

УДК 539.374

© 1998 г. А.М. АЛИМЖАНОВ

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ И НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ НЕОДНОРОДНЫХ ТОЛСТОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ И СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Разработана модель неоднородного упругопластического тела. В рамках этой модели рассматривается плоская упругопластическая задача для неоднородного тела с отверстием, чувствительного к виду напряженного состояния. Построен алгоритм решения задачи, учитывающий поведение такого тела при изменении вида напряженного состояния. На основании алгоритма решена конкретная задача с принятыми условиями пластичности и заданным (исходным) классом неоднородностей механических свойств.

1. Модель неоднородного упругопластического тела. Предметом исследований является макронеоднородное тело с механическими свойствами, изменяющимися по координатам. Это непрерывно неоднородное тело (в дальнейшем – неоднородное тело).

Рассмотрим модель неоднородного упругопластического тела со следующими предположениями:

1) механические свойства тела являются непрерывными и дифференцируемыми функциями координат x_i ($i \leq 3$) и параметров нагружения χ_j , устанавливающих зависимость механических свойств от граничных условий

$$\sigma_s = \sigma_s(x_i, \chi_j), \quad E = E(x_i, \chi_j) \quad (1.1)$$

2) прочностные (σ_s) и деформационные (E) свойства целого материала тела распределены пропорционально, в каждой точке имеют место соотношения

$$\sigma_s(x_i, \chi_j) = c\kappa(x_i, \chi_j)E(x_i, \chi_j) \quad (1.2)$$

где c – константа материала, $\kappa(x_i, \chi_j)$ – близкая к единице функция "отклонения";

3) в каждой точке тело характеризуется идеальными упругопластическими свойствами.

Энергия упругой деформации W^e в точках тела определяется соотношением

$$W^e = \frac{1}{E(x_i, \chi_j)} [(1 + \mu)\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \mu(\sigma_{kk})^2] \quad (1.3)$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, μ – коэффициент Пуассона.

При изотермическом и квазистатическом нагружении функция пластичности f имеет вид

$$f(\sigma_{ij}, \sigma_s(x_i, \chi_j)) = 0 \quad (1.4)$$

Функцию (1.4) можно представить в виде

$$f(\sigma_{ij}, \sigma_s(x_i, \chi_j)) = \bar{f}(\sigma_{ij}) - h(\sigma_s(x_i, \chi_j))$$

где $\bar{f}(\sigma_{ij})$ – однородные функции порядка n своих аргументов.

Если функция пластичности f совпадает с пластическим потенциалом, то в точках тела величина диссипации dQ' пропорциональна прочностным свойствам:

$$dQ' = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \cdot n\bar{f}(\sigma_{ij}) = d\lambda \cdot nh(\sigma_s(x_i, \chi_j)) \quad (1.5)$$

где $d\varepsilon_{ij}^p$ – компоненты приращений пластических деформаций, $d\lambda$ – положительный скалярный множитель.

В неоднородных телах изолинии прочностных свойств могут располагаться вдоль или поперек приложенных нормальных нагрузок. В работе рассматривается второй вариант. Из (1.4), (1.5) следует, что при этом варианте тела пластическая зона должна развиваться по изолиниям прочностных свойств.

Для дальнейшего введем понятие оптимального нагружения неоднородного тела:

Оптимальным будем называть такое нагружение неоднородного тела, при котором изолинии прочностных свойств не препятствуют свободному продвижению границы пластической зоны.

На участках с возрастающими (по отношению к пластической зоне) значениями прочностных свойств можно ввести понятие оптимального активного нагружения неоднородного тела:

Оптимальным активным будем называть такое нагружение неоднородного тела, при котором выполняется ассоциированный закон пластического деформирования.

Рассмотрим участки возрастания прочностных свойств. На таких участках можно ввести определение процессов разгрузки, нейтрального и оптимального активного нагружения, используя понятие поверхности пластичности Σ_p в шестимерном пространстве напряжений. Ограничимся рассмотрением гладких поверхностей Σ_p .

Внутри поверхности Σ_p , т.е. в упругой области имеем

$$f(\sigma_{ij}, \sigma_s(x_i, \chi_j)) < 0 \quad (1.6)$$

Согласно (1.4), (1.6), разгрузка из состояния на поверхности и нейтральное нагружение определяются как процесс, в котором

$$\begin{aligned} d\chi_j &= 0, \quad d\varepsilon_{ij}^p = 0 \\ f &= 0, \quad df = d'f \equiv \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} \leq 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Согласно (1.4), оптимальное активное нагружение определяется как процесс, в котором

$$\begin{aligned} d\chi_j &\neq 0, \quad d\varepsilon_{ij}^p \neq 0 \\ f &= 0, \quad df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_s} \frac{\partial \sigma_s}{\partial \chi_j} d\chi_j = 0, \quad d'f > 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Приращения параметров нагружения $d\chi_j$ в (1.8) не могут быть произвольными. Совокупность таких приращений должна отвечать данному виду оптимального нагружения ($d\chi_j = d\chi_j^\circ$). Например, при оптимальном "шаровом" нагружении $d\chi_{\sigma_0}^\circ \neq 0$, $d\chi_k^\circ = 0$; при оптимальном пропорциональном нагружении $d\chi_j^\circ = \chi_j^* d\beta$, где χ_j^* – фиксированные значения, β – общий параметр.

В случае (1.7) поверхность Σ_p не изменится, а в случае (1.8) она будет равномерно расширяться. Изотропное расширение Σ_p связано не с упрочнением тела, а с его возрастающим сопротивлением.

Ассоциированный закон пластического деформирования в случае (1.6), (1.7), (1.8) принимает вид

$$d\varepsilon_{ij}^p = g \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} d\sigma_{mn} \quad \text{при } f = 0, \quad d'f > 0$$

$$d\varepsilon_{ij}^p = 0 \quad \text{при } d'f < 0, \quad f = 0 \quad \text{и} \quad f < 0 \quad (1.9)$$

где g – некоторая положительная функция.

Компоненты $d\varepsilon_{ij}^p$ не входят в число определяющих параметров функции пластичности (1.4), поэтому функция g необходимо равна

$$g = d\lambda \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} d\sigma_{mn} \right)^{-1}$$

где $d\lambda$ – положительный скалярный множитель.

В качестве условия пластичности может быть принято условие Мизеса

$$\sigma_i = \sqrt{3/2 s_{ij} s_{ij}} = \sigma_s(x_i, \chi_j)$$

где σ_i – интенсивность напряжений, s_{ij} – компоненты девиатора напряжений.

При наличии дилатансии может быть принято обобщенное условие Кулона – Мора

$$\alpha \sigma_{ii} + \sqrt{1/2 s_{ij} s_{ij}} = 1/\sqrt{3} \sigma_s(x_i, \chi_j)$$

Необратимое изменение объема в этом случае является "ассоциированной" и неограниченной.

Рассмотрим участки с убывающими значениями прочностных свойств. На этих участках пластическое деформирование будет неустойчивым. Неустойчивое пластическое деформирование является конечным процессом, поэтому оно определяется следующим образом:

$$\Delta \varepsilon_{ij}^p \neq 0, \quad \int_0^{\Delta \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0 \quad (1.10)$$

Неустойчивое пластическое деформирование рассматриваемого тела имеет особую природу. Приращения пластических деформаций в (1.10) никак не связаны с изменением уровня напряженного состояния, поскольку компоненты $d\varepsilon_{ij}^p$ не являются определяющими параметрами функции (1.4). Следовательно рассматриваемое явление в отличие от процесса разупрочнения, не влечет за собой изменение физических свойств, а представляет собой лишь неконтролируемое снижение уровня напряженного состояния, связанное с убывающим сопротивлением тела. Другая особенность заключается в локальном характере неустойчивого пластического деформирования. Этот процесс не охватывает все тело, а ограничивается отдельным участком. В силу (1.1), (1.4) процесс неустойчивого деформирования является непрерывным и изотропным. Если на участках устойчивого пластического деформирования, ограничивающих рассматриваемый процесс, имеет место оптимальное нагружение, то используя понятие поверхности Σ_p , можно представить этот процесс как быстрое равномерное уменьшение поверхности Σ_p до своего нового устойчивого состояния.

При неустойчивом пластическом деформировании ассоциированный закон (1.9), очевидно, не выполняется.

В случае отклонения нагружения от оптимального, имеем неоптимальное нагружение. Рассмотрим, для определенности неоптимальное нагружение на участках

возрастания прочностных свойств. При отклонении нагружения тела от оптимального его прочностные изолинии начинают препятствовать свободному продвижению границы пластической зоны. Значит, при квазистатическом нагружении несвободное продвижение упругопластической границы должно осуществляться через искривление этих изолиний, причем при таком искривлении упругопластическая граница должна сохранять свое равновесное состояние. Это имеет место, если изолинии прочностных свойств изменяются сообразно изменению самой границы пластической зоны. Искривление сетки изолиний является, очевидно, необратимым.

Введем определение процесса неоптимального активного нагружения. Согласно (1.4), неоптимальное активное нагружение можно определить как процесс, в котором

$$dx_i \neq 0, \quad d\chi_j \neq 0$$

$$f = 0, \quad df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_s} \frac{\partial \sigma_s}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f}{\partial \sigma_s} \frac{\partial \sigma_s}{\partial \chi_j} d\chi_j = 0 \quad (1.11)$$

Приращения параметров нагружения $d\chi_j$ в (1.11) являются произвольными, а приращения координат dx_i зависят от величины отклонения между произвольными и соответствующими оптимальными приращениями параметров нагружения $d\chi_j - d\chi_j^0$.

Необратимое искривление сетки изолиний в той или иной степени охватывает все тело, т.е. носит глобальный характер. Продвижение упругопластической границы по изолиниям не играет при этом никакой роли. Отсюда можно заключить, что рассматриваемое явление имеет особую природу. Это явление характеризует изменение структуры тела и не связано с работой напряжений на пластических деформациях. В процессе искривления величина диссипации $dQ' > \sigma_{ij} de_{ij}^p$. Тогда можно записать

$$dQ' = \sigma_{ij} e_{ij}^p + dQ_F \quad (1.12)$$

где dQ_F — диссипация, связанная с необратимым искривлением сетки изолиний прочностных свойств.

Согласно (1.12) искривление сетки изолиний сопряжено с продвижением упругопластической границы по изолиниям. В случае $dQ' = dQ_F$ искривление сетки изолиний происходит без продвижения упругопластической границы по изолиниям. Выражение (1.11) в этом случае остается справедливым. Отметим, что в процессе искривления теряет силу соотношение (1.3). Неизвестным остается и физическое уравнение, характеризующее процесс искривления сетки изолиний.

При неоптимальном нагружении тела искривление сетки изолиний может происходить таким образом, что тело в любой момент искривления способно вернуться к своему первоначальному оптимальному нагружению. Тело, обладающее такой способностью, будем называть адаптирующимся неоднородным телом. В противоположность ему аморфным неоднородным телом будем называть тело, вид оптимального нагружения которого меняется в процессе искривления сетки изолиний. Для адаптирующегося неоднородного тела упрощается решение конкретных задач. В таких задачах изменение сетки изолиний тела при неоптимальном нагружении полностью определяется изменением упругопластической границы. Если при этом ограничиться рассмотрением начального и конечного положения сетки изолиний, то можно получить аналитически замкнутое решение.

Рассмотренное поведение неоднородного тела не является, вообще говоря, единственным. Динамическое нагружение тела может привести к продвижению границы пластической зоны сквозь изолинии прочностных свойств. При нагружении жестко неоднородного тела ($\sigma_s = \sigma_s(x_i)$, $E = E(x_i)$) возможно появление внутренних температурных градиентов и такое нагружение должно рассматриваться как неизотермическое. Возможны и другие сценарии развития упругопластического состояния неоднородного тела в зависимости от принимаемых исходных положений.

2. Алгоритм решения плоской упругопластической задачи для неоднородного тела с отверстием. Плоские упругопластические задачи для однородных тел решаются, как правило, в предположении активного процесса нагружения. Любое изменение вида напряженного состояния делает это предположение рискованным, так что вид напряженного состояния в задачах считается заданным. В таких задачах исследование напряженного состояния завершается определением упругопластической границы [1–4]. К этой же схеме решения сводятся задачи для тел с жесткой неоднородностью пластических свойств [5, 6]. При этом пластическая неоднородность рассматривается в них как вторичный фактор, обусловленный различной степенью разрушенности материала в пластической зоне, и не связывается с первоначальной неоднородностью прочностных свойств тела. Имеются прецеденты решения плоских упругопластических задач для тел с первоначальной неоднородностью деформационных свойств, решаемые по вышеупомянутой схеме [7]. Здесь в качестве условия пластичности используется условие предельной энергии формоизменения.

Таким образом, в плоских упругопластических задачах авторы рассматривали неоднородность деформационных либо приобретенных прочностных свойств тела. Для тел с неоднородными прочностными и деформационными свойствами (в рамках принятой модели) плоские упругопластические задачи никем не исследовались.

Сложная картина деформирования рассматриваемого тела в значительной степени затрудняет построение соответствующего решения. В плоских задачах такое тело должно определенным образом реагировать на изменение граничных условий, при котором любое положение упругопластической границы будет характеризоваться одним равновесным состоянием. Это означает, что неоднородность в теле будет изменяться вместе с изменением граничных условий.

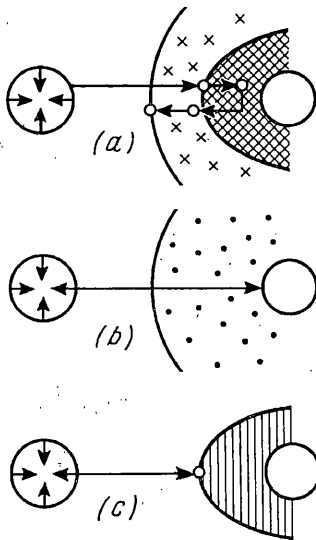
Фактор неинвариантности механических свойств в рассматриваемой задаче влечет за собой трудности принципиального характера. Появляется неопределенность в последовательности и взаимосвязанности изменения состояний таких элементов тела как упругопластическая граница, неоднородность в пластической зоне, неоднородность в упругой области и т.д. Следовательно, перестает работать общепринятая схема решения плоских упругопластических задач. В работе предложен механизм реагирования тела на изменение граничных условий, который, с одной стороны правильно отражает такую последовательность и взаимосвязанность, а с другой – позволяет выстроить соответствующую схему решения задачи.

Механизм реагирования тела таков: упругопластическая граница – неоднородность в пластической зоне – неоднородность в упругой области – граница внешней неоднородной области (фиг. 1, а).

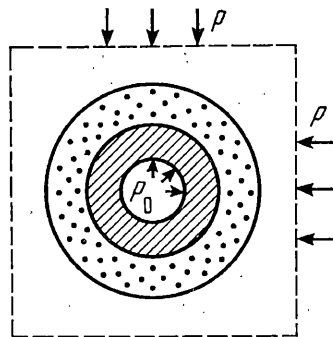
При квазистатическом нагружении все изменения происходят одновременно, поэтому механизм реагирования призван отразить лишь логическую цепочку изменения состояний. Так, любое изменение граничных условий не может самостоятельно восприниматься неоднородностью в упругой области. Она, как и внешняя граница области, реагирует на это опосредственно через вышеописанную схему взаимных изменений. Из этого следует, что неоднородность в упругой области может быть чувствительной к граничным условиям только при нагрузках, близких к предельным, когда вокруг отверстия уже образована пластическая зона. Если нагрузки далеки от предельных, упругая неоднородность ведет себя жестко, поскольку отсутствует механизм реагирования – ему просто неоткуда начаться (фиг. 1, б). В теории упругости непрерывно неоднородных тел задачи решаются именно в такой постановке [8].

В теории однородных упругопластических тел имеет место несколько иная картина. Однородное упругопластическое тело реагирует на изменение граничных условий изменением упругопластической границы. На этом механизм реагирования заканчивается – ему некуда продолжаться (фиг. 1, в).

Составной механизм реагирования непрерывно неоднородных упругопластических тел обуславливает построение соответствующей схемы решения задачи. Здесь воз-



Фиг. 1



Фиг. 2

никают и трудности математические – отсутствие аналитических методов решений. В случае плоской задачи, теряет смысл использование общепринятых методов теории функций комплексного переменного. В настоящей работе использован метод, представляющий собой развитие метода возмущений [9] применительно к рассматриваемому телу.

Алгоритм решения плоской упругопластической задачи для неоднородного тела с отверстием, основанный на этом методе, состоит в следующем:

1. *Определяется осесимметричное состояние неоднородного тела с отверстием, вызванное усредненными осесимметричными нагрузками.*
2. *Методом возмущений определяется уравнение упругопластической границы для неосесимметричного состояния соответствующего однородного тела с отверстием, тем самым устанавливается уравнение упругопластической границы неоднородного тела. Это уравнение содержит заданные параметры, нагружения.*
3. *Методом возмущений строится решение в пластической зоне и упругих областях, неоднородность в которых изменяется согласно изменению упругопластической границы, а внешняя граница неоднородной области принимает сходное с упругопластической границей очертание.*
4. *Напряженное состояние вокруг отверстия определяется из граничных условий и условий сопряжения в напряжениях.*

Согласно п. 3, неоднородное тело является адаптирующимся, а оптимальное нагружение тела является пропорциональным.

В приведенном алгоритме решения конечной целью является определение напряженного состояния в упругих областях. Это решение применимо для заданных видов напряженного состояния (в этом случае неоднородность остается инвариантной), но может учитывать и их изменение при условии, что рассматривается не сам процесс искривления изолиний, а лишь начальное и конечное его состояние. В этом случае задача является статически определимой. Требование статической определимости для рассматриваемого тела оказывается в данном случае более мягким, чем для однородного тела: необходимо только, чтобы при изменении граничных условий усредненные внешние нагрузки не уменьшались.

Разработанный алгоритм решения универсален, он приемлем для любых видов

неоднородности, условий пластичности, геометрических и статических граничных условий.

3. Решение плоской упругопластической задачи для неоднородного тела с круговым отверстием. Ниже рассматривается плоская упругопластическая задача для неоднородного плоскодеформированного тела с круговым отверстием, по контуру которого приложено равномерное давление P_0 . На бесконечности имеет место неравномерное поле напряжений, обусловленное действующими ортогональными нагрузками P_1 и P_2 .

В качестве условий пластичности принимаются условие Треска (совпадающее в данной задаче с условием Мизеса) и условие Кулона – Мора. Само непрерывно неоднородное тело подчиняется предположениям (1.1)–(1.4). При решении используется полярная система координат r, θ , где координата r отнесена к радиусу отверстия.

Для рассматриваемого тела имеем следующие основные соотношения:

(а) уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + 2 \frac{\partial \tau_{r\theta}}{r} = 0 \quad (3.1)$$

(б) уравнение совместности деформаций

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \theta^2} + r \frac{\partial^2 (r \varepsilon_\theta)}{\partial r^2} - r \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} - \frac{\partial^2 (r \gamma_{r\theta})}{\partial r \partial \theta} = 0 \quad (3.2)$$

(в) соотношения закона Гука

$$\varepsilon_r = \frac{1 - \mu_1^2}{E(r, \theta, r_{s0}, \delta)} (\sigma_r - \mu \sigma_\theta), \quad \varepsilon_\theta = \frac{1 - \mu_1^2}{E(r, \theta, r_{s0}, \delta)} (\sigma_\theta - \mu \sigma_r), \quad \gamma_{r\theta} = \frac{\tau_{r\theta}}{G(r, \theta, r_{s0}, \delta)} \quad (3.3)$$

(г) условие пластичности Треска или Кулона – Мора

$$(\sigma_\theta - \sigma_r)^2 + 4\tau_{r\theta}^2 = 4K^2(r, \theta, r_{s0}, \delta) \quad (3.4)$$

$$(\sigma_\theta - \sigma_r)^2 + 4\tau_{r\theta}^2 = (\sigma_r + \sigma_\theta + 2H(r, \theta, r_{s0}, \delta))^2 \sin^2 \rho \quad (3.5)$$

Здесь $\mu = \mu_1 / (1 - \mu_1)$, μ_1 – постоянный коэффициент Пуассона,

$$H(r, \theta, r_{s0}, \delta) = \frac{1 - \bar{\kappa} \sin \rho}{2\bar{\kappa} \sin \rho} \sigma_s(r, \theta, r_{s0}, \delta), \quad H(r, \theta, r_{s0}, \delta) = K(r, \theta, r_{s0}, \delta) \operatorname{ctg} \rho, \quad \bar{\kappa} = \pm 1$$

r_{s0}, δ – параметры нагружения, ρ – угол внутреннего трения.

1. Сначала находим осесимметричное состояние неоднородного тела с отверстием (фиг. 2). Тело в этом случае обладает инвариантной осесимметричной неоднородностью вида $\sigma_s = \sigma_s(r, r_{s0}) = \sigma_s(r)$, $E = E(r, r_{s0}) = E(r)$.

В осесимметричном случае функцию напряжений $F^\circ(r)$ можно установить следующим образом (индекс 0 всюду означает осесимметричное состояние):

$$\sigma_r^\circ = F^\circ / r, \quad \sigma_\theta^\circ = dF^\circ / dr = F^{\circ\prime}$$

Тогда в пластической зоне при условии Кулона – Мора получим следующее основное уравнение относительно F° :

$$F^{\circ\prime} - \frac{\alpha_1}{r} F^\circ = \alpha_2 H^\circ$$

решение которого

$$F^\circ = Ar^{\alpha_1} + \alpha_2 r^{\alpha_1} \int r^{-\alpha_1} H^\circ dr$$

Компоненты напряжений в пластической зоне принимают вид

$$\sigma_{[r]}^{\circ} = Ar^{\alpha_2} + \alpha_2 r^{\alpha_2} \int r^{-\alpha_1} H^{\circ} dr, \quad \sigma_{[\theta]}^{\circ} = \alpha_1 \sigma_{[r]}^{\circ} + \alpha_2 H^{\circ}, \quad \tau_{[r\theta]}^{\circ} = 0 \quad (3.6)$$

$$\sigma_{[\theta]}^{\circ} > \sigma_{[r]}^{\circ}, \quad \alpha_1 = \frac{1 + \sin \rho}{1 - \sin \rho}, \quad \alpha_2 = \alpha_1 - 1$$

$$H^{\circ} = K^{\circ} \operatorname{ctg} \rho, \quad H^{\circ} = H(r) = \frac{1}{\alpha_2} \sigma_s(r)$$

Здесь и далее квадратными скобками у индексов отмечены компоненты, относящиеся к пластической зоне, круглыми – к неоднородной упругой области, круглыми двойными – к однородной упругой области.

В неоднородной упругой области основное уравнение в напряжениях записывается следующим образом

$$E^{\circ} \frac{d}{dr} (\sigma_q - \mu \sigma_r) - E^{\circ'} (\sigma_{\theta} - \mu \sigma_r) + (\mu + 1) \frac{E^{\circ}}{r} (\sigma_{\theta} - \sigma_r) = 0$$

Относительно функции напряжений $\Phi^{\circ}(r)$ это уравнение будет иметь вид

$$E^{\circ} r^2 \Phi^{\circ''} + (E^{\circ} - r E^{\circ'}) r \Phi^{\circ'} - (E^{\circ} - \mu r E^{\circ'}) \Phi^{\circ} = 0 \quad (3.7)$$

$$\Phi^{\circ'} = d\Phi^{\circ} / dr, \quad \Phi^{\circ''} = d^2\Phi^{\circ} / dr^2, \quad E^{\circ'} = dE^{\circ} / dr$$

Задача сводится к решению уравнения (3.7) в кольце с радиусами r_{s0} (радиус упруго-пластической границы) и r_{b0} (известный радиус внешней неоднородной области) по заданным граничным условиям.

Интегрирование уравнения (3.7) допустимо для ограниченного класса функций модуля упругости E° .

Рассмотрим функцию

$$E^{\circ} = E(r) = E_0 r^n \quad (3.8)$$

Если в однородной внешней области $E^{\circ} = E_1$, то параметр нелинейности n определяется однозначным образом $n = \log_{r_{b0}} (E_1 / E_0)$.

Подставляя функцию (3.8) в (3.7) получим уравнение

$$r^2 \Phi^{\circ''} + (1 - n) r \Phi^{\circ'} - (1 - \mu n) \Phi^{\circ} = 0 \quad (3.9)$$

Корни k_i характеристического уравнения для (3.9) всегда действительны, поэтому решение имеет вид

$$\Phi^{\circ} = B_i^{\circ} S_i^{\circ} = B_i^{\circ} r^{k_i} = r^{n/2} (B_1^{\circ} r^{\sqrt{n^2 + 4(1 - \mu n)}/2} + B_2^{\circ} r^{-\sqrt{n^2 + 4(1 - \mu n)}/2}) \quad (i = \overline{1, 2})$$

откуда

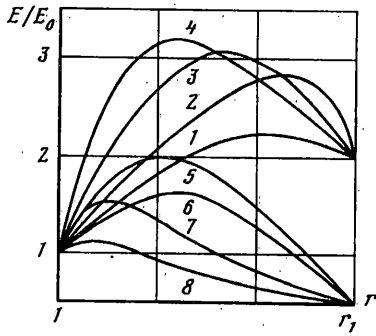
$$\sigma_{(r)}^{\circ} = \frac{1}{r} B_i^{\circ} S_i^{\circ} = B_i^{\circ} r^{k_i - 1}, \quad \sigma_{(\theta)}^{\circ} = B_i^{\circ} S_i^{\circ'} = B_i^{\circ} k_i r^{k_i - 1}, \quad \tau_{(r\theta)}^{\circ} = 0 \quad (3.10)$$

Рассмотрим локальную немонотонную функцию вида

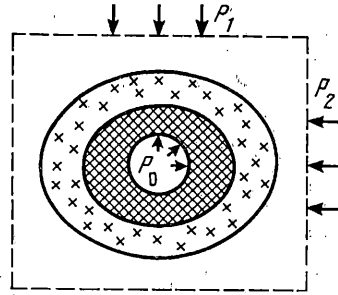
$$E^{\circ} = E(r) = E(r_{s0}) \left(\frac{r}{r_{s0}} \right)^m \exp(a(r^n - r_{s0}^n)) \quad (3.11)$$

Эта функция имеет два параметра нелинейности m и n и граничную постоянную a , определяемую из условия $E(r_{b0}) = E_1$.

На фиг. 3 показаны возможности функции (3.11) при описании различных кривых $E(r)$ в зависимости от параметров m , n и a . Здесь кривой 1 соответствуют значения $m = 1$, $n = 3$; кривой 2 – значения $m = 1$, $n = 8$; 3 – $m = 2$, $n = 2$; 4 – $m = -3$, $n = -1$;



Фиг. 3



Фиг. 4

5 - $m = 2, n = 2$; 6 - $m = 1, n = 3$; 7 - $m = -2, n = -2$; 8 - $m = -1, n = -3$. Кривые 1-4 соответствуют случаю $E_1/E_0 = 2$; кривые 5-8 - случаю $E_1/E_0 = 0,5$. Все кривые имеют одну точку с $E'(r) = 0$.

Подставляя функцию (3.11) в (3.7) получим уравнение

$$r^2 \Phi^{\circ\prime\prime} - (anr^n + m - 1)r\Phi^{\circ\prime} + (\mu anr^n + \mu m - 1)\Phi^{\circ} = 0 \quad (3.12)$$

Уравнение (3.12) двумя подстановками сводится к конфлюэнтному гипергеометрическому уравнению, решение которого при нецелых β выражается через конфлюэнтные гипергеометрические функции ${}_1N_1 = N(\alpha, \beta, ar^n)$:

$$\Phi^{\circ} = B_1^{\circ} S_i^{\circ} = B_1^{\circ} r^{nl} N(\alpha, \beta, ar^n) + B_2^{\circ} r^{m-nl} N(\alpha - \beta + 1, 2 - \beta, ar^n)$$

$$\alpha = l - \mu/n, \quad \beta = 2l + 1 - m/n$$

где l - действительный (это легко показать) корень квадратного уравнения $n^2 l^2 - mnl + \mu m - 1 = 0$.

Функция $N(\alpha, \beta, ar^n)$ может быть представлена с помощью ряда Куммера, сходящегося при всех значениях аргумента ar^n :

$$N(\alpha, \beta, ar^n) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_j (ar^n)^j}{(\beta)_j j!}, \quad (\alpha)_j \equiv \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+j-1)$$

$$(\beta)_j \equiv \beta(\beta+1)\dots(\beta+j-1)$$

Поскольку величина r всегда положительна, область сходимости решения распространяется на всю действительную ось значений аргумента. Это решение справедливо при любых значениях m и n . Компоненты напряжений запишутся следующим образом

$$\sigma_{(r)}^{\circ} = B_1^{\circ} r^{nl-1} N_1(r) + B_2^{\circ} r^{m-nl-1} N_2(r), \quad r_{(r\theta)}^{\circ} = 0 \quad (3.13)$$

$$\sigma_{(\theta)}^{\circ} = B_1^{\circ} r^{nl-1} (\mu N_1(r) + (nl - \mu) N_3(r)) + B_2^{\circ} r^{m-nl-1} (\mu N_2(r) + (m - nl - \mu) N_4(r))$$

$$N_1(r) = N(\alpha, \beta, ar^n), \quad N_2(r) = N(\alpha - \beta + 1, 2 - \beta, ar^n)$$

$$N_3(r) = N(\alpha + 1, \beta, ar^n), \quad N_4(r) = N(\alpha - \beta + 2, 2 - \beta, ar^n)$$

В однородной упругой области компоненты напряжений имеют вид

$$\sigma_{(r)}^{\circ} = C_1^{\circ} + C_2^{\circ} r^{-2}, \quad \sigma_{(\theta)}^{\circ} = C_1^{\circ} - C_2^{\circ} r^{-2}, \quad \tau_{(r\theta)}^{\circ} = 0 \quad (3.14)$$

Имеем граничные условия и условия сопряжения (фиг. 2):

$$\sigma_{[r]}^{\circ} = P_0, \quad r = 1; \quad \sigma_{(r)}^{\circ} = P, \quad r \rightarrow \infty \quad (3.15)$$

$$[\sigma_r^{\circ}] = [\sigma_{\theta}^{\circ}] = 0, \quad r = r_{s0} \text{ и } r_{b0}$$

Решая систему (3.6), (3.10) или (3.13), (3.14) с учетом (3.15), найдем все постоянные:

$$A = P_0, \quad B_i^\circ = \frac{2Pr_{b0}\tilde{S}_{3-i}^\circ - D^\circ r_{s0}(\check{S}_{3-i}^\circ + r_{b0}\check{S}_{3-i}^{\circ'})}{(-1)^{i+1}\tilde{S}_{3-i}^\circ(\check{S}_i^\circ + r_{b0}\check{S}_i^{\circ'})}$$

$$C_1^\circ = P, \quad C_2^\circ = \frac{r_{b0}}{2}(B_i^\circ(\check{S}_i^\circ - r_{b0}\check{S}_i^{\circ'})), \quad D^0 = P_0 r_{s0}^{\alpha_2} + \alpha_2 r_{s0}^{\alpha_2} \int_1^{r_{s0}} r^{-\alpha_1} H^\circ dr$$

$$\tilde{S}_i^\circ = S_i^\circ(r_{s0}), \quad \check{S}_i^\circ = S_i^\circ(r_{b0}), \quad \tilde{S}_i^{\circ'} = S_i^{\circ'}(r_{s0}), \quad \check{S}_i^{\circ'} = S_i^{\circ'}(r_{b0}) \quad (i = \overline{1,2})$$

Функция H° , согласно (1.2), задается аналогично функции E° .

Условие $[\sigma_\theta^\circ] = 0$, $r = r_{s0}$ справедливо при $H^{*\circ} = H^\circ$, где $H^{*\circ}$ прочностные свойства в пластической зоне. В этом случае неизвестный радиус r_{s0} неявно определяется из уравнения

$$B_i^\circ \tilde{S}_i^{\circ'} = \alpha_1 D^\circ + \alpha_2 H^\circ \quad (3.16)$$

При условии Кулона – Мора может быть $H^{*\circ} \neq H^\circ$ и тогда компонента σ_θ терпит разрыв на границе r_{s0} . В этом случае для определения r_{s0} используется условие $\sigma_{(\theta)}^\circ - \alpha_1 \sigma_{(r)}^\circ = \alpha_2 H^\circ$, откуда имеем вместо (3.16) уравнение

$$B_i^\circ \left(\tilde{S}_i^{\circ'} - \frac{\alpha_1}{r_{s0}} \tilde{S}_i^{\circ'} \right) = \alpha_2 H^\circ \quad (3.17)$$

Под $H^{*\circ} \neq H^\circ$ в задаче подразумевается зависимость $H^{*\circ} = c^* H^\circ$, $0 < c^* < 1$. При условии Треска везде необходимо положить $\alpha_1 = 1$, $H^\circ = K^\circ \operatorname{ctg} \rho$. Итак, осесимметричное состояние определено.

2. При решении задачи могут быть использованы уже найденные для однородных тел уравнения упругопластической границы. В работе [9] методом возмущений получено уравнение упругопластической границы для плоскодеформированного однородного тела с круговым отверстием при условии пластичности Треска. Граница характеризуется эллиптическим распределением

$$r_s = r_{s0} \sum_0^v \delta^v r_{sv}(\theta)$$

вида

$$r_s = r_{s0} + \delta r_{s0} \cos 2\theta - \frac{3}{4} \delta^2 r_{s0} (1 - \cos 4\theta) + \frac{5}{8} \delta^3 r_{s0} (-\cos 2\theta + \cos 6\theta) + \dots \quad (3.18)$$

где $\delta = (P_1 - P_2)/2K_1$ – параметр, характеризующий степень неосесимметричности граничных условий на бесконечности.

Решая аналогичную задачу при условии Кулона – Мора, получим для упругопластической границы овальное распределение вида

$$r_s = r_{s0} + 2\delta r_{s0} \cos 2\theta - \delta^2 r_{s0} ((\alpha_1 + 2) + (\alpha_1 - 4) \cos 4\theta) + \dots \quad (3.19)$$

$$+ \delta^3 r_{s0} ((2\alpha_1^2 + 3\alpha_1 - 10) \cos 2\theta + \frac{1}{3}(2\alpha_1^2 - 17\alpha_1 + 30) \cos 6\theta) + \dots$$

$$\delta = (P_1 - P_2)/2\alpha_2(P_2 + H_1)$$

где H_1, K_1 – значения для однородного тела.

3. Рассмотрим теперь неосесимметричное состояние неоднородного тела с отверстием (фиг. 4).

Решение в пластической зоне строится вблизи невозмущенного осесимметричного состояния в виде

$$\sigma_{[ij]} = \sum_0^v \delta^v \sigma_{[ij]}^{(v)}, \quad H = \sum_0^v \delta^v H^{(v)}$$

В качестве параметра δ примем величину из (3.18) или (3.19), тогда при $\delta = 0$ будем иметь осесимметричное состояние. Далее, при условии Кулона – Мора отнесем все величины с размерностью напряжения к величине $\alpha_2(P_2 + H_1)$, а при условии Треска – к величине K_1 .

Граничные условия на бесконечности запишутся в виде

$$\sigma_{((r))}^\infty = P - \delta \cos 2\theta, \quad \sigma_{((\theta))}^\infty = P + \delta \cos 2\theta, \quad \tau_{((r\theta))}^\infty = \delta \sin 2\theta \quad (3.20)$$

где P – усредненные осесимметричные нагрузки. Линеаризация условий (3.4), (3.5) с учетом $\tau_{[r\theta]}^\circ = 0$ приводит к соотношениям

$$\sigma_{[\theta]}^\circ - \alpha_1 \sigma_{[r]}^\circ = \alpha_2 H^\circ, \quad \sigma_{[\theta]}^{(\prime)} - \alpha_1 \sigma_{[r]}^{(\prime)} = \alpha_2 H^{(\prime)} \quad (3.21)$$

$$\sigma_{[\theta]}^{(\prime\prime)} - \alpha_1 \sigma_{[r]}^{(\prime\prime)} = (\alpha_2 + 2) \frac{(\tau_{[r\theta]}^{(\prime)})^2}{\sigma_{[r]}^\circ - \sigma_{[\theta]}^\circ} + \alpha_2 H^{(\prime\prime)}$$

$$\sigma_{[\theta]}^\circ - \sigma_{[r]}^\circ = 2K^0, \quad \sigma_{[\theta]}^{(\prime)} - \sigma_{[r]}^{(\prime)} = 2K^{(\prime)}, \quad \sigma_{[\theta]}^{(\prime\prime)} - \sigma_{[r]}^{(\prime\prime)} = -\frac{1}{K_0} (\tau_{[r\theta]}^{(\prime)})^2 + 2K^{(\prime\prime)} \quad (3.22)$$

Можно перейти от (3.21) к (3.22), приняв $\alpha_1 = 1$ и учитывая $H^{(v)} = K^{(v)} \operatorname{ctg} \rho$. Функцию напряжений $F = F(r, \theta)$ можно ввести следующим образом:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \quad \tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) \quad (3.23)$$

Задача в пластической зоне сводится к решению неоднородного уравнения в частных производных для функции $F^{(v)}(r, \theta)$:

$$r^2 \frac{\partial^2 F^{(v)}}{\partial r^2} - \alpha_1 r \frac{\partial F^{(v)}}{\partial r} - \alpha_1 \frac{\partial^2 F^{(v)}}{\partial \theta^2} = r^2 f^{(v)}(r, \theta), \quad v \geq 1 \quad (3.24)$$

где $f^{(v)}$ – правая часть соответствующего линеаризованного соотношения.

Функцию $F^{(v)}$ представляем исходя из геометрических условий на границе r_s . В рассматриваемой задаче имеем $F^{(\prime)} = R(r) \cos 2\theta$, $F^{(\prime\prime)} = R_1(r) + R_2(r) \cos 4\theta, \dots$. Тогда для определения составляющих $R \cos 2\theta$, $R_2 \cos 4\theta, \dots$ $R(\eta) \cos \eta\theta$ получим дифференциальное уравнение Эйлера

$$r^2 R'' - \alpha_1 r R' + \eta^2 \alpha_1 R = 0 \quad (3.25)$$

$$R' = dR/dr, \quad R'' = d^2R/dr^2$$

Для составляющего R_1 можно получить уравнение из (3.25) положив в нем $\eta = 0$.

При условии пластичности Треска в уравнениях (3.24), (3.25) необходимо принять $\alpha_1 = 1$.

Фундаментальная система решений для составляющего R_1 при условии Кулона – Мора имеет вид

$$R_1 = A_{11} + A_{12} r^{\alpha_1 + 1} \quad (3.26)$$

В случае условия Треска $\alpha_1 = 1$.

Для составляющих $R(\eta) \cos \eta\theta$ фундаментальная система решений при условии Ку-

лона – Мора определяется величиной угла ρ и имеет следующий общий вид ($\eta \geq 2$):

$$R(\eta) \cos \eta \theta = [r^{(\alpha_1+1)/2} (A_{\eta 1} \cos(\frac{1}{2} \sqrt{4\eta^2 \alpha_1 - (\alpha_1+1)^2} \ln r) + \quad (3.27)$$

$$+ A_{\eta 2} \sin(\frac{1}{2} \sqrt{4\eta^2 \alpha_1 - (\alpha_1+1)^2} \ln r)] \cos \eta \theta \quad \text{при } \rho < \arccos(\eta^{-1})$$

$$R(\eta) \cos \eta \theta = [r^{(\alpha_1+1)/2} (A_{\eta 1} + A_{\eta 2} \ln r)] \cos \eta \theta \quad \text{при } \rho = \arccos(\eta^{-1}) = \rho^*$$

$$R(\eta) \cos \eta \theta = [r^{(\alpha_1+1)/2} (A_{\eta 1} r^{\sqrt{\alpha_1^2 - (4\eta^2 - 2)\alpha_1 + 1}} + A_{\eta 2} r^{-\sqrt{\alpha_1^2 - (4\eta^2 - 2)\alpha_1 + 1}})] \cos \eta \theta$$

$$\text{при } \rho > \arccos(\eta^{-1})$$

При $\eta = 2$ имеем $\rho^* = 60^\circ$, при $\eta = 4$ имеем $\rho^* = 75^\circ 31'$, при $\eta = 6 - \rho^* = 80^\circ 24'$. Практически для всех материалов $\rho < 60^\circ$, поэтому справедливо, как правило, первое решение в (3.27).

При условии Треска угол $\rho = 0$ и имеет место только первое решение (3.27), в котором необходимо положить $\alpha_1 = 1$.

Таким образом, интегрирование уравнения (3.25) зависит от принятого условия пластичности, но никак не зависит от выбранного вида неоднородности H° или K° .

Решение уравнения (3.24) принимает вид для $\nu = 1, 2$:

$$F^{(\nu)} = \left(A_i R_i + R_i \int_1^r \frac{V_i(r)}{V(r)} dr \right) \cos 2\theta, \quad F^{(\nu)} = \left(A_{ki} R_{ki} + R_{ki} \int_1^r \frac{V_{ki}(r)}{V_0(r)} dr \right) \cos^{k-1} 4\theta \quad (i, k = \overline{1, 2}) \quad (3.28)$$

откуда получим

$$\begin{aligned} \sigma_{[r]}^{(\nu)} &= \left[A_i \frac{rR_i' - 4R_i}{r^2} + \frac{rR_i' - 4R_i}{r^2} \int_1^r \frac{V_i(r)}{V(r)} dr + \frac{R_i V_i(r)}{rV(r)} \right] \cos 2\theta \\ \sigma_{[\theta]}^{(\nu)} &= \left[A_i R_i'' + R_i'' \int_1^r \frac{V_i(r)}{V(r)} dr + 2R_i' \frac{V_i(r)}{V(r)} - \frac{R_i}{V^2(r)} \left| \frac{V_i(r)}{V_i'(r)} \frac{V(r)}{V'(r)} \right| \right] \cos 2\theta \\ \tau_{[r\theta]}^{(\nu)} &= 2 \left[A_i \frac{rR_i' - R_i}{r^2} + \frac{rR_i' - R_i}{r^2} \int_1^r \frac{V_i(r)}{V(r)} dr + \frac{R_i V_i(r)}{rV(r)} \right] \sin 2\theta \\ \sigma_{[r]}^{(\nu)} &= A_{ki} \left(\frac{R_{ki}'}{r} \cos^{k-1} 4\theta - 16 \frac{R_{ki}}{r^2} (k-1) \cos 4\theta \right) + \\ &+ \left(\frac{R_{ki}'}{r} \cos^{k-1} 4\theta - 16 \frac{R_{ki}}{r^2} (k-1) \cos 4\theta \right) \int_1^r \frac{V_{ki}(r)}{V_0(r)} dr + \\ &+ \left(\frac{R_{ki}}{r} \frac{V_{ki}(r)}{V_0(r)} + \frac{R_{ki}}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\int_1^r \frac{V_{ki}(r)}{V_0(r)} dr \right) \right) \cos^{k-1} 4\theta - \\ &- 8 \frac{R_{ki}}{r^2} (k-1) \sin 4\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\int_1^r \frac{V_{ki}(r)}{V_0(r)} dr \right) \\ \sigma_{[\theta]}^{(\nu)} &= \left(A_{ki} R_{ki}'' + R_{ki}'' \int_1^r \frac{V_{ki}(r)}{V_0(r)} dr + 2R_{ki}' \frac{V_{ki}(r)}{V_0(r)} + R_{ki} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V_{ki}(r)}{V_0(r)} \right) \right) \cos^{k-1} 4\theta \\ \tau_{[r\theta]}^{(\nu)} &= 4 \left(A_{ki} \frac{rR_{ki}' - R_{ki}}{r^2} + \frac{rR_{ki}' - R_{ki}}{r^2} \int_1^r \frac{V_{ki}(r)}{V_0(r)} dr + \frac{R_{ki}}{r} \frac{V_{ki}(r)}{V_0(r)} \right) (k-1) \sin 4\theta - \\ &- \left(\frac{rR_{ki}' - R_{ki}}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\int_1^r \frac{V_{ki}(r)}{V_0(r)} dr \right) + \frac{R_{ki}}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left(\int_1^r \frac{V_{ki}(r)}{V_0(r)} dr \right) \right) \cos^{k-1} 4\theta \end{aligned} \quad (3.30)$$

Здесь V, V_0 – вронскианы систем решений R_i и $R_{ki} \cos^{k-1} 4\theta$, V_i, V_{ki} – определители, полученные из определителей V, V_0 заменой соответствующего столбца столбцом с единственным ненулевым элементом $r^2 f^{(v)}$, расположенным в его конце. Определители V_i, V_{ki} становятся известными, если в функциях $f^{(v)}$ величины $H^{(v)}(K^{(v)})$ определены. Это возможно, если предположить, что величина H зависит только от угловой составляющей δ_θ параметра δ . В этом случае H можно представить в виде $H = H(r, \theta, r_{s0}, \delta_\theta) = H^0 \Sigma \delta^v H^{(v)}(\theta)$, $H^{(0)}(\theta) = 1$ и использовать принятое в задаче распределение (3.18) или (3.19). Аналогично поступаем и с величиной K .

С учетом этого представления функцию $f^{(v)}$ можно разложить в сумму $f^{(v)} = f_1^{(v)} + f_2^{(v)} \cos 4\theta$ соответственно при условии Кулона – Мора и Треска

$$f^{(v)} = \frac{2(\alpha_1 + 1)}{\sigma_{[r]}^0 - \sigma_{[\theta]}^0} \bar{\tau} - \alpha_2(\alpha_1 + 2)H^0 - \left(\frac{2(\alpha_1 + 1)}{\sigma_{[r]}^0 - \sigma_{[\theta]}^0} \bar{\tau} + \alpha_2(\alpha_1 - 4)H^0 \right) \cos 4\theta$$

$$\text{и } f^{(v)} = -\frac{2}{K^0} \bar{\tau} - \frac{3}{2} K^0 + \left(\frac{2}{K^0} \bar{\tau} + \frac{3}{2} K^0 \right) \cos 4\theta, \quad \bar{\tau} = \frac{\tau_{[r\theta]}^{(v)}}{2 \sin 2\theta}$$

Тогда слагаемые в частных производных в выражениях (3.30) записываются более определенно:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\int_1^r \frac{V_{ki}(r)}{V_0(r)} dr \right) = 4 \left((k-1) \frac{\text{tg } 4\theta}{\cos 4\theta} \int_1^r \frac{(-1)^i r^2 f_1^{(v)} \bar{V}_{ki}}{\bar{V}_0} dr + (k-2) \sin 4\theta \int_1^r \frac{(-1)^i r^2 f_2^{(v)} \bar{V}_{ki}}{\bar{V}_0} dr \right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\int_1^r \frac{V_{ki}(r)}{V_0(r)} dr \right) = 16 \left((k-1) \frac{1 + \sin^2 4\theta}{\cos^3 4\theta} \int_1^r \frac{(-1)^i r^2 f_1^{(v)} \bar{V}_{ki}}{\bar{V}_0} dr + \right.$$

$$\left. + (k-2) \cos 4\theta \int_1^r \frac{(-1)^i r^2 f_2^{(v)} \bar{V}_{ki}}{\bar{V}_0} dr \right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left(\int_1^r \frac{V_{ki}(r)}{V_0(r)} dr \right) = 4(-1)^i r^2 \frac{\bar{V}_{ki}}{\bar{V}_0} \left((k-1) \frac{\text{tg } 4\theta}{\cos 4\theta} f_1^{(v)} + (k-2) \sin 4\theta f_2^{(v)} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V_{ki}(r)}{V_0(r)} \right) = (-1)^i \cos^{1-k} 4\theta \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2 f_1^{(v)} \bar{V}_{ki}}{\bar{V}_0} \right) + (-1)^i \cos^{2-k} 4\theta \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2 f_2^{(v)} \bar{V}_{ki}}{\bar{V}_0} \right)$$

где $\bar{V}_0 = \cos^{-2} 4\theta V_0$, $\bar{V}_{ki} = \cos^{k-3} 4\theta V_{ki}$, \bar{V}_{ki} – минор соответствующего определителя \bar{V}_{ki} .

Рассмотрим неоднородную упругую область.

Используя (3.2), (3.3) получим для этой области основное уравнение в напряжениях

$$\begin{aligned} E^2 \nabla^2 (\sigma_{(r)} + \sigma_{(\theta)}) - 2EE'_r \frac{\partial}{\partial r} (\sigma_{(r)} + \sigma_{(\theta)}) - \frac{2}{r^2} EE'_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} (\sigma_{(r)} + \sigma_{(\theta)}) - \\ - \frac{1}{r} \left(EE'_r + \frac{1}{r} EE''_{\theta\theta} - \frac{2}{r} (E'_\theta)^2 \right) (\sigma_{(r)} - \mu \sigma_{(\theta)}) - (EE''_{rr} - 2(E'_r)^2) (\sigma_{(\theta)} - \mu \sigma_{(r)}) + \\ + \frac{2}{r} (1 + \mu) \left(EE''_{r\theta} - \frac{1}{r} EE'_\theta - 2E'_r E'_\theta \right) \tau_{(r\theta)} = 0. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Здесь $E'_r = \partial E / \partial r$, $E'_\theta = \partial E / \partial \theta$, ..., ∇^2 – оператор Лапласа.

Решение, как и в пластической зоне, строится вблизи невозмущенного осесимметричного состояния в виде

$$\sigma_{(ij)} = \sum_0^v \delta^v \sigma_{(ij)}^{(v)}, \quad E = \sum_0^v \delta^v E^{(v)}$$

Линеаризация (3.31) приводит к очень громоздким соотношениям. Дело несколько упрощается, если учесть, что модуль E , как и величина H , зависит только от угловой составляющей δ_θ параметра δ . В этом случае E можно представить в виде $E = E(r, \theta, r_{s0}, \delta_\theta) = E^0 \Sigma \delta^\nu E^{(\nu)}(\theta)$, $E^{(0)}(\theta) = 1$ и использовать принятое в задаче распределение (3.18) или (3.19).

Поступая указанным образом и учитывая $\tau_{(r\theta)}^0 = 0$, $\partial \sigma_{(ij)}^0 / \partial \theta = 0$, получим следующие линеаризированные соотношения:

$$\begin{aligned} & (E^0)^2 \nabla^2 (\sigma_{(r)}^{(\nu)} + \sigma_{(\theta)}^{(\nu)}) - 2E^0 E^{0'} \frac{\partial}{\partial r} (\sigma_{(r)}^{(\nu)} + \sigma_{(\theta)}^{(\nu)}) - \frac{1}{r} E^0 E^{0'} (\sigma_{(r)}^{(\nu)} - \mu \sigma_{(\theta)}^{(\nu)}) - \\ & - (E^0 E^{0''} - 2(E^{0'})^2) (\sigma_{(\theta)}^{(\nu)} - \mu \sigma_{(r)}^{(\nu)}) = \varphi^{(\nu)} \\ & \varphi^{(0)} = 0, \quad \varphi^{(1)} = -\frac{8}{r^2} (E^0)^2 \cos 2\theta (\sigma_{(r)}^{(1)} - \mu \sigma_{(\theta)}^{(1)}) \\ & \varphi^{(2)} = -\frac{8}{r^2} (E^0)^2 \left(\sin 2\theta \frac{\partial}{\partial \theta} (\sigma_{(r)}^{(2)} + \sigma_{(\theta)}^{(2)}) \right) + \cos 2\theta (\sigma_{(r)}^{(2)} - \mu \sigma_{(\theta)}^{(2)}) - \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{8}{r} (1 + \mu) \left(E^0 E^{0'} - \frac{1}{r} (E^0)^2 \right) \sin 2\theta \tau_{(r\theta)}^{(2)} - \frac{8}{r^2} (E^0)^2 ((5 - 2\alpha_1) \cos 4\theta + 1) (\sigma_{(r)}^{(2)} - \mu \sigma_{(\theta)}^{(2)}) \\ & \varphi^{(0)} = 0, \quad \varphi^{(1)} = -\frac{4}{r^2} (E^0)^2 \cos 2\theta (\sigma_{(r)}^{(1)} - \mu \sigma_{(\theta)}^{(1)}) \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} & \varphi^{(2)} = -\frac{4}{r^2} (E^0)^2 \left(\sin 2\theta \frac{\partial}{\partial \theta} (\sigma_{(r)}^{(2)} + \sigma_{(\theta)}^{(2)}) \right) + \cos 2\theta (\sigma_{(r)}^{(2)} - \mu \sigma_{(\theta)}^{(2)}) - \\ & - \frac{4}{r} (1 + \mu) \left(E^0 E^{0'} - \frac{1}{r} (E^0)^2 \right) \sin 2\theta \tau_{(r\theta)}^{(2)} - \frac{2}{r^2} (E^0)^2 (3 \cos 4\theta + 1) (\sigma_{(r)}^{(2)} - \mu \sigma_{(\theta)}^{(2)}) \end{aligned}$$

Здесь правые части $\varphi^{(\nu)}$ линеаризированных соотношений в (3.32) соответствуют условию Кулона – Мора, а в (3.33) – условию Треска.

Задача в неоднородной упругой области сводится к решению неоднородного уравнения в частных производных для функции напряжений $\Phi^{(\nu)}(r, \theta)$, $\nu \geq 1$:

$$(E^0)^2 \nabla^2 \nabla^2 \Phi^{(\nu)} - 2E^0 E^{0'} \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \Phi^{(\nu)} - \frac{1}{r} E^0 E^{0'} L_1 \Phi^{(\nu)} - (E^0 E^{0''} - 2(E^{0'})^2) L_2 \Phi^{(\nu)} = \varphi^{(\nu)}(r, \theta) \quad (3.34)$$

где L_1, L_2 – дифференциальные операторы вида

$$L_1 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \mu \frac{\partial^2}{\partial r^2}, \quad L_2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \mu \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

$\varphi^{(\nu)}(r, \theta)$ – функция с компонентами не выше $(\nu - 1)$ -го приближения.

Представим функцию $\Phi^{(\nu)}$ в виде $\Phi^{(1)} = S(r) \cos 2\theta$, $\Phi^{(2)} = S_1(r) + S_2(r) \cos 4\theta, \dots$ Тогда для определения составляющих $S(\eta) \cos \eta\theta$ получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned} & (E^0)^2 r^4 S^{IV} + 2((E^0)^2 - rE^0 E^{0'}) r^3 S''' - ((2\eta^2 + 1)(E^0)^2 + (2 - \mu)rE^0 E^{0'} + \\ & + r^2(E^0 E^{0''} - 2(E^{0'})^2)) r^2 S'' + ((2\eta^2 + 1)(E^0)^2 + (2\eta^2 + 1)rE^0 E^{0'} + \\ & + \mu r^2(E^0 E^{0''} - 2(E^{0'})^2)) r S' + \eta^2 ((\eta^2 - 4)(E^0)^2 - 3rE^0 E^{0'} - \mu r^2(E^0 E^{0''} - 2(E^{0'})^2)) S = 0 \\ & S' = dS/dr, \quad S'' = d^2S/dr^2, \dots \end{aligned} \quad (3.35)$$

Для составляющего S_1 можно получить уравнение из (3.35), положив в нем $\eta = 0$.

Возможность интегрирования уравнения (3.35) ограничивается классом допустимых функций E^0 . Заметим, что в отличие от (3.25), интегрирование уравнения (3.35) не зависит от принятого условия пластичности.

Рассмотрим функцию (3.8), допускающую прямое интегрирование уравнения (3.35). С учетом этой функции уравнение (3.35) запишется следующим образом

$$r^4 S^{IV} - 2(n-1)r^3 S''' + (n^2 + (\mu-1)n - 2\eta^2 - 1)r^2 S'' - (\mu n^2 + (\mu - 2\eta^2 - 1)n - 2\eta^2 - 1)r S' + \eta^2(\mu n^2 + (\mu - 3)n + \eta^2 - 4)S = 0 \quad (3.36)$$

Для величины μ в уравнении (3.36) имеем промежуток $0 < \mu \leq 1$. (случай плоской деформации), а для параметра нелинейности n в (3.36) следует принять $0 \leq n \leq 1$. Действительно, в случае $n < 0$ пластическое деформирование будет неустойчивым (п. 1), а в случае $n > 1$ функция (3.8) описывает кривые, не наблюдаемые на практике. Тогда при любых значениях μ и n в указанных пределах характеристическое уравнение для (3.36) всегда будет иметь четыре действительных корня, т.е.

$$S(\eta) \cos \eta \theta = B_{\eta j} S_{\eta j} \cos \eta \theta = B_{\eta j} r^{\beta_j} \cos \eta \theta \quad (j = \overline{1,4}) \quad (3.37)$$

где β_j определяется по формуле

$$\beta_j = \frac{1}{2} \left[n + 2 \pm \sqrt{n^2 - 2n(\mu-1) + 4(\eta^2 + 1) \pm 2\sqrt{(\mu^2 - 2(2\eta^2 - 1)\mu + 1)n^2 - 8\eta^2(\mu-1)n + 16\eta^2}} \right] \quad (3.38)$$

Для составляющего S_1 в (3.36)–(3.38) необходимо положить $\eta = 0$.

Рассмотрим функцию (3.11). Подставляя (3.11) в (3.35) получим уравнение

$$r^4 S^{IV} - r^3(b_1 r^n + c_1) S''' + r^2(a_2 r^{2n} + b_2 r^n + c_2) S'' - r(a_3 r^{2n} + b_3 r^n + c_3) S' + (a_4 r^{2n} + b_4 r^n + c_4) S = 0 \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} a_2 &= a^2 n^2, \quad a_3 = \mu a^2 n^2, \quad a_4 = \eta^2 \mu a^2 n^2, \quad b_1 = 2an, \quad b_2 = an(2m - n + \mu - 1) \\ b_3 &= an(2\mu m - \mu n + \mu - 2\eta^2 - 1), \quad b_4 = \eta^2 an(2\mu m - \mu n + \mu - 3), \quad c_1 = 2(m-1) \\ c_2 &= m(m + \mu - 1) - 2\eta^2 - 1, \quad c_3 = m(\mu m + \mu - 2\eta^2 - 1) - 2\eta^2 - 1 \\ c_4 &= \eta^2 m(\mu m + \mu - 3) + \eta^2(\eta^2 - 4) \end{aligned}$$

Решение уравнения (3.39) ищем в виде обобщенного степенного ряда

$$S(r) = \sum_{q=0}^{\infty} d_q r^{p+qn} \quad (3.40)$$

Рекуррентная формула для определения коэффициентов d_q (принято $d_0 = 1$) будет выглядеть следующим образом

$$d_1 = D_0 d_0 / D_1, \quad d_q = (D_{q-1} d_{q-1} - D_{q-2} d_{q-2}) / D_q, \quad q \geq 2 \quad (3.41)$$

$$D_q = (p + qn)(p + qn - 1)(p + qn - 2)(p + qn - 3) - c_1(p + qn)(p + qn - 1)(p + qn - 2) + c_2(p + qn)(p + qn - 1) - c_3(p + qn) + c_4$$

$$D_{q-1} = b_1(p + (q-1)n)(p + (q-1)n - 1)(p + (q-1)n - 2) - b_2(p + (q-1)n)(p + (q-1)n - 1) + b_3(p + (q-1)n) - b_4$$

$$D_{q-2} = a_2(p + (q-2)n)(p + (q-2)n - 1) - a_3(p + (q-2)n) + a_4$$

$$D_1 = (p + n)(p + n - 1)(p + n - 2)(p + n - 3) - c_1(p + n)(p + n - 1)(p + n - 2) + c_2(p + n)(p + n - 1) - c_3(p + n) + c_4$$

$$D_0 = b_1 p(p-1)(p-2) - b_2 p(p-1) + b_3 p - b_4$$

Согласно (3.41), ряд (3.40) сходится по признаку Даламбера при любых значениях $r \leq r_{b0} < \infty$. Параметр p определяется из алгебраического уравнения

$$p^4 - 2(m+2)p^3 + (m^2 + (\mu+5)m - 2(\eta^2 - 2))p^2 - ((\mu+1)m^2 + 2m(\mu - \eta^2 + 1) - 4\eta^2)p + \eta^2(\mu m^2 + (\mu - 3)m + \eta^4 - 4) = 0 \quad (3.42)$$

корни p_j которого

$$p_j = \frac{1}{2} \left[m + 2 \pm \sqrt{m^2 - 2m(\mu - 1) + 4(\eta^2 + 1) \pm 2\sqrt{(\mu^2 - 2(2\eta^2 - 1)\mu + 1)m^2 - 8\eta^2(\mu - 1)m + 16\eta^2}} \right] \quad (3.43)$$

Решение уравнения (3.39) с учетом (3.40)–(3.41) запишется в виде

$$S(\eta) \cos \eta \theta = B_{\eta j} S_{\eta j} \cos \eta \theta = B_{\eta j} \sum_{q=0}^{\infty} d_{qj} r^{p_j + qn} \cos \eta \theta \quad (j = \overline{1, 4}) \quad (3.44)$$

Это решение требует ограничений по параметру m ($\mu > 2\eta^2 - 1 - 2\eta\sqrt{\eta^2 - 1}$):

$$\frac{4\eta(\eta(\mu - 1) + (\mu + 1)\sqrt{\eta^2 - 1})}{(\mu - 2\eta^2 + 1)^2 - 4\eta^2(\eta^2 - 1)} \leq m \leq \frac{4\eta(\eta(\mu - 1) - (\mu + 1)\sqrt{\eta^2 - 1})}{(\mu - 2\eta^2 + 1)^2 - 4\eta^2(\eta^2 - 1)}$$

Так при $\eta = 2$, $\mu = 1$ имеем $m \leq |2,309|$; при $\eta = 4$, $\mu = 1$ имеем $m \leq |2,066|$; при $\eta = 2$, $\mu = 0,5$ имеем $-2,223 \leq m \leq 5,006$; при $\eta = 4$, $\mu = 0,5$ имеем $-2,049 \leq m \leq 4,200$. Значит с ростом параметра η диапазоны возможных значений m сокращаются, а с уменьшением величины μ положительный диапазон возможных значений m расширяется. По параметру n в (3.44) ограничений нет.

Для составляющего S_1 в (3.39)–(3.44) необходимо положить $\eta = 0$. Параметр m в этом случае не ограничивается.

Решение уравнения (3.34) принимает вид для $\nu = 1, 2$;

$$\Phi^{(\nu)} = \left(B_j S_j + S_j \int_{r_{s0}}^r \frac{W_j(r)}{W(r)} dr \right) \cos 2\theta, \quad \Phi^{(\nu)} = \left(B_{kj} S_{kj} + S_{kj} \int_{r_{s0}}^r \frac{W_{kj}(r)}{W_0(r)} dr \right) \cos^{k-1} 4\theta \quad (j = \overline{1, 4}, \quad k = \overline{1, 2}) \quad (3.45)$$

Здесь W , W_0 – вронскианы систем решений S_j и $S_{kj} \cos^{k-1} 4\theta$, а W_j , W_{kj} – определители, полученные из определителей W , W_0 заменой соответствующего столбца столбцом с единственным ненулевым элементом $r^4 \varphi^{(\nu)}$, расположенным в его конце. Компоненты тензора напряжений находятся по формулам, вполне аналогичным формулам (3.29) и (3.30).

Во внешней однородной области имеем бигармоническое уравнение относительно функции напряжений $\overline{\Phi}^{(\nu)}(r, \theta)$:

$$\nabla^2 (\sigma_{(r)}^{(\nu)} + \sigma_{(\theta)}^{(\nu)}) = \nabla^2 \nabla^2 \overline{\Phi}^{(\nu)} = 0 \quad (3.46)$$

Уравнение (3.46) линейно относительно $\overline{\Phi}^{(\nu)}$, поэтому оно справедливо для любых $\nu \geq 1$.

Функцию $\overline{\Phi}^{(\nu)}$ устанавливаем на основании геометрических условий на границе r_b . Поскольку граница r_b принимает сходное с упругопластической границей r_s очертание, функцию $\overline{\Phi}^{(\nu)}$ принимаем в виде, аналогичном представлению $F^{(\nu)}$, $\Phi^{(\nu)}$ во внутренних областях.

Для составляющих $\bar{S}(\eta)\cos\eta\theta$ в этой области имеем следующее представление [10]:

$$\bar{S}(\eta)\cos\eta\theta = (C_{\eta 1}r^\eta + C_{\eta 2}r^{-\eta} + C_{\eta 3}r^{\eta+2} + C_{\eta 4}r^{-\eta+2})\cos\eta\theta, \quad \eta > 1 \quad (3.47)$$

Составляющее \bar{S}_1 может быть представлено в виде

$$\bar{S}_1 = C_{11}\ln r + C_{12}r^2\ln r + C_{13}r^2 + C_{14} \quad (3.48)$$

Решение уравнения (3.46) принимает вид для $\nu = 1, 2$:

$$\bar{\Phi}^{(\nu)} = C_j\bar{S}_j\cos 2\theta, \quad \bar{\Phi}^{(\nu)} = C_{1j}\bar{S}_{1j} + C_{2j}\bar{S}_{2j}\cos 4\theta \quad (j = \overline{1, 4}) \quad (3.49)$$

откуда находятся компоненты тензора напряжений.

4. Определим напряженное состояние неоднородного тела вокруг отверстия по заданным граничным условиям и условиям сопряжения напряжений.

Ограничимся случаем $\nu = 1$. Случаи $\nu > 1$ определяются подобным образом.

Определим сначала постоянные A_1, A_2 .

Линеаризированные условия на контуре отверстия имеют вид

$$\sigma_{[r]}^{(\nu)} = 0, \quad \sigma_{[\theta]}^{(\nu)} = 0 \quad (3.50)$$

Используя (3.29), (3.50) найдем:

$$A_1 = \frac{R_2(1)(R_k(1)V_k(1))}{V^2(1)}, \quad A_2 = -\frac{R_1(1)(R_k(1)V_k(1))}{V^2(1)} \quad (k = \overline{1, 2})$$

В рассматриваемой задаче внутренний контур и внешние нагрузки на нем осесимметричны, тем не менее напряженное состояние в пластической зоне не является таковым вследствие неосесимметричности неоднородности в этой зоне.

Определим постоянные B_j, C_j .

Граничные условия на бесконечности принимают вид

$$\sigma_{(\epsilon)}^{(\nu)\infty} = -\cos 2\theta, \quad \tau_{(\epsilon\theta)}^{(\nu)\infty} = \sin 2\theta \quad (3.51)$$

Используя (3.51) сразу получим: $C_1 = 1/2, C_3 = 0$.

Для определения остальных коэффициентов понадобятся линеаризированные условия сопряжения

$$[\sigma_r^{(\nu)}] = [\tau_{r\theta}^{(\nu)}] = 0, \quad \left[\sigma_\theta^{(\nu)} + \frac{d\sigma_\theta^\circ}{dr} r_{s1} \right] = 0 \quad \text{на } r_{s0} \quad (3.52)$$

$$[\sigma_r^{(\nu)}] = [\tau_{r\theta}^{(\nu)}] = 0, \quad \left[\sigma_\theta^{(\nu)} + \frac{d\sigma_\theta^\circ}{dr} r_{b1} \right] = 0 \quad \text{на } r_{b0}$$

где r_{sv}, r_{sb} подчиняются распределению (3.18) или (3.19).

Коэффициенты B_j , согласно (3.29), (3.52), могут быть определены следующим образом: $B_j = U_j / U$ ($j = \overline{1, 4}$), где U – определитель 4-го порядка, состоящий из элементов ($j = \overline{1, 4}$):

$$U_{1j} = \frac{3\check{S}'_j + r_{b0}\check{S}''_j}{r_{b0}}, \quad U_{2j} = \frac{r_{s0}\check{S}'_j - 4\check{S}_j}{r_{s0}^2}, \quad U_{3j} = \frac{r_{s0}\check{S}'_j - \check{S}_j}{r_{s0}^2}, \quad U_{4j} = \check{S}''_j$$

а U_j – определитель, полученный из U заменой j -го столбца столбцом "свободных коэффициентов":

$$\left(\begin{aligned} & -\frac{3\check{S}'_j + r_{b0}\check{S}''_j}{r_{b0}} \int_{r_{s0}}^{r_{b0}} \frac{W_j(r)}{W(r)} dr - \frac{(3\check{S}_j + 2r_{b0}\check{S}'_j)W_j(r_{b0})}{r_{b0}W(r_{b0})} + \frac{\check{S}_j}{W^2(r_{b0})} \left| \begin{array}{cc} W_j(r_{b0}) & W(r_{b0}) \\ W'_j(r_{b0}) & W'(r_{b0}) \end{array} \right| + D_b \\ & -\frac{\check{S}_j W_j(r_{s0})}{r_{s0}W(r_{s0})} + \frac{(-1)^{i+1} \hat{R}_{3-i}(\hat{R}_k V_k(1))}{V^2(1)} \left(\frac{r_{s0}\check{R}'_i - 4\check{R}_i}{r_{s0}^2} \right) + \left(\frac{r_{s0}\check{R}'_i - 4\check{R}_i}{r_{s0}^2} \right) \int_1^{r_{s0}} \frac{V_i(r)}{V(r)} dr + \frac{\check{R}_i V_i(r_{s0})}{r_{s0}V(r_{s0})} \\ & -\frac{\check{S}_j W_j(r_{s0})}{r_{s0}W(r_{s0})} + \frac{(-1)^{i+1} \hat{R}_{3-i}(\hat{R}_k V_k(1))}{V^2(1)} \left(\frac{r_{s0}\check{R}'_i - \check{R}_i}{r_{s0}^2} \right) + \left(\frac{r_{s0}\check{R}'_i - \check{R}_i}{r_{s0}^2} \right) \int_1^{r_{s0}} \frac{V_i(r)}{V(r)} dr + \frac{\check{R}_i V_i(r_{s0})}{r_{s0}V(r_{s0})} \\ & -2\check{S}'_j \frac{W_j(r_{s0})}{W(r_{s0})} + \frac{\check{S}_j}{W^2(r_{s0})} \left| \begin{array}{cc} W_j(r_{s0}) & W(r_{s0}) \\ W'_j(r_{s0}) & W'(r_{s0}) \end{array} \right| + \frac{(-1)^{i+1} \hat{R}_{3-i}(\hat{R}_k V_k(1))}{V^2(1)} \check{R}'_i + \check{R}''_i \int_1^{r_{s0}} \frac{V_i(r)}{V(r)} dr + \\ & + 2\check{R}'_i \frac{V_i(r_{s0})}{V(r_{s0})} - \frac{\check{R}_i}{V^2(r_{s0})} \left| \begin{array}{cc} V_i(r_{s0}) & V(r_{s0}) \\ V'_i(r_{s0}) & V'(r_{s0}) \end{array} \right| + D_s \end{aligned} \right)$$

$$\hat{R}_i = R_i(1); \quad \check{R}_i = R_i(r_{s0}); \quad \check{S}_j = S_j(r_{s0}); \quad \check{S}_j = S_j(r_{b0}) \quad (i = \overline{1,2}; \quad j = \overline{1,4}; \quad k = \overline{1,2})$$

$$D_b = 2(r_{b0}^{-1} B_i^\circ (\check{S}_i^\circ - r_{b0} \check{S}'_i - r_{b0}^2 \check{S}''_i))$$

$$D_s = 2(\alpha_1 \alpha_2 D^\circ + \alpha_2 (\alpha_1 H^\circ + r_{s0} H^\circ) - B_i^\circ r_{s0} \check{S}''_i)$$

Оставшиеся коэффициенты C_2 и C_4 находятся через B_j :

$$C_2 = \frac{r_{b0}^4}{2} \left(1 - B_j \frac{\check{S}'_j}{r_{b0}} - \frac{\check{S}_j}{r_{b0}} \int_{r_{s0}}^{r_{b0}} \frac{W_j(r)}{W(r)} dr - \frac{\check{S}_j W_j(r_{b0})}{r_{b0} W(r_{b0})} \right)$$

$$C_4 = \frac{r_{b0}^2}{2} \left(B_j \frac{r_{b0} \check{S}'_j + 2\check{S}_j}{r_{b0}^2} + \frac{r_{b0} \check{S}'_j + 2\check{S}_j}{r_{b0}^2} \int_{r_{s0}}^{r_{b0}} \frac{W_j(r)}{W(r)} dr + \frac{\check{S}_j W_j(r_{b0})}{r_{b0} W(r_{b0})} - 2 \right)$$

Коэффициенты B_j, C_j найдены в предположении непрерывности прочностных свойств на упругопластической границе ($H^* = H$). Решение допускает и такой вариант: $H^*(r) \neq H(r), H^*(\theta) = H(\theta)$. В этом случае линеаризированные условия на r_{s0} принимают несколько иной вид

$$\left[\sigma_r^{(')} + \frac{d\sigma_r}{dr} r_{s1} \right] = 0, \quad [\tau_{r\theta}^{(')}] = 0, \quad \sigma_{(\theta)}^{(')} - \alpha_1 \sigma_{(r)}^{(')} = \alpha_2 H^{(')}$$

Тогда определитель U будет иметь вместо $U_{4j} = \check{S}'_j$ ряд

$$U_{4j} = [r_{s0}^2 \check{S}'_j - \alpha_1 (r_{s0} \check{S}'_j - 4\check{S}_j)] / r_{s0}^2.$$

В определителе U_j первый и третий элементы столбца "свободных коэффициентов" сохраняются, но слагаемое D_b приобретает вид

$$D_b^* = \frac{(P + H^\circ)(\alpha_2 H^\circ - 2)}{(H^{*\circ} - H^\circ)(1 - \alpha_1)} D_b$$

у второго элемента появляется дополнительное слагаемое \bar{D}_s^* , равное

$$\bar{D}_s^* = \frac{2(P + H^\circ)(\alpha_2 H^\circ - 2)}{(H^\circ - H^{*\circ})\alpha_2} [\alpha_2 D^\circ + \alpha_2 H^\circ - B_i^\circ (\check{S}_i^\circ - r_{s0}^{-1} \check{S}_i^\circ)]$$

а четвертый элемент столбца записывается в виде

$$\frac{2(P + H^\circ)(\alpha_2 H^\circ - 2)}{(H^\circ - H^{*\circ})\alpha_2} \alpha_2 H^\circ - (2\check{S}'_j r_{s0} - \alpha_1 \check{S}_j) \frac{W_j(r_{s0})}{r_{s0} W(r_{s0})} + \frac{\check{S}_j}{W^2(r_{s0})} \left| \begin{array}{cc} W_j(r_{s0}) & W(r_{s0}) \\ W'_j(r_{s0}) & W'(r_{s0}) \end{array} \right|$$

Следует также учесть, что r_{s0} определяется из (17), а функции $f^{*(\prime)}$ и $\varphi^{*(\prime)}$ записываются следующим образом:

$$f^{*(\prime)} = \frac{(P + H^{\circ})(\alpha_2 H^{\circ} - 2)}{(H^{\circ} - H^{*\circ})\alpha_2} f^{(\prime)}, \quad \varphi^{*(\prime)} = \frac{(P + H^{\circ})(\alpha_2 H^{\circ} - 2)}{(H^{\circ} - H^{*\circ})\alpha_2} \varphi^{(\prime)}$$

При условии Треска всюду необходимо принять $\alpha_1 = 1$, $H^{\circ} = K^{\circ} \operatorname{ctg} \rho$. Кроме того, в выражениях для D_b , D_s будет отсутствовать множитель 2.

Расчеты показывают, что для достаточно малых значений δ обеспечивается хорошая сходимость решения.

Итак, решение задачи получено. Согласно второму и третьему пункту приведенного решения, при любых r_{s0} δ упругопластические границы неоднородного тела и соответствующего ему однородного тела должны иметь одинаковые очертания. В действительности же степень чувствительности неоднородного тела к виду напряженного состояния напрямую зависит от размеров пластической зоны.

Возможности реагирования неоднородного тела на изменение вида напряженного состояния невелики, если пластическая зона имеет небольшие размеры по сравнению с размерами самого отверстия. В сравнительно небольшой пластической зоне неоднородность существенно подчинена геометрии отверстия и оставляет упругопластической границе мало места для адекватного реагирования. Значит, независимо от граничных условий пластическая зона начнет развиваться сразу по всему контуру отверстия¹.

Т.о. параметр неосесимметричности напряженного состояния δ в полученном решении будет состоять в зависимости от уровня напряженного состояния. Эта зависимость определяется как $\delta = \delta(r_{s0})$. Очевидно, что зависимость $\delta(r_{s0})$ является монотонно возрастающей от нуля на контуре отверстия до максимума на границе r_{b0} . Тогда ее можно представить в виде локальной функции

$$\delta = \delta_{\max} g(r_{s0}) \quad (3.53)$$

где δ_{\max} равно значению, которое имеет соответствующее однородное тело, $g(r_{s0})$ – некоторое ядро со свойствами $g(1) = 0$, $g(r_{b0}) = 1$.

Из (3.53) следует, что неоднородное и однородное тело могут иметь подобные упругопластические границы только при $r_{s0} \geq r_{b0}$.

В рассматриваемом варианте тела, зависящем от параметра δ_{θ} изолинии механических свойств, как и граница раздела областей, изменяют в процессе нагружения только свою конфигурацию. Поскольку в задаче принято $r_{sv}(\theta) = r_{bv}(\theta)$, зависимость $r_b = f_0(r_s)$ между поведением границ будет определяться только зависимостью параметров $\delta_{\theta b} = f_0(\delta_{\theta s})$.

Ядро $g(r_{s0})$ и функция $f_0(\delta_{\theta s})$ устанавливаются исходя из дополнительных условий. Решение будет физически корректным, если $\delta \approx \delta_{\max}$. Это обеспечивается, например, при логарифмическом ядре $g(r_{s0}) = \log_{r_{b0} r_{s0}}$ (зависимость $\delta(r_{s0})$ должна быть выпуклой) и достаточном удалении упругопластической границы от отверстия ($1 \ll r_{s0} < r_{b0}$). Оптимальное нагружение тела является пропорциональным, следовательно функция $f_0(\delta_{\theta s}) = (r_{b0}/r_{s0})(\delta_{\theta s}) f_0(r_{s0})$.

¹ Можно объяснить это иначе. В неоднородном теле пластическая зона может развиваться только по изолиниям прочностных свойств, а в рассматриваемом случае все они замкнуты вокруг отверстия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Галин Л.А.* Плоская упругопластическая задача // ПММ. 1946. Т. 10. Вып. 3. С. 367–386.
2. *Черепанов Г.П.* Об одном методе решения упругопластической задачи // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 3. С. 428–435.
3. *Аннин Б.Д.* Одна плоская упруго-пластическая задача при экспоненциальном условии текучести // Инж. ж. МТТ. 1966. № 3. С. 122–123.
4. *Аннин Б.Д., Черепанов Г.П.* Упругопластическая задача. Новосибирск: Наука, 1983. 239 с.
5. *Кузнецов А.И.* Плоская деформация неоднородных пластических тел // Вестник ЛГУ. Сер. мат. мех., 1958. № 3. Вып. 3. С. 112–131.
6. *Алимжанов М.Т.* Упругопластическая задача, учитывающая неоднородность механических свойств материала // Докл. АН СССР. 1978. Т. 242. № 6. С. 1281–1284.
7. *Захарова Т.Л., Ивлев Д.Д.* Приближенное решение плоских задач для идеальных упругопластических неоднородных тел // Изв. ИТА ЧР. 1995. № 1. С. 27–38.
8. *Колчин Г.Б.* Плоские задачи теории упругости неоднородных тел. Кишинев: Штиинца, 1977. 119 с.
9. *Ивлев Д.Д., Ершов Л.В.* Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978. 208 с.
10. *Бицено К.Б., Граммель Р.* Техническая динамика. М.: Гостехтеориздат, 1950. Т. 1. 900 с.

Алма-Ата

Поступила в редакцию
26.VI.1996