МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1998

УДК 539.376

© 1998 г. В.С. НАМЕСТНИКОВ

МЕТОД СИЛ В ЗАДАЧЕ ПОЛЗУЧЕСТИ

Одним из распространенных методов расчета статически неопределимых стержневых упругих конструкций является метод сил. Для конструкций, работающих в условиях ползучести, что-либо подобное в литературе найти не удается. Обычно проводится расчет простейших конструкций, находящихся к тому же в условиях установившейся ползучести. Оказывается, однако, и при ползучести возможен метод расчета стержневых статически неопределимых конструкций, аналогичный методу сил. Ниже представлен аналог такого метода для задач ползучести.

Рассмотрим K раз статически неопределимую стержневую конструкцию, состоящую из n_0 стержней. Лишние неизвестные обозначим через X_k (k – номер неизвестной). Для решения поставленной задачи используем принцип возможных перемещений [1]. Ограничимся плоскими стержневыми системами, стержни которых подвергаются комбинации растяжения-сжатия, изгиба и кручения.

Ось x_i декартовой прямоугольной прямолинейной системы координат совместим с осью i-го стержня, размещая начало на одном из его концов, а оси y_i и z_i – главные центральные оси поперечного сечения стержня.

Будем предполагать, что отличны от нуля только осевое нормальное напряжение σ и касательные τ_{xy}, τ_{xz} напряжения от кручения. Остальные напряжения, в том числе и касательные напряжения от изгиба, равны нулю.

Здесь следует сделать несколько замечаний. Эти же предположения принимаются в соответствующей упругой задаче. При этом оказывается невозможным добиться выполнения всех условий, т.е. выполнения дифференциальных уравнений равновесия и условий совместности деформаций, что связано с пренебрежением напряжений σ_y, σ_z и τ_{yz}. Их учет, если это удастся сделать, несомненно, позволит выполнить все условия. Однако несомненно и то, что решение будет весьма сложным, а полученные уточнения призрачными, поскольку эти напряжения в упругой задаче имеют на порядок меньшую величину по сравнению с учитываемыми. Вообще говоря, эти обстоятельства известны давно [2]. В любом варианте применяемые в методе сил решения упругой задачи являются приближенными, тем не менее в практических расчетах пользуются подобными решениями. В [2] приведены некоторые соображения в пользу такого подхода.

Следует заметить, что в литературных источниках, относящихся к методу сил, авторы не проявляют должной заботы о выполнении всех необходимых условий. В лучшем случае речь идет лишь о сохранении тех или иных членов от внутренних силовых факторов в выражениях коэффициентов канонических уравнений и их влиянии на величины лишних неизвестных.

В теории ползучести, вполне естественно, существуют те же проблемы, тем более что задача эта изначально нелинейная. Даже при чистом изгибе величины напряжений в продольных сечениях стержня σ_y, σ_z, τ_{yz} отличны от нуля [3], но они оказываются незначительными и ими вполне можно пренебречь. Это обстоятельство позволяет полагать, что в рассматриваемой задаче ползучести можно использовать те же предположения, что и в задаче упругости, надеясь получить при этом погрешности такого же порядка. Следует иметь также в виду, что культивируемые законы ползучести неадекватны ее процессу.

В силу сказанного ясно, что в задаче метода сил в условиях ползучести бессмысленно требовать выполнения всех дифференциальных уравнений равновесия и условий совместности деформаций. Оставляя, как и в упругой задаче, невыполненными некоторые дифференциальные уравнения равновесия и условия совместности деформаций, необходимо, однако, позаботиться о выполнении интегральных условий равновесия. В задаче ползучести все они могут быть удовлетворены, если пренебречь перерезывающими силами и предположить симметрию поперечного сечения относительно осей y и z. Может быть, от требования симметрии можно и отказаться, но доказать это в общем случае не представляется возможным, во всяком случае при отсутствии кручения никакой симметрии не требуется.

Подобно упругому случаю будем полагать, что полная продольная деформация удлинения ε определяется гипотезой Бернулли, а полные деформации сдвига ε_{xy}, ε_{xz} – соотношениями

$$\varepsilon_{xy} = \vartheta(\partial\varphi/\partial y - z), \quad \varepsilon_{xz} = \vartheta(\partial\varphi/\partial z + y) \tag{1}$$

где погонный угол кручения $\vartheta = \vartheta(t, x)$. Функцию кручения φ, как и в упругой задаче, считаем гармонической, хотя, строго говоря, это будет только в случае круглого поперечного сечения [4]. Невыполнение этого предположения равносильно невыполнению дифференциального уравнения равновесия.

Считая, что полная деформация удлинения ε – сумма упругой деформации σ/E и деформации ползучести p, и используя выражение гипотезы Бернулли

$$\varepsilon = e - \varkappa_z y \tag{2}$$

получим величину нормального напряжения

$$\sigma = E(e - \varkappa_z y) - Ep \tag{3}$$

Подставляя σ в уравнения равновесия

$$N = \iint_F \sigma dF, \quad M_z = -\iint_F \sigma y dF$$

где N – нормальная сила, M_z – изгибающий момент в рассматриваемом сечении, найдем величины осевой деформации удлинения e и кривизну $\varkappa_z$ изогнутой оси стержня

$$e = \frac{N}{EF} + \frac{1}{F}\iint_F pdF, \quad \varkappa_z = \frac{M_z}{EI_z} - \frac{1}{I_z}\iint_F pydF$$

В результате будем иметь

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{E}{F}\iint_F pdF - \left(\frac{M_z}{I_z} - \frac{E}{I_z}\iint_F pydF\right)y - Ep \tag{4}$$

$$\varepsilon = \frac{N}{EF} - \frac{M_z}{EI_z}y + \frac{1}{F}\iint_F pdF + \frac{y}{I_z}\iint_F pydF + \frac{\delta}{l} + \alpha\Delta T \tag{5}$$

где I_z – осевой момент инерции поперечного сечения. В последнем выражении добавлены величины деформации, вызванные погрешностью изготовления длины стержня δ и изменением температуры ΔT (α – коэффициент линейного расширения).

Считая по-прежнему, что полные деформации сдвига ε_{xy}, ε_{xz} складываются из упругих деформаций τ_{xy}/G, τ_{xz}/G и деформаций ползучести p_{xy}, p_{xz}, на основании соотношений (1) будем иметь

$$\tau_{xy} = G\vartheta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - z\right) - Gp_{xy}, \quad \tau_{xz} = G\vartheta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} + y\right) - Gp_{xz} \tag{6}$$

где G – модуль сдвига.

Используя уравнение равновесия

$$M_x = \iint\limits_F (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dF$$

найдем погонный угол кручения

$$\vartheta = \frac{M_x}{GI_k} - \frac{1}{I_k} \iint\limits_F (p_{xy} z - p_{xz} y) dF$$

подставляя который в формулы (1) и (6), получим

$$\varepsilon_{xy} = \left[\frac{M_x}{GI_k} - \frac{1}{I_k} \iint\limits_F (p_{xy} z - p_{xz} y) dF \right] \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - z \right) \tag{7}$$

$$\varepsilon_{xz} = \left[\frac{M_x}{GI_k} - \frac{1}{I_k} \iint\limits_F (p_{xy} z - p_{xz} y) dF \right] \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + y \right)$$

$$\tau_{xy} = \left[\frac{M_x}{I_k} - \frac{G}{I_k} \iint\limits_F (p_{xy} z - p_{xz} y) dF \right] \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - z \right) - Gp_{xy} \tag{8}$$

$$\tau_{xz} = \left[\frac{M_x}{I_k} - \frac{G}{I_k} \iint\limits_F (p_{xy} z - p_{xz} y) dF \right] \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + y \right) - Gp_{xz}$$

$$I_k = \iint\limits_F \left(y^2 + z^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial z} y - \frac{\partial \varphi}{\partial y} z \right) dF \tag{9}$$

где M_x – крутящий момент в поперечном сечении.

Теперь можно применить принцип возможных перемещений [1]. Сначала построим систему самосопряженных сил, для чего приравняем нулю все внешние силы и лишние неизвестные, кроме j-й, которую положим равной единице: $X_j = 1$. Полученная в результате система внутренних силовых факторов N_{ij}, M_{xij}, M_{zij} и будет самосопряженной системой номер j (i – номер стержня). Величины деформаций ползучести при этом равны нулю.

Система самосопряженных напряжений получится из соотношений (4) и (7) подстановкой в них величин N_{ij}, M_{xij}, M_{zij}, а также $p = p_{xy} = p_{xz} = 0$:

$$\sigma_{ij} = \frac{N_{ij}}{F_i} - \frac{M_{zij}}{I_{zi}} y, \quad \tau_{xyij} = \frac{M_{xij}}{I_{ki}} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y} - z \right) \tag{10}$$

$$\tau_{xzij} = \frac{M_{xij}}{I_{ki}} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial z} + y \right)$$

В соответствии с принципом возможных перемещений в статически неопределимой конструкции работа самосопряженной системы сил на действительных перемещениях должна равняться нулю. В данном случае это означает, что

$$\sum_i \iiint\limits_{V_i} (\sigma_{ij} \varepsilon_i + \tau_{xyij} \varepsilon_{xyij} + \tau_{xzij} \varepsilon_{xzij}) dV = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, K) \tag{11}$$

где V_i – объем i-го стержня.

Используя выражения (5), (7) и (10), отсюда получим

$$\sum_i \int\limits_{l_i} \left[\iint\limits_{F_i} \left\{ \left(\frac{N_i}{E_i F_i} - \frac{M_{zi}}{E_i I_{zi}} y + \frac{1}{F_i} \iint\limits_{F_i} p dF + \frac{y}{I_{zi}} \iint\limits_{F_i} py dF + \frac{\delta_i}{l_i} + \alpha_i \Delta T_i \right) \left(\frac{N_{ij}}{F_i} - \frac{M_{zij}}{I_{zi}} \right) + \right.\right.$$

$$+ \left(\frac{M_{xi}}{G_i I_{ki}} - \frac{1}{I_{ki}} \iint\limits_{F_i} (p_{xy} z - p_{xz} y) dF \right) \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y} - z \right)^2 \frac{M_{xij}}{I_{ki}} +$$

$$+\left(\frac{M_{xi}}{G_i I_{ki}}-\frac{1}{I_{ki}}\iint_{F_i}(p_{xy}z-p_{xz}y)dF\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}+y\right)^2\frac{M_{xij}}{I_{ki}}\Bigg\}dF\Bigg]dx=0\quad(j=1,2,\ldots,K)$$

где l_i – длина i-го стержня.

Раскрывая скобки и учитывая, что оси координат центральные, а геометрическая характеристика I_k удовлетворяет соотношению [5]:

$$I_k=\iint_F\left(y^2+z^2+\frac{\partial\varphi}{\partial z}y-\frac{\partial\varphi}{\partial y}z\right)dF=\iint_F\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}-z\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}+y\right)^2\right]dF$$

отсюда получим

$$\sum_i\int_{l_i}\left[\frac{N_iN_{ij}}{E_iF_i}+\frac{M_{zi}M_{zij}}{E_iI_{zi}}+\frac{M_{xi}M_{xij}}{G_iI_{ki}}\right]dx=\tag{12}$$

$$=\sum_i\int_{l_i}\left[\frac{M_{zij}}{I_{zi}}\iint_{F_i}\left(pydF-\frac{N_{ij}}{F_i}\iint_{F_i}pdF-\left(\frac{\delta_i}{l_i}+\alpha_i\Delta T_i\right)N_{ij}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{M_{xij}}{I_{ki}}\iint_{F_i}(p_{xy}z-p_{xz}y)dF\right]dx\quad(j=1,2,\ldots,K)$$

Система уравнений (12) является линейной относительно лишних неизвестных X_k, так как от них зависят лишь внутренние силовые факторы N_i, M_{zi}, M_{xi} и притом линейно. Приведя в левых частях уравнений (12) подобные относительно X_k члены, получим

$$\sum_k\delta_{kj}X_k+\delta_j^\circ=\sum_i\int_{l_i}\left[\frac{M_{zij}}{I_{zi}}\iint_{F_i}pydF-\frac{N_{ij}}{F_i}\iint_{F_i}pdF-\right.\tag{13}$$

$$\left.-\left(\frac{\delta_i}{l_i}+\alpha_i\Delta T_i\right)N_{ij}+\frac{M_{xij}}{I_{ki}}\iint_{F_i}(p_{xy}z-p_{xz}y)dF\right]dx\quad(j=1,2,\ldots,K)$$

$$\delta_{kj}=\sum_i\int_{l_i}\left(\frac{N_{ik}N_{ij}}{E_iF_i}+\frac{M_{zik}M_{zij}}{E_iI_{zi}}+\frac{M_{xik}M_{xij}}{G_iI_{ki}}\right)dx\tag{14}$$

$$\delta_j^\circ=\sum_i\int_{l_i}\left(\frac{N_i^pN_{ij}}{E_iF_i}+\frac{M_{zi}^pM_{zij}}{E_iI_{zi}}+\frac{M_{xi}^pM_{xij}}{G_iI_{ki}}\right)dx$$

где индексом p отмечены внутренние силовые факторы от действия только заданных внешних сил на основную систему.

Система уравнений (13) является обобщением канонических уравнений известного метода сил на случай ползучести. Коэффициенты δ_{kj} – единичные перемещения, $\overset{\circ}{\delta}_j$ – перемещения от действия внешних сил, которые полностью совпадают с их значениями в упругом случае.

Задача ползучести статически неопределимой стержневой конструкции может быть решена шаговым методом. Пусть в некоторый момент времени t_0 известны все величины деформаций $p_0,\ldots$ и напряжений $\sigma_0,\ldots$ Задаваясь приращением времени Δz, по определяющим соотношениям соответствующей гипотезы (теории) ползучести найдем приращения деформаций ползучести Δp, Δp_{xy}, Δp_{xz}. Далее, подставляя их величины в полученную из уравнений (13) систему ($\Delta\overset{\circ}{\delta}_j = 0$, так как внешние силы постоянны)

$$\sum_k \delta_{kj}\Delta X_k = \sum_i \int_{l_i} \left[\frac{M_{zij}}{I_{zi}} \iint_{F_i} \Delta py dF - \frac{N_{ij}}{F_i} \iint_{F_i} \Delta p dF + \right. \tag{15}$$

$$\left. + \frac{M_{xij}}{I_{ki}} \iint_{F_i} (\Delta p_{xy} z - \Delta p_{xz} y) dF \right] dx \quad (j = 1, 2, \ldots, K)$$

найдем приращения лишних неизвестных ΔX_k. Следует обратить внимание на то, что на каждом шаге счета изменяются только правые части уравнений (15). Зная приращения ΔX_k, можно вычислить приращения внутренних силовых факторов ΔN_i, ΔM_{zi}, ΔM_{xi}, а затем по полученным из зависимостей (4) и (8) соотношениям

$$\Delta\sigma_i = \frac{\Delta N_i}{F_i} + \frac{E_i}{F_i} \iint_{F_i} \Delta p dF - \left(\frac{\Delta M_{zi}}{I_{zi}} - \frac{E_i}{I_{zi}} \iint_{F_i} \Delta py dF \right) y - E_i \Delta p_i$$

$$\Delta\tau_{xyi} = \left[\frac{\Delta M_{xi}}{I_{ki}} - \frac{G_i}{I_{ki}} \iint_{F_i} (\Delta p_{xy} z - \Delta p_{xz} y) dF \right] \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - z \right) - G_i \Delta p_{xyi}$$

$$\Delta\tau_{xzi} = \left[\frac{\Delta M_{xi}}{I_{ki}} - \frac{G_i}{I_{ki}} \iint_{F_i} (\Delta p_{xy} z - \Delta p_{xz} y) dF \right] \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + y \right) - G \Delta p_{xzi}$$

приращения напряжений. Тем самым в момент времени $t_0 + \Delta t$ станут известны напряжения $\sigma = \sigma_0 + \Delta\sigma, \ldots$ и деформации ползучести $p = p_0 + \Delta p, \ldots$ и можно переходить к следующему шагу.

Таким образом, получен формализованный подход к решению статически неопределимых задач неустановившейся ползучести стержневых систем, который нетрудно переложить на язык ЭВМ. Естественно, что объем вычислений оказался бо́льшим, чем в упругой задаче. Однако в реальной задаче ползучести вычислений может быть значительно меньше предполагаемых за счет того, что ползучесть проявляется только при напряжениях, больших пороговых, и, следовательно, целые области в поперечном сечении окажутся вне расчетных для деформаций ползучести. Уменьшит объем счета и симметрия сечения. По-видимому, можно утверждать, что объем вычислений будет не больше, чем во многих задачах упругости, решаемых при помощи МКЭ.

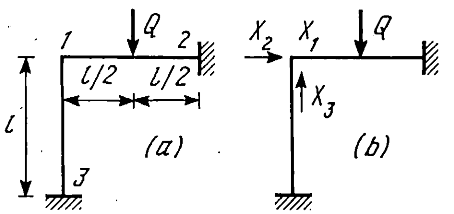
Нетрудно показать, что использованный подход позволяет обобщить на случай ползучести так называемый интеграл перемещений. Перемещение u_j в стержневой системе, находящейся в условиях ползучести, определяется выражением

$$u_j = \sum_i \int_{l_i} \left[\frac{N_i N_{ij}}{E_i F_i'} + \frac{M_{zi} M_{zij}}{E_i I_{zi}} + \frac{M_{xi} M_{xij}}{G_i I_{ki}} \right] dx +$$

$$+ \sum_i \int_{l_i} \left[N_{ij} \left(\frac{1}{F_i} \iint_{F_i} p dF + \frac{\delta_i}{l_i} + \alpha_i \Delta T_i \right) - \frac{M_{zij}}{I_{zi}} \iint_{F_i} py dF - \right. \tag{16}$$

$$\left. - \frac{M_{xij}}{I_{ki}} \iint_{F_i} (p_{xy} z - p_{xz} y) dF \right] dx$$

в котором N_{ij}, M_{zij} и M_{xij} – внутренние силовые факторы от единичной силы, соответствующей искомому перемещению.



Наиболее просто методом сил решаются задачи ползучести статически неопределимых ферм, так как в этом случае резко уменьшается область интегрирования. В качестве примера рассмотрим более сложную задачу (фигура (*a*)), заимствованную из [6]. Основная система этой трижды статически неопределимой конструкции получается вырезанием угловой точки. Крутящих моментов нет, а нормальными и перерезывающими силами, как и в [6], пренебрегаем. Изгибающие моменты от действия единичных сил (фигура, *b*) будут (начало отсчета координаты x в стержнях 31 и 12 находится в точках *3* и *1* соответственно) равны

$$M_{z31}^{(1)} = M_{z12}^{(1)} = 1, \quad M_{z12}^{(2)} = M_{z31}^{(3)} = 0, \quad M_{z31}^{(2)} = l - x, \quad M_{z12}^{(3)} = x \tag{17}$$

Верхний индекс – номер единичной силы. Коэффициенты канонической системы уравнений (15) на основании соотношений (14) и (17) будут

$$EI_z\delta_{11} = 2l, \quad EI_z\delta_{12} = EI_z\delta_{31} = \tfrac{1}{2}l^2, \quad EI_z\delta_{22} = EI_z\delta_{33} = \tfrac{1}{3}l^3, \quad \delta_{23} = 0$$

$$2l\Delta X_1 + \tfrac{1}{2}l^2\Delta X_2 + \tfrac{1}{2}l^2\Delta X_3 = EI_tA_1$$

$$\tfrac{1}{2}l^2\Delta X_1 + \tfrac{1}{3}l^3\Delta X_2 = EI_zA_2$$

$$\tfrac{1}{2}l^2\Delta X_1 + \tfrac{1}{3}l^3\Delta X_3 = EI_zA_3$$

$$A_1 = \frac{1}{I_z}\int_0^l \left(\iint_F \Delta p_{31} y\,dF\right)dx + \frac{1}{I_z}\int_0^l \left(\iint_F \Delta p_{12} y\,dF\right)dx$$

$$A_2 = \frac{1}{I_z}\int_0^l (l-x)\left(\iint_F \Delta p_{31} y\,dF\right)dx, \quad A_3 = \frac{1}{I_z}\int_0^l x\left(\iint_F \Delta p_{12} y\,dF\right)dx$$

Откуда найдем

$$\Delta X_1 = -\frac{E}{l^2}\left[\int_0^l (l-3x)\left(\iint_F \Delta p_{31} y\,dF\right)dx - \int_0^l (2l-3x)\left(\iint_F \Delta p_{12} y\,dF\right)dx\right]$$

$$\Delta X_2 = \frac{3E}{2l^3}\left[\int_0^l (3l-5x)\left(\iint_F \Delta p_{31} y\,dF\right)dx - \int_0^l (2l-3x)\left(\iint_F \Delta p_{12} y\,dF\right)dx\right]$$

$$\Delta X_3 = \frac{3E}{2l^3}\left[\int_0^l (l-3x)\left(\iint_F \Delta p_{31} y\,dF\right)dx - \int_0^l (2l-5x)\left(\iint_F \Delta p_{12} y\,dF\right)dx\right] \tag{18}$$

Используя гипотезу упрочнения $\dot{p}p^{\alpha} = a\sigma^n$, имеем

$$\Delta p_{ij} = \left[p_{ij}^{1/m} + \frac{a\Delta t}{m}\sigma_{ij}^n\right]^m - p_{ij}, \quad m(\alpha+1) = 1$$

Особенно просто вычисляется первый шаг. Напряжения в начальный момент ползучести найдутся по упругому решению

$$\sigma_{ij} = -yM_{zij}/I_z, \quad M_{z31} = Q(l-3x)/32, \quad M_{z12} = \left.\frac{13Q}{32}x - \frac{2Ql}{32}\right|_{x\le \frac{1}{2}l} - \left.Q\left(x - \frac{l}{2}\right)\right|_{x\le l}$$

Приращения деформации

$$\Delta p_{ij} = \left(\frac{a\Delta t}{m}\right)^m \sigma_{ij}^{nm} \operatorname{sign} \sigma_{ij}$$

будут степенными функциями x, y, а следовательно, правые части выражения (18) будут суммами интегралов от степенных функций, интегрирование которых не вызывает затруднений. В результате найдутся

$$\Delta X_1 = -2,74EH, \quad \Delta X_2 = 4,263EH / l$$

$$\Delta X_3 = 4,858EH / l, \quad H = (a\Delta t / m)^m (2Ql / W_z)^{nm} W_z$$

Были использованы величины m = 0,41; n = 5,14 для сплава Д16АТ при 150°С. W_z – осевой момент сопротивления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Наместников В.С.* Нужны ли статически неопределимые конструкции? // Вопросы исследования прочности деталей машин. Прикладная механика. М.: Моск. ин-т приборостроения, 1994. Вып. 2. С. 47–53.
2. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Изд-во АН СССР, 1954. 647 с.
3. *Наместников В.С.* О чистом изгибе призматического стержня при ползучести // Механика деформируемых тел и конструкций. М.: Машиностроение, 1975. С. 313–317.
4. *Наместников В.С.* Неустановившаяся ползучесть при кручении прямолинейного стержня // Изв. АН СССР. МТТ. 1971. № 3. С. 110–118.
5. *Динник А.Н.* Продольный изгиб. Кручение. М.: Изд-во АН СССР, 1955. 392 с.
6. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 711 с.

Москва

Поступила в редакцию
20.V.1996