МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1998

УДК 539.3

 Г.А. ВАНИН

ГРАДИЕНТНОЕ МЕЖФАЗНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАСТИНКИ С ВКЛЮЧЕНИЕМ

В рамках первого приближения в градиентной механике плоского состояния системы из неограниченной пластинки с круговым включением разработан асимптотический метод решения задачи, основанный на сочетании метода разложения искомых функций по параметрам и преобразовании конечно-разностных систем алгебраических уравнений. Если коэффициенты разностных уравнений представляют собой регулярные функции от индекса суммирования, то возможно представление искомого решения задачи в замкнутом виде. Установлено, что разложение искомых функций в ряд по параметру позволяет разделить общую систему алгебраических уравнений на более простые подсистемы, каждая из которых решается раздельно. В работе приведены соотношения для количественной оценки влияния градиентного состояния на напряжения вблизи включения первого масштабного уровня.

1. Задача об учете плоского градиентного состояния тел с дискретной структурой при их взаимодействии сводится к системе функциональных уравнений, вытекающих из краевых условий [1]. Основные соотношения между компонентами состояния каждой среды и соответствующими разрешающими функциями в случае структуры с гексагональной симметрией имеют вид

$$\begin{gathered}
2GU = \varkappa\varphi(z) - z\overline{\Phi(z)} - \overline{\Psi(z)} + 4iR_0\partial\Omega/\partial\bar{z} + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\int V dz \\
\Sigma = \sigma_3 - \sigma_2 + 2\sigma_{23} = -4G\partial\overline{U}/\partial z \\
\sigma = \sigma_3 + \sigma_2 = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}] + (1-\nu)^{-1}V \\
\Omega = \operatorname{Im}\partial U/\partial z = \omega - i(\varkappa+1)(4G)^{-1}[\Phi(z) - \overline{\Phi(z)}] \\
\hat{m}_{32} - i\hat{m}_{23} = 4R_0\partial\Omega/\partial z \qquad (1.1)\\
\nabla^2\omega - l^{-2}\omega = 0,\ \ U = u_2 + iu_3,\ \ l^2 = R_0(2G)^{-1}
\end{gathered}$$

где $\hat{m}_{ik}$ и R_0, l – компоненты и постоянные первого градиентного состояния, V – потенциал объемных сил. Здесь и везде в дальнейшем индексом a отмечены величины, относящиеся к включению, без индекса – к окружающей включение среде или ко всем компонентам системы одновременно. Функция углов поворота Ω состоит из двух частей: быстроизменяемой ω и части, не связанной с напряжениями в классической механике сплошных сред. Остальные обозначения соответствуют общепризнанным [2]. Ранее показано, что напряженное состояние сред описывается симметричным тензором $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$ [1]; при поворотах элемента среды возникают касательные напряжения кручения, инвариантные относительно поворотов площадки. Поэтому касательные напряжения на площадке с нормалью n составлены из суммы

$$\left.\begin{matrix}\tau_{ns}\\ \tau_{sn}\end{matrix}\right\} = \sigma_{ns} \mp R_0\nabla^2\Omega = \sigma_{sn} \mp 2G\omega \qquad (1.2)$$

Введение несимметричной функции напряжений несколько упрощает вид некоторых уравнений, но при этом возникают дополнительные трудности – увеличивается число неизвестных компонентов тензора напряжений и необходимо привлекать уравнения равновесия моментов и так далее. Последние операции характерны для моментной и микрополярных теорий [3–5].

Принимаем, что пластина на удалении от кругового включения радиуса a нагружена постоянными напряжениями σ_{ik}^{0}. Состояние вблизи включения определено условиями контакта среда–включение, которые в случае совершенного контакта сводятся к равенствам [1]:

$$(\sigma_n - i\sigma_{ns} + iR_0\nabla^2\Omega)^+ = (\sigma_n - i\sigma_{ns} + iR_0\nabla^2\Omega)^-$$

$$U^+ = U^-, \quad m_n^+ = m_n^-, \quad \Omega^+ = \Omega^- \tag{1.3}$$

В дальнейшем считаем, что выполняются условия когерентного контакта, когда принимаются равными размеры и очертания площадок усреднения состояний в элементах системы. В дальнейшем опускаем в (1.1) объемные силы и выделим в (1.3) члены с параметром $\mu = 8(\varkappa + 1)l^2a^{-2}$:

$$\sigma_n - i\sigma_{ns} + iR_0\nabla^2\Omega = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} - e^{2i\theta}[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)] + \mu L\Omega$$

$$2GU = \varkappa\varphi(z) - z\overline{\Phi(z)} - \overline{\Psi(z)} + \mu(\varkappa+1)^{-1}ia^2G\partial\Omega/\partial\bar{z}$$

$$L = i(\varkappa+1)^{-1}G(\nabla^2 - 4e^{2i\theta}\partial^2/\partial z^2)a^2/4, \quad m_n = m_{32}\cos\theta + m_{23}\sin\theta = 2R_0\partial\Omega/\partial n$$

Далее полагаем, что искомые потенциалы являются непрерывными функциями как переменных, так и параметров и поэтому могут быть разложены в степенные ряды по одному или нескольким параметрам. В случае взаимодействия сред с несколькими структурно отличными компонентами, разрешающие функции будут зависеть от всех параметров взаимодействующих сред одновременно, поэтому в рассматриваемом случае двух сред полагаем

$$\left\|\begin{matrix}\Phi(z,\mu)\\ \Psi(z,\mu)\\ \omega(r,\theta,\mu)\end{matrix}\right\| = \sum_{n=0}^{\infty}\mu^n\left\|\begin{matrix}\Phi_n(z)\\ \Psi_n(z)\\ \omega_n\end{matrix}\right\|, \quad \left\|\begin{matrix}\Phi_a(z,\mu_a)\\ \Psi_a(z,\mu_a)\\ \omega_a(r,\theta,\mu_a)\end{matrix}\right\| = \sum_{n=0}^{\infty}\mu_a^n\left\|\begin{matrix}\Phi_{an}(z)\\ \Psi_{an}(z)\\ \omega_{an}\end{matrix}\right\| \tag{1.4}$$

Чтобы избежать громоздкой записи формул, будем указывать зависимость функций только от пространственных переменных. Для определения разрешающих функций выразим систему граничных условий (1.3) через потенциалы в явном виде, выделяя члены с параметрами

$$\Phi(z) + \overline{\Phi(z)} - \Phi_a(z) - \overline{\Phi_a(z)} - e^{2i\theta}[\bar{z}\Phi'(z) - \bar{z}\Phi_a'(z) + \Psi(z) - \Psi_a(z)] =$$

$$= -\mu L\Omega + \mu_a L_a\Omega_a, \quad \Phi_a(z) + (1 + \varkappa_a G/G_a)(1 - G/G_a)^{-1}\overline{\Phi_a(z)} -$$

$$-e^{2i\theta}[\bar{z}\Phi_a'(z) + \Psi_a(z)] - (\varkappa+1)(1 - G/G_a)^{-1}\overline{\Phi(z)} = -\mu_a L_a\Omega_a$$

$$\mu G(\varkappa+1)^{-1}\partial\Omega/\partial n = \mu_a G_a(\varkappa_a+1)^{-1}\partial\Omega_a/\partial n, \quad \Omega = \Omega_a \tag{1.5}$$

Приведенная система дополняется требованием затухания всех функций при удалении от включения и условиями ограниченности решений в его центре. Прямое решение (1.5) приводит к громоздким выражениям для коэффициентов разложения функций. Если решение строится в виде разложений (1.4), то система (1.5) разделяется на две более простые подсистемы, одна из которых порождена первыми двумя уравнениями (1.5), а другая – остальными. Решение (1.5) строим в виде степенных разложений по наибольшему из приведенных параметров. Так при $\mu_a > \mu$, все функции раскладываются по степеням μ_a. Чтобы избежать комплексных коэффициентов в системе алгебраических уравнений, в дальнейшем задачу разделим на две: одна соответствует двумерному равномерному растяжению пластинки, другая – состоянию при ее сдвиге. Подставляя разложения (1.4) в (1.5) и сравнивая члены с одной степенью μ_a, получаем бесконечную последовательность, из которой приводим нулевое и n-приближения для первой подсистемы

$$\Phi_0(z)+\overline{\Phi_0(z)}-\Phi_{a0}(z)-\overline{\Phi_{a0}(z)}-e^{2i\theta}[\bar{z}\Phi'_a(z)+\Psi_0(z)-\bar{z}\Phi'_{a0}(z)-\Psi_{a0}(z)]=0$$

$$\Phi_{a0}(z)+(1+\varkappa_a G/G_a)(1-G/G_a)^{-1}\overline{\Phi_{a0}(z)}-e^{2i\theta}[\bar{z}\Phi'_{a0}(z)+\Psi_{a0}(z)]-$$

$$-(\varkappa+1)(1-G/G_a)^{-1}\overline{\Phi_0(z)}=0$$

. . . .

$$\varepsilon^n[\Phi_n(z)+\overline{\Phi_n(z)}]-\Phi_{an}(z)-\overline{\Phi_{an}(z)}-e^{2i\theta}[\bar{z}\varepsilon^n\Phi'_n(z)+\varepsilon^n\Psi_n(z)-$$

$$-\bar{z}\Phi'_{an}(z)-\Psi_{an}(z)]=L_a\Omega_{an-1}-\varepsilon^n L\Omega_{n-1},$$

$$\Phi_{an}(z)+(1+\varkappa_a G/G_a)(1-G/G_a)^{-1}\overline{\Phi_{an}(z)}-e^{2i\theta}[\bar{z}\Phi'_{an}(z)+$$

$$+\Psi_{an}(z)]-(\varkappa+1)(1-G/G_a)^{-1}\varepsilon^n\overline{\Phi_n(z)}=-L_a\Omega_{an-1} \qquad (1.6)$$

$$\varepsilon=\mu/\mu_a,\ \ \Omega=\sum_{n=0}^{\infty}\mu^n\Omega_n,\ \ \Omega_a=\sum_{n=0}^{\infty}\mu_a^n\Omega_{an}$$

Вторая подсистема для произвольного n будет

$$\varepsilon^{n+1}G(\varkappa+1)^{-1}\partial\Omega_n/\partial n=G_a(\varkappa_a+1)^{-1}\partial\Omega_{an}/\partial n,\ \ \varepsilon^n\Omega_n=\Omega_{an} \qquad (1.7)$$

Решение задачи для двухосного растяжения системы найдено в виде

$$\left\|\begin{matrix}\Phi(z)\\ \Psi(z)\\ \omega(r,\theta)\end{matrix}\right\|=\sum_{n=0}^{\infty}\mu^n\left\|\begin{matrix}C_n z^{-2}+\sigma^\circ/4\\ g_n z^{-4}+dz^{-2}+(\sigma_3^\circ-\sigma_2^\circ)/2\\ D_n K_2(r/l)\sin 2\theta\end{matrix}\right\|,\ \left\|\begin{matrix}\Phi_a(z)\\ \Psi_a(z)\\ \omega_a(r,\theta)\end{matrix}\right\|=\sum_{n=0}^{\infty}\mu_a^n\left\|\begin{matrix}A_n z^2+A_{00}\\ B_n\\ F_n J_2(r/l_a)\sin 2\theta\end{matrix}\right\| \qquad (1.8)$$

где $J_n(a/l_a)=J_n$ – модифицированные функции Бесселя [6]. Постоянные нулевого приближения будут

$$C_0=-(\sigma_3^\circ-\sigma_2^\circ)(1-G/G_a)(\varkappa+G/G_a)^{-1}a^2/2$$

$$A_{00}=(\varkappa+1)[2+(\varkappa_a-1)G/G_a]^{-1}\sigma^\circ/4$$

$$d=-[\varkappa-1-(\varkappa_a-1)G/G_a][2+(\varkappa_a-1)G/G_a]^{-1}a^2\sigma^\circ/2$$

$$B_0=(\sigma_3^\circ-\sigma_2^\circ)(\varkappa+1)(\varkappa+G/G_a)^{-1}/2 \qquad (1.9)$$

$$g_0=-3(\sigma_3^\circ-\sigma_2^\circ)(1-G/G_a)(\varkappa+G/G_a)^{-1}a^4/2,\ \ A_0=0$$

Четыре группы одноименных коэффициентов определяем из решения системы уравнений

$$C_n a^{-2}=-\alpha_3 D_{n-1},\ \ D_n=\alpha_1 C_n a^{-2}+\varepsilon^{-n}\alpha_2 A_n a^2$$

$$2A_n a^2=\beta_3 F_{n-1},\ \ F_n=\varepsilon^{n+1}\beta_1 C_n a^{-2}+\beta_2 A_n a^2 \qquad (1.10)$$

$$\alpha_1=q\left(\frac{\varkappa+1}{2G}\frac{aJ'_2}{l_a}+\varepsilon\frac{\varkappa_a+1}{G_a}J_2\right),\ \ \alpha_2=q\frac{\varkappa_a+1}{2G_a}\left(\frac{aJ'_2}{l_a}-2J_2\right)$$

$$\alpha_3=\frac{1-G/G_a}{n+G/G_a}\frac{G}{4(\varkappa+1)}\left(\frac{aK'_2}{l}+2K_2\right),\ \ \beta_1=q\frac{\varkappa_a+1}{2G_a}\left(\frac{aK'_2}{l}+2K_2\right)$$

$$\beta_2 = q\frac{\varkappa_a+1}{2G_a}\left(\varepsilon\frac{\varkappa_a+1}{\varkappa+1}\frac{G}{G_a}\frac{aK_2'}{l}-2K_2\right),\ \beta_3=\frac{1-G/G_a}{1+\varkappa_a G/G_a}\frac{3G_a}{2(\varkappa_a+1)}\left(\frac{aJ_2'}{l_a}-2J_2\right)$$

$$q=\left(\frac{aJ_2'}{l_a}K_2-\varepsilon\frac{\varkappa_a+1}{\varkappa+1}\frac{G}{G_a}\frac{aK_2'}{l}J_2\right)^{-1}\quad (n=1,2,\ldots)$$

При решении системы (1.10) каждая одноименная группа коэффициентов приводится к бесконечной последовательности конечноразностных соотношений второго порядка вида

$$C_{n+2}-\lambda_1 C_{n+1}-\lambda_2 C_n=0$$

$$\lambda_1=(\beta_2\beta_3-2\varepsilon\alpha_1\alpha_3)(2\varepsilon)^{-1},\ \lambda_2=\beta_3\alpha_3(\alpha_1\beta_2-\varepsilon\alpha_2\beta_1)(2\varepsilon)^{-1} \tag{1.11}$$

Подчиняя решения (1.11) двум начальным условиям (1.9), находим

$$C_n=C_0(X_1-X_2)^{-1}[(X_1+\alpha_1\alpha_3)X_2^n-(X_2+\alpha_1\alpha_3)X_1^n]$$

$$X_1+X_2=\lambda_1,\quad X_1X_2=-\lambda_2 \tag{1.12}$$

Аналогично получаем

$$A_n a^2=-C_0(a^2\alpha_2\alpha_3)^{-1}(X_1+\alpha_1\alpha_3)(X_2+\alpha_1\alpha_3)(X_1-X_2)^{-1}[(\varepsilon X_2)^n-(\varepsilon X_1)^n] \tag{1.13}$$

Если выполняются условия $|\mu X_k|<1$, то ряды (1.8) сходятся и их можно просуммировать. Искомые функции преобразуются к замкнутому виду

$$\Phi(z)=\sigma^\circ/4+(1-\mu_a\beta_2\beta_3/2)(1-\mu\lambda_1-\mu^2\lambda_2)^{-1}C_0z^{-2} \tag{1.14}$$

$$\Phi_a(z)=A_{00}+\mu\beta_1\beta_3(1-\mu\lambda_1-\mu^2\lambda_2)^{-1}(2a^4)^{-1}C_0z^2$$

$$\omega(r,\theta)=(\alpha_1\alpha_3-\mu\lambda_2)(1-\mu\lambda_1-\mu^2\lambda_2)^{-1}(\alpha_3a^2)^{-1}C_0K_2(r/l)\sin 2\theta$$

$$\omega_a(r,\theta)=\varepsilon\beta_1(1-\mu\lambda_1-\mu^2\lambda_2)^{-1}a^{-2}C_0J_2(r/l_a)\sin 2\theta$$

Остальные коэффициенты определяются через найденные

$$2\varepsilon^n g_n a^{-4}=6\varepsilon^n C_n a^{-2}-3\varepsilon^n C_{n-1}a^{-2}-2A_na^2-3D_{n-1}\varepsilon^n(\varkappa+1)^{-1}G/2\left(\frac{aK_2'}{l}-2K_2\right)+$$

$$+3F_{n-1}(\varkappa_a+1)^{-1}G_a/2(aJ_2'/l_a-2J_2),\ 2B_n=-2\varepsilon^nC_na^{-2}-2A_na^2-$$

$$-A_{n-1}a^2+D_{n-1}\varepsilon^n(\varkappa+1)^{-1}G/2(aK_2'/l+2K_2)-F_{n-1}(\varkappa+1)^{-1}G_a/2(aJ_2'/l_a+2J_2) \tag{1.15}$$

Суммируя коэффициенты при вышеуказанных предпосылках, получим

$$\Psi(z)=(\sigma_3^\circ-\sigma_2^\circ)/2+dz^{-2}+gz^{-4},\ \Psi_a(z)=B \tag{1.16}$$

$$g=3C_0a^2\left\{1-\frac{\mu}{1-\mu\lambda_1-\mu^2\lambda_2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\mu_a\beta_2\beta_3+\alpha_1\alpha_3-\mu\lambda_2-\frac{\beta_1\beta_3}{6}\frac{\varkappa_a+1}{1-G/G_a}G/G_a+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\alpha_1\alpha_3-\mu\lambda_2}{4\alpha_3(\varkappa+1)}G\left(\frac{aK_2'}{l}-2K_2\right)\right]\right\},\ B=\frac{C_0}{a^2}\left\{-\frac{\varkappa+1}{1-G/G_a}+\frac{\mu}{1-\mu\lambda_1-\mu^2\lambda_2}\left[(\alpha_1\alpha_3-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\mu\lambda_2)\frac{\varkappa+1}{1-G/G_a}-\frac{\beta_1\beta_3}{2}\left(1+\frac{\mu_a}{2}\right)-\frac{G_a}{\varkappa_a+1}\frac{\beta_1}{4}\left(\frac{aJ_2'}{l_a}+2J_2\right)\right]\right\}$$

2. Решение задачи в случае сдвига пластинки с включением строится с использованием полученных выше соотношений двумя методами. Чтобы получить уравнения для коэффициентов разложения функций в виде (1.10) и (1.15), следует принять

$$\left\| \begin{matrix} \Phi(z) \\ \Psi(z) \\ \omega(r,\theta) \end{matrix} \right\| = i\sigma_{23}^{\circ} - i\sum_{n=0}^{\infty}\mu^n \left\| \begin{matrix} C_n z^{-2} \\ g_n z^{-4} \\ iD_n K_2(r/l)\cos 2\theta \end{matrix} \right\|, \quad \left\| \begin{matrix} \Phi_a(z) \\ \Psi_a(z) \\ \omega_a(r,\theta) \end{matrix} \right\| = i\sum_{n=0}^{\infty}\mu_a^n \left\| \begin{matrix} A_n z^2 \\ B_n \\ -iF_n J_2(r/l_a)\cos 2\delta \end{matrix} \right\| \tag{2.1}$$

Постоянные в нулевом приближении равны

$$C_0 = -\sigma_{23}^{\circ} a^2 (1 - G/G_a)(\varkappa + G/G_a)^{-1}, \quad A_0 = 0 \tag{2.2}$$

$$B_0 = \sigma_{23}^{\circ}(\varkappa+1)(\varkappa + G/G_a)^{-1}, \quad g_0 = -3\sigma_{23}^{\circ} a^4 (1 - G/G_a)(\varkappa + G/G_a)^{-1}$$

Вид найденных таким способом потенциалов согласуется с соотношениями (1.14) и (1.16) при учете (2.2). Другой подход к решению этой задачи связан с преобразованием потенциалов при повороте системы координат на угол $\pi/4$ при $\sigma_2^{\circ} = -\sigma_3^{\circ}$.

Окончательный результат сложения найденных решений для двух случаев нагружения (растяжения и сдвига) имеет вид

$$\Phi(z) = \sigma^{\circ}/4 + (1 - \mu_a\beta_2\beta_3/2)(1 - \mu\lambda_1 - \mu^2\lambda_2)^{-1} C z^{-2} \tag{2.3}$$

$$\Phi_a(z) = (\varkappa+1)[2 + (\varkappa_a - 1)G/G_a]^{-1}\sigma^{\circ}/4 + \mu\beta_1\beta_2(1 - \mu\lambda_1 - \mu^2\lambda_2)^{-1}(2a^4)^{-1} C z^2$$

$$\begin{pmatrix} \omega(r,\theta) \\ \omega_a(r,\theta) \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\frac{1 - G/G_a}{\varkappa + G/G_a}\frac{(\sigma_3^{\circ} - \sigma_2^{\circ})\sin 2\theta + 2\sigma_{23}^{\circ}\cos 2\theta}{1 - \mu\lambda_1 - \mu^2\lambda_2}\begin{pmatrix} (\alpha_1 - \mu\lambda_2\alpha_3^{-1})K_2(r/l) \\ \varepsilon\beta_1 J_2(r/l_a) \end{pmatrix}$$

$$\Psi(z) = \frac{1}{2}\Sigma^0 + \frac{d}{z^2} + \frac{g}{z^4}, \quad \Psi_a(z) = B$$

$$C = -\overline{\Sigma}^{\circ}\frac{1 - G/G_a}{\varkappa + G/G_a}\frac{a^2}{2}$$

Отметим, что при равномерном растяжении пластинки $\sigma_2^{\circ} = \sigma_3^{\circ}$, $\sigma_{23}^{\circ} = 0$ из приведенных соотношений следует, что градиентные эффекты отсутствуют. Поэтому представляет интерес оценить влияние градиентных эффектов в состояниях с неравномерным распределением напряжений на межфазной границе. В частности, при двухмерном растяжении пластинки наибольший градиент напряжений σ_3 возникает вблизи межфазной границы на площадке $\theta = 0$ или $\pi/2$. Концентрация напряжений согласно (1.1) определяется формулой

$$\sigma_3 = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + \tfrac{1}{2}\{\bar{z}\Phi'(z) + z\overline{\Phi''(z)} + \Psi(z) + \overline{\Psi(z)} +$$

$$+(\varkappa+1)R_0/G[\Phi''(z) + \overline{\Phi''(z)}]\} + 2iR_0(\partial^2/\partial z^2 - \partial^2/\partial\bar{z}^2)\omega \tag{2.4}$$

Если внести явные значения функций в (2.4), то распределение напряжений σ_3 для произвольных θ будет

$$\sigma_3 = \sigma_3^{\circ} + 2Xr^{-2}(\cos 2\theta - \cos 4\theta) + dr^{-2}\cos 2\theta + (g + \tfrac{3}{2}\mu a^2 X)r^{-4}\cos 4\theta +$$

$$+R_0 Y/2\{(4r^{-2} + l^{-2})K_2(r/l) + [4K_2'(r/l)(r/l)^{-1} - (12r^{-2} + l^{-2})K_2(r/l)]\cos 4\theta\} \tag{2.5}$$

$$X = [1 - \mu(\lambda_1 + \alpha_1\alpha_3)](1 - \mu\lambda_1 - \mu^2\lambda_2)^{-1} C_0$$

$$Y = (\alpha_1\alpha_3 - \mu\lambda_2)(1 - \mu\lambda_1 - \mu^2\lambda_2)^{-1}(\alpha_3 a^2)^{-1} C_0$$

При отсутствии градиентных эффектов напряжения в пластинки распределены по формуле, следующей из (2.5) при $\mu_a = \mu = 0$.

Из приведенных соотношений следует, что наиболее высокие эффекты влияния градиентного состояния будут достигаться для быстроизменяющихся напряженных состояний вблизи включения. Последние реализуются в системах с включениями, имеющими форму границы, отличную от круговой, при действии переменных в пространстве внешних нагрузок, которые обеспечивают градиент-градиентное взаимодействие, а также при наличии всех указанных факторов вместе. Во всех случаях предлагаемый метод построения решений в принципе остается неизменным. Отметим, что указанные состояния наиболее просто реализовать в экспериментах и, таким образом, дать опытную оценку градиентных эффектов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ванин Г.А.* Градиентная теория плоского деформированного состояния многоуровневых сред // Изв. АН МТТ. 1996. № 3. С. 5–15.
2. *Хан X.* Теория упругости. М.: Мир, 1988. 343 с.
3. *Пальмов В.А.* Плоская задача теории несимметричной упругости // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 6. С. 1117–1120.
4. *Миндлин Р.Д.* Влияние моментных напряжений на концентрацию напряжений // Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1964. № 4. С. 115–128.
5. *Эринген А.К.* Теория микрополярной упругости // Разрушение. М.: Мир, 1975. Т. 2. С. 646–751.
6. *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций. Т.; М.: Изд-во иностр. лит., 1949. 798 с.

Москва

Поступила в редакцию
1.IV.1997