

УДК 539.3

© 1998 г. М.Я. ПАНОВКО

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
 ТОЧЕЧНОГО УПРУГОГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО КОНТАКТА
 ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ НАГРУЖЕНИИ**

Излагаются методика и результаты численного моделирования точечного упругогидро-динамического (УГД) контакта применительно к нестационарным условиям тяжелого нагружения, при которых, как правило, функционируют такие узлы трения, как подшипники качения и зубчатые передачи. Показаны особенности распределений давления и толщины смазочной пленки под действием внешней нагрузки, изменяющейся во времени по гармоническому закону.

Математическая модель УГД контакта описывается нестационарной, нелинейной интегродифференциальной системой уравнений Рейнольдса, теории упругости, начально-краевыми условиями и условием равенства внешней нагрузки интегралу от давления по области контакта. Численный метод основан на алгоритме Ньютона для решения нелинейной системы уравнений, описывающей УГД контакт, конечно-разностной аппроксимации линеаризованных уравнений и условиях дополненности [1, 2] для определения местоположения свободной границы, отделяющей область положительного давления от области кавитации. Для решения нестационарных уравнений применялась неявная схема.

Ранее в [1] точечный УГД контакт изучался на основе конечно-элементной схемы расчета для случая, когда нестационарная внешняя нагрузка соответствовала условиям легкого или умеренного нагружения.

1. Постановка задачи. Рассматривается нестационарная изотермическая задача о сосредоточенном тяжело нагруженном упругогидродинамическую (УГД) контакте. Полагается, что подобный контакт реализуется при качении со скольжением упругого эллипсоида по гладкой поверхности упругого полупространства, при этом контактирующие тела разделены слоем смазки со свойствами несжимаемой вязкой жидкости. Внешняя нагрузка задается изменяющейся со временем. В задаче используются типичные допущения УГД теории смазки [3, 4]. Введем безразмерные переменные

$$(x', y') = \frac{(x, y)}{a_H}, \quad t' = \frac{t}{t_0}, \quad Z = \frac{2a_H}{(|v_1 + v_2|)t_0}, \quad p' = \frac{p}{p_H}, \quad h' = \frac{h}{h_0(t)}, \quad \mu' = \frac{\mu}{\mu_0}$$

$$H_0(t) = \frac{2R'_x h_0(t)}{a_H^2}, \quad \varepsilon = \frac{R'_x}{R'_y}, \quad \beta = \frac{a_H}{b_H}, \quad \varphi(\beta) = \frac{K(e) - D}{\beta^4 D}$$

$$D = \frac{K(e) - E(e)}{e^2}, \quad e = \sqrt{1 - \beta^2}, \quad V = \frac{24\mu_0 |v_1 + v_2| R_x'^2}{\rho_H a_H^3}, \quad P' = \frac{3\beta P(t)}{2\pi \rho_H a_H^2}$$

$$v = \frac{v_1 + v_2}{|v_1 + v_2|}, \quad v_x = \frac{v_{1x} + v_{2x}}{|v_1 + v_2|}, \quad v_y = \frac{v_{1y} + v_{2y}}{|v_1 + v_2|}$$

где x, y – декартовы координаты в плоскости контакта; R'_x, R'_y – приведенные радиусы кривизны контактирующих тел; p – давление в смазочной пленке; a_H и b_H –

полуоси герцевского эллипса контакта; t – время; t_0 – характерное время процесса; $P(t)$ – внешняя нагрузка; Z – параметр, характеризующий скорость сближения контактирующих тел; e – эксцентриситет эллипса контакта; p_H – максимальное герцевское напряжение; h – толщина смазочной пленки; h_0 – толщина смазочной пленки в начале координат; μ – вязкость смазки; μ_0 – вязкость смазки при $p = 0$; $v_1(v_{1x}, v_{1y}), v_2(v_{2x}, v_{2y})$ – векторы и компоненты скоростей контактирующих поверхностей; H_0 – безразмерная толщина пленки в начале координат; V – нагрузочно-скоростной параметр; $K(e)$ и $E(e)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода; постоянная β определяется из уравнения $\beta^2 \phi(\beta) = R_1'' / R_2'$.

Уравнения рассматриваемой УГД задачи имеют в безразмерных переменных следующий вид

$$L(p) = \nabla \cdot \left(H_0^2 \frac{h^3}{\mu} \nabla p - V v h \right) - V Z \frac{\partial h}{\partial t} - V Z \frac{h}{H_0} \frac{\partial H_0}{\partial t} = 0 \quad (1.1)$$

$$h(x, y, t) = 1 + \frac{x^2 + \varepsilon y^2}{H_0(t)} + \frac{\varepsilon}{\pi \beta^2 D H_0(t)} \iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta) p(\xi, \eta, t) d\xi d\eta \quad (1.2)$$

$$\iint_{\Omega} p(\xi, \eta, t) d\xi d\eta = \frac{2\pi}{3\beta} P(t) \quad (1.3)$$

$$p(x, y, 0) = p^0(x, y), \quad H_0(0) = H_0^0, \quad p|_C = 0 \quad (1.4)$$

$$\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y), \quad v = (v_x, v_y)$$

$$G(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}$$

где C – граница области контакта Ω ; $G(x, y, \xi, \eta)$ – функция влияния; $p^0(x, y)$, H_0^0 – численное решение стационарной задачи.

Система (1.1)–(1.4) является нелинейной интегродифференциальной системой, состоящей из уравнения Рейнольдса (1.1), соотношения для толщины смазочной пленки между упругими телами (1.2), условия равенства внешней нагрузки интегралу от давления по области контакта (1.3), начально-краевых условий для давления и толщины смазочной пленки в центре контакта (1.4).

Из соотношения (1.2) после дифференцирования по t следует

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{h-1}{H_0} \frac{\partial H_0}{\partial t} + \frac{\varepsilon}{\pi \beta^2 D H_0} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta) p(\xi, \eta, t) d\xi d\eta \quad (1.5)$$

С учетом (1.5) уравнение (1.1) примет следующий вид

$$L(p) = \nabla \cdot \left(H_0^3 \frac{h^3}{\mu} \nabla p - H_0 V v h \right) - V Z \frac{\partial H_0}{\partial t} - V Z \frac{\varepsilon}{\pi \beta^2 D} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta) p(\xi, \eta, t) d\xi d\eta = 0 \quad (1.6)$$

Для определения местоположения выходной (свободной) границы, отделяющей зону смазки от зоны кавитации, используются условия дополненности [1, 2], согласно которым

$$L(p) = 0, \quad p > 0; \quad L(p) < 0, \quad p = 0 \quad (1.7)$$

Обоснованность применения этих условий при решении различных УГД задач подробно обсуждена в [1, 2].

В системе уравнений (1.1)–(1.4) заданными считаются геометрия входной границы смазочной пленки, нагрузочно-скоростной параметр V (для тяжело нагруженного контакта $V \ll 1$), компоненты вектора скорости $\mathbf{v}(v_x, v_y)$, параметр $\varepsilon = R'_x / R'_y$ и зависимость $\mu(p)$. В расчетах использовалась предложенная Барусом зависимость

$$\mu = \mu_0 \exp(Qp) \quad (1.8)$$

где Q – пьезокэффициент вязкости.

Решением системы (1.1)–(1.8) являются распределения давления $p(x, y, t)$, толщины смазочной пленки $h(x, y, t)$, выходная граница $x_e(y, t)$, отделяющая область положительного давления от области кавитации, и безразмерная толщина слоя смазки в начале координат $H_0(t)$.

2. Численный метод решения. Исследуемая область контакта в плоскости (x, y) задается в виде прямоугольника $\Omega = (x_1 \leq x \leq x_2) \times (y_1 \leq y \leq y_2)$. Заменой переменных $x(x^*), y(y^*)$ вводится неравномерная декартова сетка со сгущением внутри области Ω . Вычислительная область Ω^* , на которую отображается Ω , покрывается в плоскости (x^*, y^*) равномерной разнесенной сеткой: в направлении осей x^* и y^* вводятся соответственно следующие системы узлов:

$$x_i^* (i = 0, \dots, NX + 1), \quad x_{i-1/2}^* = (x_i^* + x_{i-1}^*) / 2 (i = 1, \dots, NX + 1)$$

$$y_j^* (j = 0, \dots, NY + 1), \quad y_{j-1/2}^* = (y_j^* + y_{j-1}^*) / 2 (j = 1, \dots, NY + 1)$$

Давление определяется в узлах (x_i^*, y_j^*) , а толщина смазочной пленки – в узлах $(x_{i-1/2}^*, y_{j-1/2}^*)$. Согласно отображению $x(x^*), y(y^*)$ в области Ω неравномерной сетке соответствуют системы узлов $(x_i, y_j), (x_{i-1/2}, y_{j-1/2})$.

После интегрирования уравнения (1.6) по области $\Delta\Omega_{ij}$, занимаемой расчетной ячейкой (i, j) внутри контура (l) , получаем

$$L_1(p) = \int_{(l)} \left[H_0^3 \frac{h^3}{\mu} (\nabla p \cdot \mathbf{n}) - H_0 V (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) h \right] dl - \\ - VZ \left[\frac{\partial H_0}{\partial t} + \frac{\varepsilon}{\pi \beta^2 D} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta) p(\xi, \eta, t) d\xi d\eta \right] \Delta\Omega_{ij} = 0 \quad (2.1)$$

где \mathbf{n} – единичный вектор внешней нормали. В условиях дополненности (см. (1.7)) оператор $L(p)$ заменяется на $L_1(p)$.

Решение нестационарной УГД системы уравнений проводится методом Ньютона с использованием неявной схемы. Линеаризованные на временном шаге $n + 1$ около решения $(p(x, y, t_{n+1}), H_0(t_{n+1}))_k^{n+1}$ уравнения (2.1), (1.3), (1.4) имеют вид

$$\int_{(l)} \left\{ \left[3H_0^2 \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial n} - H_0 V (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \frac{\partial h}{\partial H_0} + H_0^3 \frac{3h^2}{\mu} \frac{\partial p}{\partial n} \frac{\partial h}{\partial H_0} - V (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) h \right]_k \Delta H_{0,k+1}^{n+1} - \right. \\ \left. - \left(H_0^3 \frac{h^3}{\mu^2} \frac{\partial \mu}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial n} \right)_k^{n+1} \Delta p_{k+1}^{n+1} + \left(H_0^3 \frac{3h^2}{\mu} \frac{\partial p}{\partial n} \frac{\partial h}{\partial p} \right)_k^{n+1} \Delta p_{k+1}^{n+1} + \left(H_0^3 \frac{h^3}{\mu} \right)_k^{n+1} \frac{\partial \Delta p_{k+1}^{n+1}}{\partial n} - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \left[H_0 V(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \frac{\partial h}{\partial p} \right]_k^{n+1} \Delta p_{k+1}^{n+1} \left\{ dl - VZ \left[\Delta H_{0,k+1}^{n+1} + \frac{\varepsilon}{\pi \beta^2 D} \iint_{\Omega_k^{n+1}} G \Delta p_{k+1}^{n+1} d\xi d\eta \right] \frac{\Delta \Omega_{ij}}{\Delta t} = \right. \\
& = - \int_{(l)} \left\{ \left(H_0^3 \frac{\hbar^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial n} \right)_k^{n+1} - [H_0 V(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) h]_k^{n+1} \right\} dl + \\
& + VZ \left[(H_{0,k}^{n+1} - H_0^n) + \frac{\varepsilon}{\pi \beta^2 D} \left(\iint_{\Omega_k^{n+1}} G p_k^{n+1} d\xi d\eta - \iint_{\Omega^n} G p^n d\xi d\eta \right) \right] \frac{\Delta \Omega_{ij}}{\Delta t} \quad (2.2)
\end{aligned}$$

$$\iint_{\Omega_k^{n+1}} \Delta p_{k+1}^{n+1}(\xi, \eta, t_{n+1}) d\xi d\eta = \frac{2\pi}{3\beta} P(t_{n+1}) - \iint_{\Omega_k^{n+1}} p_k^{n+1}(\xi, \eta, t_{n+1}) d\xi d\eta \quad (2.3)$$

$$\Delta p_{k+1}^{n+1} \Big|_C = 0 \quad (2.4)$$

В уравнениях (2.2)–(2.4) n – номер шага по времени, k – номер итерации на текущем временном шаге, $\Delta p_{k+1}^{n+1} = p_{k+1}^{n+1} - p_k^{n+1}$, $\Delta H_{k+1}^{n+1} = H_{k+1}^{n+1} - H_k^{n+1}$, $\partial h / \partial H_0$ – частная производная от h по H_0 , вычисляемая по соотношению (1.2); $\partial \mu / \partial p$ – частная производная от μ по p , вычисляемая по соотношению (1.8); $\partial h / \partial p$ – линейный оператор, представляющий собой производную h_k^{n+1} по p_k^{n+1} (производная Фреше) и действующий на Δp_{k+1}^{n+1} , имеет вид

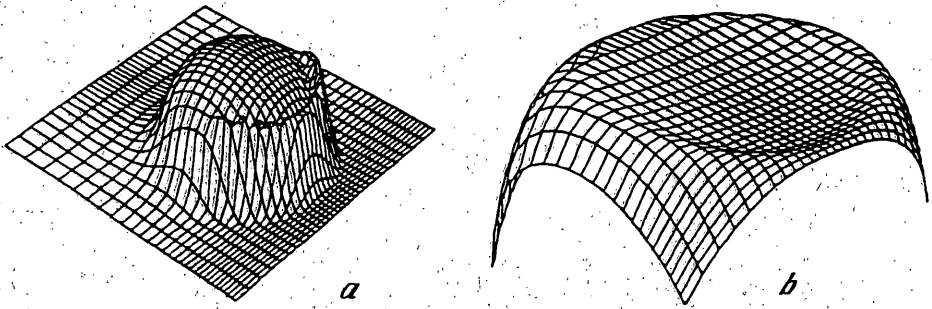
$$\left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_k^{n+1} \Delta p_{k+1}^{n+1} = \frac{\varepsilon}{\pi \beta^2 D H_{0,k}^{n+1}} \iint_{\Omega_k^{n+1}} G(x, y, \xi, \eta) \Delta p_{k+1}^{n+1}(x, y, t_{n+1}) d\xi d\eta \quad (2.5)$$

Система (2.2)–(2.4) является исходной для построения конечноразностной схемы. Интеграл в выражениях (1.2), (2.5) вычислялся по кубатурной формуле, применяемой при вычислении сингулярных интегралов [5]:

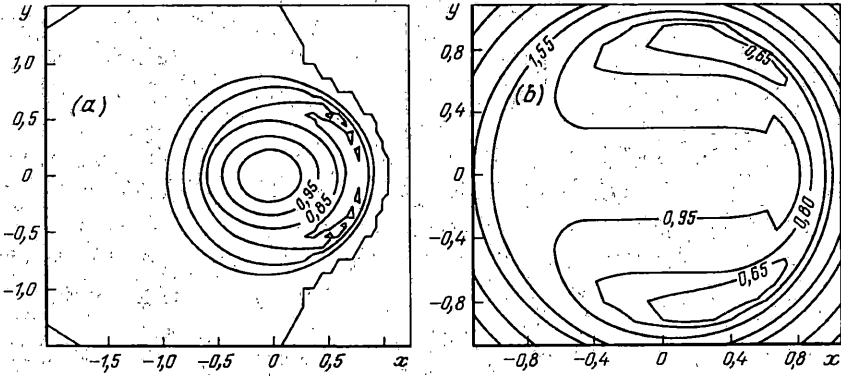
$$\begin{aligned}
& \iint_{\Omega} \left(\frac{1}{\sqrt{(\xi - x_{m-1/2})^2 + (\eta - y_{n-1/2})^2}} - \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \right) p(\xi, \eta, t) d\xi d\eta \equiv \\
& \equiv \sum_{j=1}^{NY} \sum_{i=i1(j)}^{i2(j)} \left(\frac{1}{\sqrt{(x_i - x_{m-1/2})^2 + (y_j - y_{n-1/2})^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x_i - x_{m0-1/2})^2 + (y_j - y_{n0-1/2})^2}} \right) \times \\
& \times p(x_i, y_j, t_{n+1}) (x_{i+1/2} - x_{i-1/2}) (y_{j+1/2} - y_{j-1/2}) \quad (2.6)
\end{aligned}$$

где $i1(j)$, $i2(j)$ – целочисленные массивы, описывающие расположение соответственно входной и выходной границ: $m = 1, \dots, NX + 1$; $n = 1, \dots, NY + 1$. Массив $i2(j)$ определяется, исходя из условий дополнителности (1.7), на каждой итерации. Узел $(m0-1/2, n0-1/2)$ соответствует началу координат.

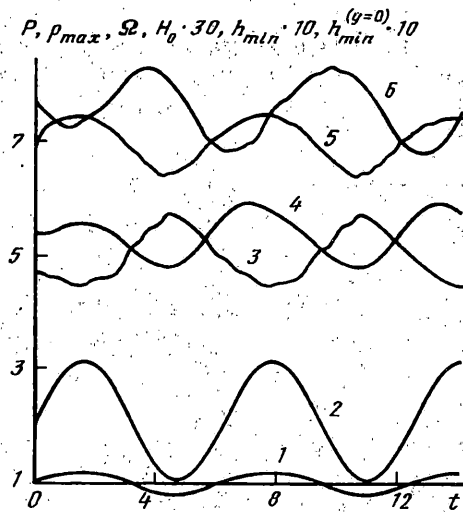
На временном шаге $n + 1$ одна итерация по методу Ньютона состоит в решении конечно-разностного аналога уравнений (2.2)–(2.4) относительно Δp_{k+1}^{n+1} , $\Delta H_{0,k+1}^{n+1}$ методом гауссова исключения с частичным выбором ведущего элемента. После этого восстанавливаются значения $H_{0,k+1}^{n+1} = H_{0,k}^{n+1} + \Delta H_{0,k+1}^{n+1}$, $p_{k+1}^{n+1} = p_k^{n+1} + \Delta p_{k+1}^{n+1}$ и с учетом кубатурной формулы (2.6) вычисляется $h_{k+1}^{n+1}(x_{i-1/2}, y_{j-1/2})$. Затем определяется вы-



Фиг. 1

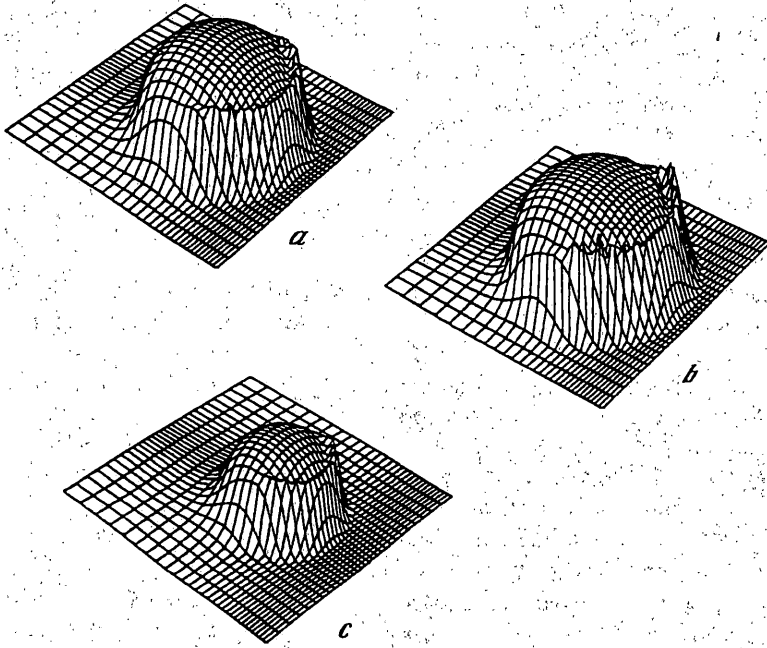


Фиг. 2

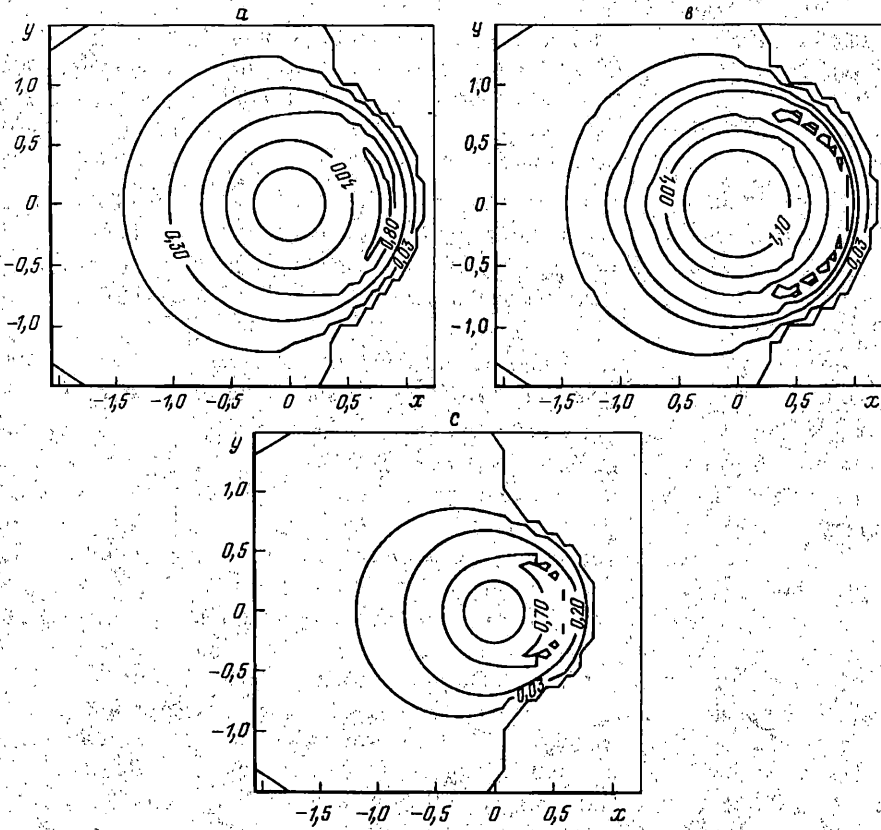


Фиг. 3

ходная граница согласно условиям дополнителности. Итерационный процесс продолжается до достижения требуемой относительной точности решения δ , т.е. $\max(|H_{0,k+1}^{n+1}/H_{0,k}^{n+1} - 1|, |P_{k+1}^{n+1}/P_k^{n+1} - 1|, |h_{k+1}^{n+1}/h_k^{n+1} - 1|, |x_{e,k+1}^{n+1}/x_{e,k}^{n+1} - 1|) < \delta$. После выполнения заданных условий по точности решения, осуществляется переход на новый шаг по времени.



Фиг. 4



Фиг. 5

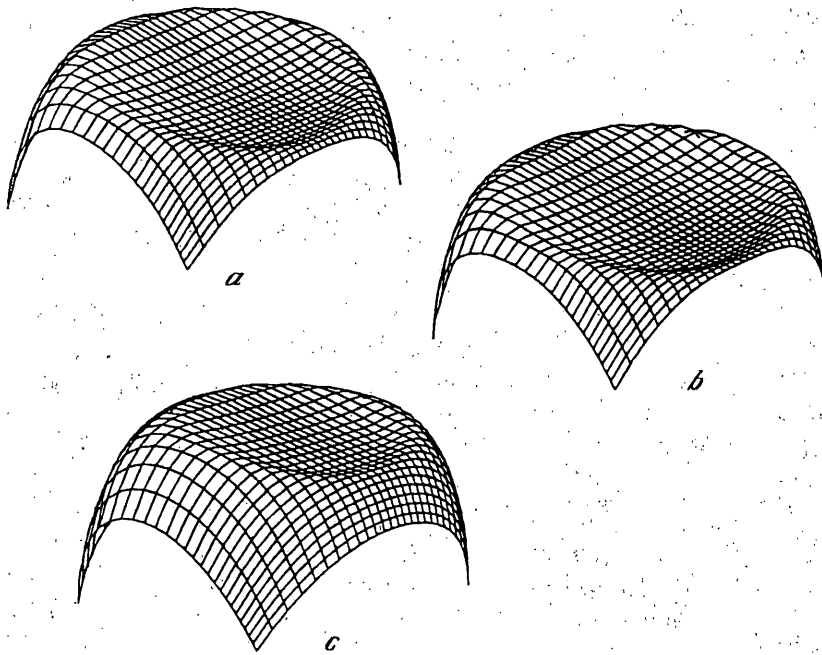
3. Результаты расчетов. Изложенный выше вычислительный алгоритм был применен для расчета тяжело нагруженного точечного УГД контакта упругого сферического тела с упругим полупространством при наличии в контакте смазочной пленки со свойствами несжимаемой вязкой жидкости. Для этого случая $\epsilon = 1$, $\beta = 1$, $D = \pi/4$, $v_x = 1$, $v_y = 0$. Реализация условий тяжелого нагружения обеспечивалась значениями параметров $V = 0,1$; $Q = 5$. Изменение со временем внешней нагрузки задавалось по гармоническому закону в виде функции $P(t) = 1 + A \sin(t)$ с частотой $\omega = 1/t_0$ и амплитудой $A = 0,5$. Расчеты проводились с относительной точностью $\delta = 0,001$ на сгущающейся в окрестности выходной границы сетке с числом узлов 30×30 . Численное моделирование проводилось на временном интервале $0 \leq t \leq 14$ с постоянным шагом $\Delta t = 0,2$. Представленные ниже расчетные данные получены для $Z = 1,0$.

Начальные условия для нестационарной УГД задачи определялись решением стационарной задачи для тех же параметров. При этом использовался стационарный вариант изложенного выше алгоритма. На фиг. 1, 2 представлено решение стационарной задачи. Распределения давления (фиг. 1, а, 2, а) и толщины смазочной пленки (фиг. 1, б, 2, б) в контакте представлены в виде поверхностей и линий уровня. Для наглядности распределение толщины смазочной пленки $h(x, y)$ на фиг. 1(б) представлено для герцевской области видом снизу (функция $-h(x, y)$). На фиг. 1, 2 видны характерные особенности распределений $p(x, y)$ и $h(x, y)$ в точечном тяжело нагруженном УГД контакте: "уплощение" зазора в герцевской зоне, образование "пиков" давления и соответственно уменьшение зазора в окрестности выходной границы смазочной пленки. Безразмерная толщина смазочной пленки в центре УГД контакта при этом равна $H_0^0 = 0,1786$.

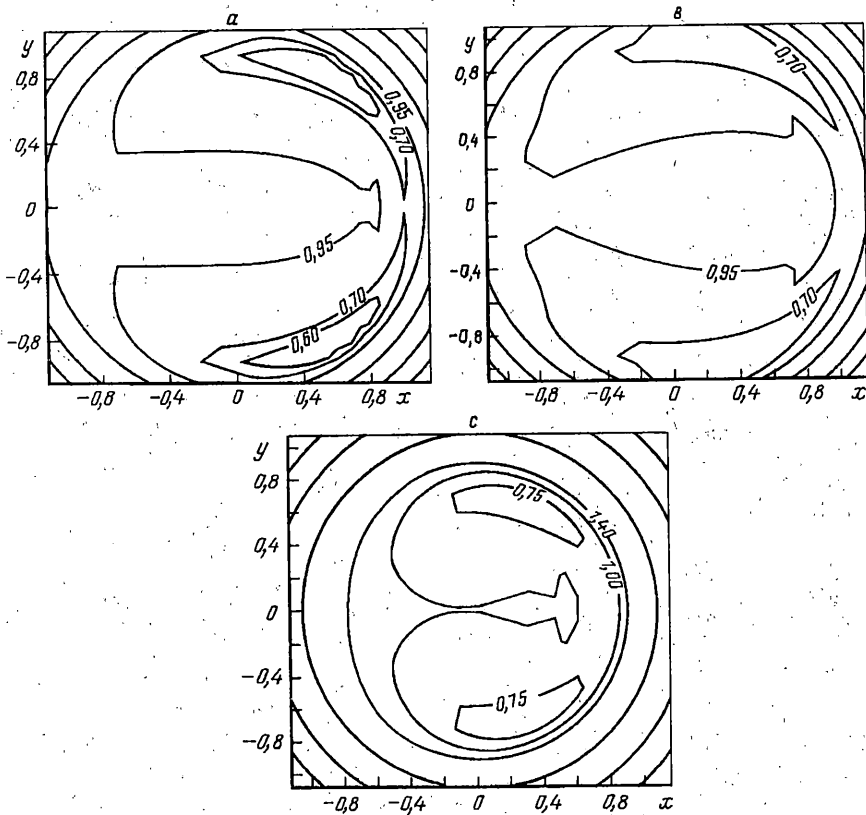
В процессе численного моделирования нестационарного УГД контакта были получены решения на каждом шаге по времени для всего интервала интегрирования. Так, на фиг. 3 показано изменение со временем максимального давления p_{\max} (кривая 1), минимальной толщины пленки h_{\min} в области контакта (кривая 3), толщины смазочной пленки в начале координат H_0 (кривая 4), области контакта Ω (кривая 5) и минимальной толщины пленки в плоскости сечения $y = 0$ $h_{\min}^{(y=0)}$ (кривая 6) в зависимости от нестационарной внешней нагрузки $2\pi P(t)/3\beta$ (кривая 2). Значения координат x, y , для которых $h(x, y, t) = h_{\min}$, находились в симметрично расположенных относительно оси x областях $(0,21 < x < 0,55) \times (0,69 < y < 0,94)$ и $(0,21 < x < 0,55) \times (-0,94 < y < -0,69)$.

В начальной стадии нестационарного нагружения на интервале $0 < t < 3$ для указанных величин имеют место разной длительности переходные процессы. Наибольшая длительность переходного процесса наблюдалась для H_0 и $h_{\min}^{(y=0)}$. По завершении переходного процесса изменения всех величин со временем характеризуются установившимися периодическими колебаниями с периодом 2π . При этом колебания p_{\max} , Ω и P практически синфазны, а h_{\min} — антифазны. В режиме установившихся колебаний весьма интересной представляется зависимость толщин смазочной пленки от внешней нагрузки. Видно, что с увеличением внешней нагрузки толщина пленки h_{\min} уменьшается, а толщина пленки в начале координат H_0 увеличивается (за исключением временного интервала, на котором рост внешней нагрузки сопровождается уменьшением H_0). С уменьшением внешней нагрузки наблюдается обратная картина.

На фиг. 4–7 представлены распределения давления (фиг. 4, 5) и толщины смазочной пленки (фиг. 6, 7) в виде поверхностей и линий уровня в моменты времени, в которые имели место максимальные и минимальные значения Ω и H_0 . На этой группе фигур в момент $T = 7,0$ (фигуры (а)) $H_0 = H_{0, \max} = 0,1971$; в момент времени $T = 7,8$ (фигуры (б)) $\Omega = \Omega_{\max}$, $H_0 = 0,1906$; в момент $T = 10,6$ (фигуры (с)) $\Omega = \Omega_{\min}$, $H_0 = H_{0, \min} =$



Фиг. 6



Фиг. 7

$= 0,1603$. Характерные особенности распределений $p(x, y, t)$, $h(x, y, t)$ в области контакта, присущие стационарному решению, в эти моменты времени, как впрочем и в другие, сохраняются. На этой группе графиков весьма заметны также отличия в местоположении выходной границы смазочной пленки, в численных значениях распределений $p(x, y, t)$, $h(x, y, t)$ и соответственно в их форме. Следует отметить, что "сплюснутая" часть поверхности функции зазора в процессе нагружения может несколько изменять свой наклон относительно оси x . Так, для момента времени ($T = 7,8$), когда внешняя нагрузка достигает максимального значения, а $\Omega = \Omega_{\max}$, угол наклона положительный.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Oh K.P.* The numerical solution of dynamically loaded elasto-hydrodynamic contact as a nonlinear complementarity problem // Trans. ASME J. Tribol. 1984. V. 106. № 1. P. 88–95.
2. *Kostreva M.M.* Elasto-hydrodynamic lubrication: a nonlinear complementarity problem // Intern. J. Numer. Methods in Fluids. 1984. V. 4. № 4. P. 377–397.
3. *Dowson D., Higginson G.R.* Elasto-hydrodynamic lubrication. Oxford: Pergamon Press, 1966. 235 p.
4. *Галахов М.А., Гусятников П.Б., Новиков А.П.* Математические модели контактной гидродинамики. М.: Наука, 1985. 294 с.
5. *Белоцерковский С.М., Лифанов И.К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука, 1985. 253 с.

Москва

Поступила в редакцию
22.X.1996