frac{1}{D(1-\nu)} \int_0^s \left[m(s) + i \int_0^s p(s) ds \right] dt - 2 \frac{\partial w_1}{\partial t} + \frac{8}{1-\nu} \left[t \int_0^s \frac{\partial^3 w_1}{\partial t \partial t^2} dt - \int_0^s t \frac{\partial^3 w_1}{\partial t \partial t^2} dt \right] + iC_1' t + C_2', \quad \kappa = -\frac{3+\nu}{1-\nu} \quad (1.3)$$

где C_1' и C_2' – соответственно вещественная и комплексная постоянные.

В случае конечной односвязной области S , ограниченной контуром L_2 , можно положить $C_1' = 0$, $C_2' = 0$ (так как эти постоянные существенного значения не имеют).

В выражении (1.3) w_1 есть частное решение уравнения (уравнения Софи-Жермен):

$$\Delta \Delta w = q/D \quad (1.4)$$

Далее в (1.3) приняты следующие обозначения: $m(s)$ – изгибающие моменты,

действующие по контуру пластинки или по дуге контура; $p(s)$ – изгибающие усилия, действующие по контуру L_2 ; $D = \frac{1}{2} E h^3 / (1 - \nu^2)$ – цилиндрическая жесткость пластинки; E – модуль Юнга; h – толщина пластинки; ν – коэффициент Пуассона.

При равномерно распределенной нагрузке $q = \text{const}$ частным решением уравнения (1.4) будет функция

$$w_1(z, \bar{z}) = qz^2\bar{z}^2 / 64 \quad (1.5)$$

Функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ регулярные всюду внутри наружного контура L_2 , для конечной односвязной области, представим в виде [3, 7]:

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \left(\frac{z}{A} \right)^k, \quad \psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \left(\frac{z}{A} \right)^k \quad (1.6)$$

$$A_k = \sum_{n=k}^{\infty} \alpha_n a_{(n-k)/N}^{(k)}, \quad B_k = \sum_{n=k}^{\infty} \beta_n a_{(n-k)/N}^{(k)}$$

Звездочка над символом суммы означает, что индекс n при переходе к следующему слагаемому увеличивается на N (число сторон многоугольника).

Все величины $a_n^{(k)}$ определяются для каждого конкретного контура согласно [7].

Внешность контура L_2 (т.е. правильный многоугольник), отображается на внешность единичной окружности с помощью функции [3, 7]:

$$z = A\xi \sum_{n=0}^{\infty} m^n \xi^{-nN}, \quad A = \frac{a+b}{2}, \quad m = \left| \frac{a-b}{a+b} \right| \quad (1.7)$$

Здесь a и b – радиусы окружностей соответственно описанной и вписанной в многоугольник.

Подставляя значения комплексных потенциалов $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, определяемые формулой (1.6), в граничное условие (1.1), с учетом отображающей функции (1.7) после несложных математических преобразований и рассуждений (перейдя к новой переменной τ ; причем на единичной окружности имеет место $\tau\bar{\tau} = 1$) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях переменной τ , получаем следующие две системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных α_k и β_k [7]:

$$\begin{aligned} \alpha V_1(k) + H_2(k) + V_3(1)\varepsilon_1 + V_4(1)\varepsilon_1 + V_5(k-2)\varepsilon_2 + \\ + V_6(k-2)\varepsilon_2 + V_7(1)\varepsilon_1 + V_8(k-2) = E_1 \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\alpha V_2(k) + H_1(k) + V_3(k+2) + V_4(k+2) + V_7(k+2) = E_2 \quad (1.9)$$

$$\varepsilon_1 = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq 1 \\ 1 & \text{при } k = 1 \end{cases}, \quad \varepsilon_2 = \begin{cases} 0 & \text{при } k < 3 \\ 1 & \text{при } k \geq 3 \end{cases}$$

Значения величин $V_1(k) - V_8(k)$ и так далее, входящих в равенства (1.9) и (1.10), из-за громоздкости здесь не приводятся.

Для плоской задачи

$$E_1 = pA\varepsilon_1, \quad E_2 = pAm^k\varepsilon_3 \quad (1.10)$$

$$\varepsilon_3 = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq N-1; 2N-1; \dots \\ 1 & \text{при } k = N-1; 2N-1; \dots \end{cases}$$

Для задачи изгиба E_1 и E_2 определяют выражения при отрицательной и положительной степенях переменной τ , содержащихся в правой части уравнения (1.1), т.е. в граничном значении (1.3) для выражения $f_1 + if_2$.

Например, для задачи чистого изгиба многоугольной пластинки выражения для E_1 и E_2 примут вид

$$E_1 = \frac{MA}{D(1-\nu)} \varepsilon_1, \quad E_2 = \frac{MAm}{D(1-\nu)} \varepsilon_3 \quad (1.11)$$

При изгибе круглой сплошной пластинки от действия равномерно-распределенной нагрузки интенсивности q величины E_1 и E_2 примут следующие значения [3]:

$$E_1 = -\frac{qR^3}{16D} \varepsilon_1, \quad E_2 = \frac{8}{1-\nu} \frac{qR^3}{16D} \varepsilon_1 - \frac{8}{1-\nu} \frac{qR^3}{48D} \varepsilon_2 \quad (1.12)$$

Для заданных конкретных профилей и относительных размеров при различных видах нагрузки из систем (1.8) и (1.9) удерживаются несколько первых членов и, решая их совместно, определяются неизвестные коэффициенты. Затем по формулам (1.6) определяются функции $\phi(z)$ и $\psi(z)$, а тем самым – напряженно-деформированное состояние в любой точке сплошной пластины.

Для плоской задачи теории упругости напряжения в сплошной пластинке будут определяться формулами [7] (в полярной системе координат ρ, θ):

$$\sigma_r = -\frac{k(k-3)}{A^k} \alpha_k \rho^{k-1} \cos(k-1)\theta - \frac{k\beta_k}{A^k} \rho^{k-1} \cos(k+1)\theta \quad (1.13)$$

$$\sigma_\theta = \frac{k(k+1)}{A^k} \alpha_k \rho^{k-1} \cos(k-1)\theta + \frac{k\beta_k}{A^k} \rho^{k-1} \cos(k+1)\theta$$

Приняв в этих формулах $\rho = r$ и $-\theta_1 \leq \theta \leq \theta_1$, а также $-\theta_2 \leq \theta \leq \theta_2$, получаем напряжения σ_r и σ_θ в точках, соответствующих местам разрезов вдоль дуги окружности радиуса r .

В случае задачи изгиба сплошной пластинки прогиб в любой точке пластинки будет определяться формулой [1, 3, 7, 8]:

$$w = w_1 + \operatorname{Re}[\bar{z}\phi(z) + \chi(z)] \quad (1.14)$$

$$\chi(z) = \int \psi(z) dz + C$$

Здесь постоянная C определяется из условия закрепления края пластинки (края пластинки могут быть свободно оперты, шарнирно закреплены или защемлены).

Таким образом, первая задача (задача определения напряженно-деформированного состояния сплошной многоугольной пластинки от различных нагрузок) полностью решена.

2. Определение напряженно-деформированного состояния пластинки с двумя дугообразными трещинами вдоль дуги одной и той же окружности. Координаты концов трещин имеют следующие значения:

$$a_1 = re^{-i\theta_1}, \quad b_1 = re^{i\theta_1}; \quad a_2 = -re^{-i\theta_2}, \quad b_2 = -re^{i\theta_2} \quad (2.1)$$

В дальнейшем можно принять $r = 1$, так как при $\xi = z/r$ будут получены те же результаты, что при $r = 1$. Зная приложенные нагрузки на берегах трещин (на основе первой задачи), нужно определить напряженно-деформированное состояние в окрестности концов трещин и вычислить предельные значения внешних нагрузок, при достижении которых начинается распространение трещин.

Эта задача решается приведением к задаче линейного сопряжения граничных значений.

Как известно [1–3, 9], многие задачи теории упругости могут быть просто решены путем приведения к одной задаче теории функции комплексного переменного, которую

называют задачей сопряжения. Многие эту задачу называют задачей Римана, а некоторые – задачей Гильберта: нахождение кусочно-голоморфной функции с линией скачков L_n , по заданным граничным значениям этой функции слева и справа от линии L_n (n – число разрезов).

Напряженно-деформированное состояние бесконечной пластины с дугообразными трещинами, расположенными вдоль дуг одной и той же окружности радиуса r , определяется аналитическими функциями $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$, которые согласно [1–3] имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{1}{2\kappa X(z)} \left[P_n(z) + \frac{D_1}{z} + \frac{D_2}{z^2} \right] + \frac{1}{2\kappa} \left[D_0 + \frac{M_x + iM_y}{8i\pi D} \frac{1}{z} \right] + \\ &+ \frac{\kappa(X + iY)}{4\pi(1 + \kappa)} \frac{1}{z} + \frac{1}{2\kappa\pi i X(z)} \int_{L_1} \frac{X(t)P(t)}{t - z} dt + \frac{1}{2\kappa\pi i} \int_{L_1} \frac{g(t)}{t - z} dt \\ \Omega(z) &= \frac{1}{2X(z)} \left[P_n(z) + \frac{D_1}{z} + \frac{D_2}{z^2} \right] - \frac{1}{2} \left[D_0 + \frac{M_x + iM_y}{8i\pi D} \frac{1}{z} \right] - \\ &- \frac{\kappa(X + iY)}{4\pi(1 + \kappa)} \frac{1}{z} + \frac{1}{2\pi i X(z)} \int_{L_1} \frac{X(t)P(t)}{t - z} dt - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{g(t)}{t - z} dt \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь $P(t)$ и $g(t)$ – заданные на L_1 (совокупность разрезов $L_n = a_n b_n$) и удовлетворяющие на L_1 условиям Гельдера функции, которые имеют следующие значения:

для плоской задачи (т.е. когда на берегах трещины заданы напряжения σ_r):

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{1}{2}[\sigma_r^+ + \sigma_r^-] + \frac{1}{2}[\sigma_{r\theta}^+ + \sigma_{r\theta}^-] \\ g(t) &= \frac{1}{2}[\sigma_r^+ - \sigma_r^-] + \frac{1}{2}[\sigma_{r\theta}^+ - \sigma_{r\theta}^-] \end{aligned} \quad (2.3)$$

для задачи изгиба пластины (когда на берегах трещины заданы изгибающие моменты M):

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{1}{2D(1 - \nu)} [M_n^+ + M_n^-] + iC_1 \\ g(t) &= \frac{1}{2D(1 - \nu)} [M_n^+ - M_n^-] \end{aligned} \quad (2.4)$$

Функция $P_n(z)$ в (2.2) есть полином степени не выше $n = 2$:

$$P_n(z) = C_0 z^2 + C_1 z + C_2 \quad (2.5)$$

Функция $X(z)$ означает одну из ветвей функции

$$X^\pm(z) = \prod_{k=1}^n (z - a_k)^{1/2} (z - b_k)^{1/2} = \mp \sqrt{(z - a_1)(z - b_1)(z - a_2)(z - b_2)} \quad (2.6)$$

Знаками плюс и минус отмечены значения функции $X(z)$ на левом и правом берегах разреза.

Учитывая, что координаты концевых точек трещины имеют следующие значения:

$$a_1 = e^{-i\theta_1}, \quad b_1 = e^{i\theta_1} \text{ и так далее, получаем}$$

при малых $|z| < 1$ и больших $|z| > 1$ соответственно

$$\frac{1}{X(z)} = -1 - A_1 z - A_2 z^2 - A_3 z^3 + \dots \quad (2.7)$$

$$\frac{1}{X(z)} = \frac{1}{z^2} + \frac{A_1}{z^3} + \frac{A_2}{z^4} + \dots \quad (2.8)$$

$$A_1 = \cos \theta_1 - \cos \theta_2, \quad A_2 = \frac{1 + 3 \cos 2\theta_1}{4} - \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \frac{1 + 3 \cos 2\theta_2}{4}$$

$$A_3 = \frac{3 \cos \theta_1 + 5 \cos 3\theta_1}{8} - \frac{3 \cos \theta_2 + 5 \cos 3\theta_2}{8} + \frac{\cos \theta_1 + 3 \cos \theta_1 \cos 2\theta_2}{4} - \frac{\cos \theta_2 + 3 \cos \theta_2 \cos 2\theta_1}{4}$$

и так далее.

При $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ (т.е. для двух одинаковых дугообразных трещин) величины A_j примут более простой вид

$$A_1 = 0, \quad A_2 = \cos 2\theta, \quad A_3 = \frac{1 + 3 \cos 2\theta}{4}$$

Причем будем фиксировать ту ветвь (2.6) функции $X(z)$, для которой $\lim z^{-n}X(z) = 1$ при $z \rightarrow \infty$. Тогда из (2.6) имеем $X(0) = (-1)^n \sqrt{a_n b_n}$ при $n = 2$ $X(0) = -1$.

Функция $\Omega(z)$ голоморфна всюду в разрезанной вдоль контуров L_k бесконечной области, кроме точки $z = 0$, где она может иметь полюс не выше второго порядка, а именно

для плоской задачи

$$\Omega(z) = -1/z^2 + \text{голоморфная функция при } |z| < 1$$

для задачи изгиба пластинки

$$\Omega(z) = -\frac{M_x + iM_y}{8i\pi D} \frac{1}{z} + O(1) \quad \text{при } |z| < 1$$

Постоянные D_1 и D_2 , входящие в (2.2), определяются из следующего условия вблизи точки $z = 0$:

для плоской задачи

$$\frac{1}{X(z)} \left[\frac{D_1}{z} + \frac{D_2}{z^2} \right] = -\frac{\kappa(X + iY)}{2\pi(1 + \kappa)} \frac{1}{z} \quad (2.9)$$

Здесь $X + iY$ – главный вектор всей внешней нагрузки, приложенный к обоим берегам разреза;

для задачи изгиба пластинки

$$\frac{1}{X(z)} \left[\frac{D_1}{z} + \frac{D_2}{z^2} \right] = -\frac{1}{2} \frac{M_x + iM_y}{8i\pi D} \frac{1}{z} \quad (2.10)$$

где $M_x + iM_y$ – главный момент относительно начала координат всей внешней нагрузки, приложенной к пластинке на берегах разрезов.

Остальные постоянные C_0, C_1, D_0 и E_1 – входящие в (2.2), определяются согласно следующих условий.

1. При $z \rightarrow \infty, \Phi(\infty) = 0$ – для плоской задачи.

2. При $z = t_2$ (где t_2 – аффикс точек наружного контура L_2) $\Phi(t_2) = 0$ – для задачи изгиба пластинки (чтобы полученное решение точно отображало истинную картину распределения напряженно-деформированного состояния в пластинки конечных размеров, должны быть равны нулю перемещения и прогиб на контуре L_2 , так как по этому контуру пластинка свободно оперта или закреплена).

3. Условия однозначности перемещений на обоих берегах разрезов. Эти условия вводятся к равенствам следующего вида:

для плоской задачи

$$\int_{L_n} \left[\frac{P_n(t)}{X(t)} + \gamma g(t) \right] dt = 0 \quad (2.11)$$

для задачи изгиба пластинки

$$\operatorname{Re} \int_{L_n} \left\{ \frac{t - a_n}{\kappa a_n t} [2F(t) + g(t)] + \int_t^{b_n} \frac{[2F(\tau) - g(\tau)] a \tau}{i} \right\} dt = 0 \quad (2.12)$$

Здесь $\gamma = -\frac{1}{4}(1 - \nu)$ в случае обобщенного напряженного состояния, $\gamma = \frac{1}{4}(2\nu - 1)/(1 - \nu)$ в случае плоской деформации

$$g(t) = \lambda_k z^{k-1}, \quad \lambda_k = -\frac{k(k-3)}{A^k} \alpha_k - \frac{k\beta_k}{A^k} \quad (2.13)$$

$$F(t) = \frac{1}{X(t)} \left[P_n(t) + \frac{D_1}{t} + \frac{D_2}{t^2} \right] + \frac{1}{2\pi i X(t)} \int_L \frac{X(t)P(t)}{\tau - t} dt \quad P(t) = iE_1$$

$$R(t) = (M + iC_1)/[D(1 - \nu)]$$

Причем t, τ – комплексные переменные интегрирования.

Таким образом, определив из указанных условий (для каждой конкретной задачи) постоянные $C_0, C_1, C_2, D_0, D_1, D_2$ и E_1 , можно определить комплексные потенциалы $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$. Зная их, получаем распределение напряжений и смещений для второй задачи в любой точке пластинки (в частности, в окрестности вершины трещины).

Полное распределение напряжений и смещений в пластинки (т.е. для исходной задачи) получим путем суперпозиции решений двух указанных задач: $\sigma_r = \sigma_r^{(1)} + \sigma_r^{(2)}$, $\sigma_\theta = \sigma_\theta^{(1)} + \sigma_\theta^{(2)}$, $w = w^{(1)} + w^{(2)}$ и так далее.

В этих формулах индексами обозначены результаты решений первой (для сплошной пластинки) и второй (для пластинки с нагруженной трещиной) задачи соответственно.

Так как в первой задаче концентрации напряжений нет, исходя из результатов [1, 2, 4, 5, 10], можно определить коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) в окрестности концов дугообразных трещин $L_k = a_k b_k$:

для плоской задачи

$$K_1^{(\gamma_j)} - iK_2^{(\gamma_j)} = 2\sqrt{2r} \lim_{z_k \rightarrow 0} \sqrt{z_k} \Phi(z_k + z_0), \quad z_k \rightarrow 0 \quad (2.14)$$

для задачи изгиба пластинки

$$K_1^{(\gamma_j)} - iK_2^{(\gamma_j)} = -12\sqrt{2r} \frac{D(3 + \nu)}{h^2} \lim_{z_n \rightarrow 0} \sqrt{z_k} \Phi(z_k + z_0) \quad (2.15)$$

где $z_k = \rho e^{i\varphi}$; ρ и φ – полярные координаты с началом в конце трещины с координатой $z_k = a_k$ и $z_k = b_k$.

3. Частные задачи. 1. Всестороннее растяжение круглой пластинки с двумя одинаковыми дугообразными трещинами. При всестороннем растяжении сплошной круглой пластинки (решение первой задачи), как известно [3], может существовать только одно полярно-симметричное распределение напряженной, при котором $\sigma_r^{(1)} = \sigma_\theta^{(1)} = P$ (пластина будет находиться в условиях однородного растяжения во всех направлениях в своей плоскости). Главный вектор $X + iY$ нагрузок, приложенных по всей совокупности контуров $L_k = a_k b_k$, равен нулю. Поэтому в точках расположения трещины имеют место равенства

$$\sigma_r^{(1)} = \sigma_\theta^{(1)} = P, \quad p(t) = 0, \quad g(t) = P \quad (3.1)$$

После чего по вышеуказанной методике решается вторая задача (пластинка с нагруженными дугообразными трещинами).

При этом в формулах (2.2), (2.4), (2.7) и так далее необходимо положить $\theta_1 = \theta_2 = \theta$, $P(t)$, $g(t) = p$, $X + iY = 0$. Тогда постоянные C_0, C_1, D_0, D_1, D_2 и ϵ_1 будут иметь следующие значения:

$$\begin{aligned} D_1 &= 0, \quad D_2 = 0, \quad D_0 = -C_0 - P \\ C_1 &= 0, \quad \epsilon_1 = 0, \quad C_2 = D_0 + \bar{D}_0 - \bar{C}_0 \\ C_0[2E(e) - F(e)] + C_2F(e) + \gamma P &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $F(e)$ и $E(e)$ – эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно с модулем $e = \sin \theta$.

Таким образом, для круглой пластинки с двумя дугообразными трещинами функции $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ принимают вид

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{P_n(z)}{2X(z)} + \frac{D_0}{2} + \frac{1}{2}P \\ \Omega(z) &= \frac{P_n(z)}{2X(z)} - \frac{D_0}{2} - \frac{1}{2}P \\ P_n(z) &= C_0z^2 + C_2, \quad X(z) = \sqrt{(z^2 - e^{-2i\theta})(z^2 - e^{2i\theta})} \end{aligned} \quad (3.3)$$

В конечных точках трещины значения КИН для K_1 в силу симметричного нагружения $K_2 = 0$ будет иметь следующее значение:

$$K_1 = \sqrt{2r} \times \frac{P_n(a_k, b_k)}{e^{\frac{1}{2}i(\pi/2-\theta)} \prod_{k=1}^2 (b_n - a_k)^{\frac{1}{2}} (a_n - b_k)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.4)$$

В случае одной дугообразной трещины значения всех величин совпадают с известными результатами [1–5]:

$$K_1 = P\sqrt{r \sin \theta} \frac{\cos \frac{1}{2}\theta}{1 + \sin^2 \frac{1}{2}\theta}, \quad K_2 = P\sqrt{r \sin \theta} \frac{\sin \frac{1}{2}\theta}{1 + \sin^2 \frac{1}{2}\theta}$$

Далее можно вычислить критическое значение приложенной нагрузки P согласно методу Л. Ирвина [1, 4, 7, 10].

2. *Изгиб круглой пластинки с двумя равными дугообразными трещинами при действии равномерно-распределенной нагрузки интенсивности g или при чистом изгибе моментом M .* Как известно, при изгибе сплошной круглой пластинки прогиб w_* в произвольной точке определяется формулой [7, 8]:

при равномерно-распределенной нагрузке g :

$$w_* = \frac{g}{64D} \left[R^2 - \rho^2 + \frac{4R^2(R^2 - \rho^2)}{1 + \nu} \right] \quad (3.5)$$

при чистом изгибе моментом M :

$$w_* = \frac{MR^2}{2D(1 + \nu)} \frac{R^2 - \rho^2}{R^2} \quad (3.6)$$

При этом изгибающие моменты по линии расположения трещин будут в случае рав-

номерно-распределенной нагрузки q :

$$M_n = \frac{q}{16} [R^2(3+\nu) - \rho^2(3+\nu)] \quad (3.7)$$

$$M_t = \frac{q}{16} [R^2(3+\nu) - \rho^2(1+3\nu)]$$

причем M_n – изгибающий момент на площадке, перпендикулярной радиусу r , M_t – изгибающий момент относительно радиального сечения.

В случае чистого изгиба по линии расположения трещин будет действовать изгибающий момент M .

Таким образом, при чистом изгибе сплошной пластины и при изгибе той же пластинки равномерно-распределенной нагрузкой интенсивности q вторая задача (пластина с нагруженной трещиной) математически является одной и той же задачей: пластинка с дугообразными трещинами при действии на берегах трещины изгибающего момента интенсивности M . Значение этого момента определяется выражениями (3.7) или же оно равно M (для чистого изгиба).

В случае двух равных дугообразных трещин комплексные потенциалы $\Phi(z)$, $\Omega(z)$ принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{i\epsilon_1}{2\kappa X(z)} [X(z) - z^2] + \frac{1}{\kappa X(z)} \left[C_0 z^2 + C_1 z + C_2 + \frac{D_1}{z} + \frac{D_2}{z^2} \right] + \frac{1}{2\kappa} \times \\ &\times \left[D_0 + \frac{M_x + iM_y}{8i\pi D} \frac{1}{z} \right] + \frac{1}{2\kappa} \frac{M}{D(1-\nu)} \\ \Omega(z) &= \frac{i\epsilon_1}{2X(z)} [X(z) - z^2] + \frac{1}{X(z)} \left[C_0 z^2 + C_1 z + C_2 + \frac{D_1}{z} + \frac{D_2}{z^2} \right] - \\ &- \frac{1}{2} \left[D_0 + \frac{M_x + iM_y}{8i\pi D} \frac{1}{z} \right] - \frac{M}{2D(1-\nu)} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Функция $X(z)$ для рассматриваемого случая определяется формулой (2.9). Причем для постоянных $C_0, C_1, C_2, D_0, D_1, D_2$ и ϵ_1 получены следующие значения:

$$\begin{aligned} 2C_0 + D_0 &= \kappa \left[i\epsilon_1 + \frac{M}{D(1-\nu)} \right], \quad D_1 = \frac{1}{2} \frac{M_x + iM_y}{8i\pi D}, \quad D_2 = 0 \\ C_1 &= -\frac{1}{2} \frac{M_x + iM_y}{8i\pi D}; \quad (C_0 + D_2) \left\{ \frac{2}{a_j \kappa} [2E(e) - F(e)] + \frac{2}{\kappa \cos \theta} \arctg(\sin \theta) - \right. \\ &- \left. \frac{\pi}{\kappa} \right\} + C_2 \left[\frac{2}{a_j \kappa} F(e) - \frac{2}{\kappa \cos \theta} \arctg(\sin \theta) \right] + \epsilon_1 \left\{ \frac{1}{a_j \kappa} [(b_j - a_j) - \right. \\ &- 2E(e) + F(e)] - \frac{1}{\kappa} \left(\ln \frac{b_j}{a_j} - \frac{\pi}{2} \right) \left. \right\} + \frac{M}{D(1-\nu)} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\kappa a_j} (b_j - a_j) - \ln \frac{b_j}{a_j} + \right. \\ &+ \left. \frac{(a_j - b_j)^2}{2} - \frac{1+\nu}{2} a_j (a_j - b_j) \right\} = 0 \end{aligned}$$

В случае одной дугообразной трещины для искомым величин получим следующие значения:

$$\Phi(z) = \frac{iE_1}{2\kappa X(z)} [X(z) - z + \cos \theta] + \frac{1}{\kappa X(z)} \left[C_0 z + C_1 + \frac{D_1}{z} + \frac{D_2}{z^2} \right] + \frac{1}{2\kappa} \left[D_0 + \frac{M_x + iM_y}{8i\pi D} \frac{1}{z} \right]$$

$$\Omega(z) = \frac{iE_1}{2X(z)} [X(z) - z + \cos \theta] + \frac{1}{X(z)} \left[C_0 z + C_1 + \frac{D_1}{z} + \frac{D_2}{z^2} \right] - \frac{1}{2} \left[D_0 + \frac{M_x + iM_y}{8i\pi D} \frac{1}{z} \right]$$

Для постоянных $C_0, C_1 \dots$ и так далее получены такие значения:

$$2C_0 + D_0 = -2\kappa \left[iE_1 + \frac{M}{D(1-\nu)} \right]$$

$$D_1 = -\frac{1}{2} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{\sin^2 \theta} \frac{M_x + iM_y}{8i\pi D}$$

$$D_2 = \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{M_x + iM_y}{8i\pi D}$$

$$C_1 + C_0 \cos \theta + \frac{1}{2} \frac{M_x + iM_y}{8i\pi D} = 0$$

(3.11)

$$2\kappa C_0 - \kappa D_0 - D_0 + 2\bar{C}_1 - \frac{2\kappa M}{D(1-\nu)} + iE_1 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} (1 + \kappa) = 0$$

В случае чистого изгиба пластинки с одной дугообразной трещиной моментом M для КИН у вершин $b = e^{i\theta}$ трещины получено на основе (2.19) следующее значение:

$$K_1 = \frac{6M\sqrt{r \sin \theta}}{h^2 (\kappa + \sin^2 \frac{1}{2}\theta)} \kappa \cos \frac{\theta}{2} \quad (3.12)$$

Анализ полученных результатов показывает, что искривление трещины сказывается незначительно лишь в случае одностороннего изгиба. Поэтому в расчетах на прочность при изгибе дугообразной трещины ее можно заменить прямолинейной, если центральный угол $2\theta < \frac{1}{2}\pi$.

При всестороннем (чистом) изгибе такая замена возможна при $2\theta \leq \frac{1}{4}\pi$ и $\nu = 0,3$.

Следует также отметить, что отклонение трещины от прямолинейной формы при изгибе сказывается слабее, чем при плоской задаче (сжатие или растяжение).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бережницкий Л.Т., Делявский М.В., Панасюк В.В. Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин. Киев: Наук. думка, 1979. 400 с.
2. Градштейн И.С., Рыжак И.М. Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.

3. *Мухелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
4. *Панасюк В.В., Бережницкий Л.Т.* О предельном равновесии пластины с трещинами вдоль дуг окружности // Прикл. механика. 1965. Т. 1. Вып. 10. С. 52–60.
5. *Си Г., Парис П., Эрдоган Ф.* Коэффициенты концентрации напряжений у вершины трещины при плоском растяжении и изгибе пластин // Тр. америк. об-ва инж.-механиков. Сер. Е. Прикл. механика. 1962. Т. 29. Вып. 2. С. 101–108.
6. *Viesker H.F.* The propagation of cracks and the energy of elastic deformation // Trans. ASME. 1958. V. 80. No. 6. P. 1225–1230.
7. *Кулиев С.А.* Двумерные задачи теории упругости. М.: Стройиздат, 1991. 349 с.
8. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластины и оболочки. М.: Наука, 1966. 635 с.
9. *Шерман Д.Н.* Упругая плоскость с прямолинейными разрезами // Докл. АН СССР. 1940. Т. 26. № 7. С. 635–638.
10. *Бережницкий Л.Т.* Предельные усилия для пластины с двумя равными дугообразными трещинами // Физ.-хим. механика материалов. 1965. Т. 1. № 1. С. 99–106.
11. *Меркулов В.А.* Изгиб пластин с разрезами вдоль прямой или дуг окружности // Изв. АН СССР. МТТ. 1975. № 3. С. 165–171.

Баку

Поступила в редакцию
28.X.1996