МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1998

УДК 539.3

© 1998 г. Д.В. ГЕОРГИЕВСКИЙ

ДЕЙСТВИЕ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛЫ В ВЕРШИНЕ НЕСЖИМАЕМОГО УПРУГОГО ОКТАНТА

Задача о действии сосредоточенной силы в вершине упругого октанта (одной восьмой части пространства) принадлежит к известному классу задач о действии сосредоточенных сил в упругих областях [1–3]. Наличие угловых точек в области вносит определенные особенности в математическую постановку задачи [4–9]. В частности, в таких областях решение может быть неединственно и неустойчиво по отношению к возмущению упругих постоянных.

1. Постановка и точное решение задачи для несжимаемого материала. Пусть область V, занимаемая упругим октантом, в декартовой системе координат $(Ox_1x_2x_3)$ описывается неравенствами $V = \{x_1 > 0;\ x_2 > 0;\ x_3 > 0\}$. Граница этой области Σ состоит из совокупности граней $\Sigma = \bigcup_{\alpha=1}^{3} \Sigma^\alpha$, ребер $l = \bigcup_{\alpha=1}^{3} l^\alpha$ и вершины O трехгранного угла, причем $\Sigma^\alpha = \{x_\alpha = 0;\ x_\beta > 0;\ x_\gamma > 0\}$, $l^\alpha = \{x_\alpha > 0;\ x_\beta = 0;\ x_\gamma = 0\}$[1]. Компоненты внешней нормали n_i^α на грани Σ^α равны $-\delta_{i\alpha}$.

Пусть массовые силы отсутствуют, и вся совокупность граней Σ свободна от напряжений, т.е.

$$\mathbf{x} \in \Sigma^\alpha:\ \sigma_{ij} n_j^\alpha \equiv -\sigma_{i\alpha} = 0\ \ (\alpha = 1, 2, 3) \tag{1.1}$$

В точке O действует сосредоточенная сила $\mathbf{P}$. Для формулировки последнего условия выделим куб $V_h = \{0 < x_1 < h;\ 0 < x_2 < h;\ 0 < x_3 < h\}$ с тремя гранями в координатных плоскостях и тремя гранями $\Sigma_h = \bigcup_{\alpha=1}^{3} \Sigma_h^\alpha$, где $\Sigma_h^\alpha = \{x_\alpha = h;\ 0 < x_\beta < h;\ 0 < x_\gamma < h\}$. Компоненты внешней нормали n_i^α на грани Σ_h^α равны $\delta_{i\alpha}$. Условие действия сосредоточенной силы записывается в виде трех равенств:

$$\int_{\Sigma_h} \sigma_{ij} n_j d\Sigma \equiv \sum_{\alpha=1}^{3} \int_{\Sigma_h^\alpha} \sigma_{i\alpha} d\Sigma = P_i \tag{1.2}$$

выполненных для любого $h > 0$.

В области V выполнены уравнения Бельтрами – Мичелла

$$(1+\nu)\Delta\sigma_{ij} + 3\sigma_{,ij} = 0,\ \ 3\sigma \equiv \sigma_{kk} \tag{1.3}$$

а на границе уравнения равновесия

$$\mathbf{x} \in \Sigma:\ \sigma_{ij,j} = 0 \tag{1.4}$$

[1] Здесь и далее тройка индексов (α, β, γ) пробегает все четные подстановки. По греческим индексам суммирование не производится.

Постановка задачи теории упругости в напряжениях [10] заключается в решении шести уравнений (1.3) в V при выполнении граничных условий (1.1), (1.2), (1.4).

Уравнениям (1.1), (1.3), (1.4) сформулированной задачи для несжимаемого упругого материала ($\nu = 1/2$) удовлетворяют функции

$$\sigma_{ij} = a_k x_k x_i x_j / r^5, \quad 3\sigma = a_k x_k / r^3 \tag{1.5}$$

где a_k – постоянные, определяемые из системы линейных уравнений (1.2). Подставляя решение (1.5) в (1.2), после некоторых преобразований запишем эту систему в следующем виде

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{P} \tag{1.6}$$

$$A_{\alpha\alpha} = \int_0^1\int_0^1 \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{\pi}{6}, \quad A_{\alpha\beta} = \int_0^1\int_0^1 \frac{(x+y+xy)dxdy}{(1+x^2+y^2)^{5/2}} = \frac{1}{3}, \quad \alpha \neq \beta$$

Решая ее, можно явно выписать a_i через компоненты P_k. Так, если сила $\mathbf{P}$ равнонаклонена ко всем трем осям (Ox_i), то $a_i = 2\sqrt{3}\,|\mathbf{P}|/(\pi+4) \approx 0{,}485|\mathbf{P}|$ ($i = 1, 2, 3$).

Запишем шаровую часть σ, девиатор s_{ij} и интенсивность $\sigma_u = (s_{ij}s_{ij})^{1/2}$ напряжений, построенные по решению (1.5):

$$\sigma = \frac{a_k x_k}{3r^3}, \quad s_{ij} = \frac{a_k x_k}{3r^5}(3x_i x_j - r^2\delta_{ij}), \quad \sigma_u = \sqrt{6}|\sigma| \tag{1.7}$$

а также деформации ε_{ij} и перемещения u_i, возникающие в несжимаемом октанте

$$\varepsilon_{ij} = \frac{a_k x_k}{2Er^5}(3x_i x_j - r^2\delta_{ij}), \quad u_i = -\frac{1}{2Er^3}(a_k x_k x_i + a_i r^2) \tag{1.8}$$

2. О зависимости напряженного состояния от коэффициента Пуассона. Исследуем задачу при $-1 < \nu < 1/2$ и выясним характер зависимости напряженного состояния от ν [11]. Будем обозначать решение (1.5) для несжимаемого материала с константами $a_k(\mathbf{P})$, определяемыми из (1.6), $\sigma_{ij}^0(\mathbf{x}; \mathbf{a})$. Тензор же напряжений (1.5) с произвольными константами $b_k(\nu; \mathbf{P})$ будем обозначать $\sigma_{ij}^0(\mathbf{x}; \mathbf{b})$ так, что компоненты $\sigma_{ij}^0(\mathbf{x}; \mathbf{b})$ удовлетворяют соотношениям (1.1), (1.3), (1.4), но могут не удовлетворять условиям (1.2). Заметим, что $b_k(1/2; \mathbf{P}) = a_k(\mathbf{P})$.

Поиск точного решения в форме

$$\sigma_{ij} = \frac{n_i n_j}{r^2}\Gamma(n_1, n_2), \quad 3\sigma = \frac{\Gamma}{r^2}, \quad n_i = \frac{x_i}{r} \tag{2.1}$$

успеха не приносит. Представление (2.1) означает, что вдоль каждого луча, выходящего из начала координат, напряжения убывают как r^{-2}, а коэффициент убывания зависит только от направляющих косинусов n_i данного луча.

Разложим σ_{ij} в ряд

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0(\mathbf{x}; \mathbf{b}) + \sum_{k=1}^{\infty} \varkappa^k \sigma_{ij}^{(k)}, \quad \varkappa = -\frac{1-2\nu}{3}, \quad -1 < \varkappa < 0 \tag{2.2}$$

и подставим (2.2) в уравнения Бельтрами – Мичелла (1.3). Приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях $\varkappa$ и учитывая то, что $\sigma_{ij}^0(\mathbf{x}; \mathbf{b})$ – решение уравне-

ний (1.3) при $\nu = 1/2$, получим итерационную цепочку для определения $\sigma_{ij}^{(k)}$:

$$\frac{1}{2}\Delta\sigma_{ij}^{(k+1)} + \sigma_{ij}^{(k+1)} = \sum_{m=0}^{k}(-1)^{k-m}\sigma_{,ij}^{(m)} \quad (k \geqslant 0) \tag{2.3}$$

Как видно из (2.3), на каждом шагу $\sigma_{ij}^{(k)}$ удовлетворяют уравнениям совместности для несжимаемого материала с известными фиктивными массовыми силами, зависящими от k.

Для того, чтобы, например $\sigma_{ij}^{(2)} = \sigma_{ij}^{(3)} = \ldots \equiv 0$ в (2.2), необходимо выполнение семи уравнений в V:

$$\Delta\sigma_{ij}^{(1)} = 0, \quad \sigma^{(1)} = \sigma^0(\mathbf{x}, \mathbf{b}) \tag{2.4}$$

и граничных условий (1.1), (1.4) для $\sigma_{ij}^{(1)}$. Затем после подстановки $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0(\mathbf{x}; \mathbf{b}) + \chi\sigma_{ij}^{(1)}$ в (1.2) определяются константы b_k. Заметим, что при этом решение, вообще говоря, не будет линейно зависеть от коэффициента Пуассона, так как $b_k = b_k(\nu; \mathbf{P})$.

Как показывают решения классических пространственных задач о действии сосредоточенной силы в упругих областях (задач Кельвина, Черутти, Буссинеска), точное решение зависит от ν дробно-линейно. Поэтому исследуем частный случай разложения (2.2)

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0(\mathbf{x}; \mathbf{a}) + \sum_{k=1}^{\infty}\chi^k\sigma_{ij}^{(k)}, \quad \chi = -\frac{1-2\nu}{1-c\nu} \tag{2.5}$$

где c – параметр такой, что $|\chi| < 1$ при $-1 < \nu < 1/2$. Ряд (2.5) является уже рядом Тейлора по χ, поскольку константы a_k от ν не зависят. Подставляя (2.5) в (1.3) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях χ, получим итерационную цепочку

$$\frac{1}{2}\Delta\sigma_{ij}^{(k+1)} + \sigma_{,ij}^{(k+1)} = \frac{2-c}{6}\sum_{m=0}^{k}\left(-\frac{1+c}{3}\right)^{k-m}\sigma_{,ij}^{(m)}, \quad k \geqslant 0 \tag{2.6}$$

Для линейной зависимости точного решения от χ, необходимо потребовать, чтобы компоненты $\sigma_{ij}^{(1)}$ удовлетворяли следующим уравнениям:

$$\mathbf{x} \in V: \ \Delta\sigma_{ij}^{(1)} = -c\sigma_{,ij}^0(\mathbf{x}; \mathbf{a}) \tag{2.7}$$

$$\mathbf{x} \in V: \ 3\sigma^{(1)} = (1+c)\sigma^0(\mathbf{x}; \mathbf{a}) \tag{2.8}$$

$$\mathbf{x} \in \Sigma^\alpha: \ \sigma_{ij,j}^{(1)} = 0, \ \sigma_{i\alpha}^{(1)} = 0 \ (\alpha = 1, 2, 3) \tag{2.9}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{3}\int_{\Sigma_h^\alpha}\sigma_{i\alpha}^{(1)}d\Sigma = 0 \tag{2.10}$$

Решая краевую задачу (2.7), (2.9), можно найти все функции $\sigma_{ij}^{(1)}$ и след $3\sigma^{(1)}$, а после подстановки последнего в уравнение (2.8) определить параметр c. Так, в задачах Черутти и Буссинеска $c = 1$.

Если после подстановки полностью найденного тензора $\sigma^{(1)}$ в уравнения (2.10) по-

следние удовлетворятся, то решение исходной задачи, действительно, линейно зависит от χ, а, следовательно, дробно-линейно от коэффициента Пуассона.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96-01-01233) и Федеральной целевой программы "Интеграция" (проект 426).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лурье А.И.* Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1955. 492 с.
2. Трехмерные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1976. 663 с.
3. *Рекач В.Г.* Руководство к решению задач по теории упругости. М.: Высшая школа, 1977. 215 с.
4. *Кондратьев В.А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Московского матем. об-ва. 1967. Т. 16. С. 209–292.
5. *Колдоркина В.А.* Об особенностях решений трехмерных задач теории упругости в кусочно-гладких областях // // Изв. ВУЗов. Математика. 1973. Т. 136. № 9. С. 31–35.
6. *Мазья В.Г., Пламеневский Б.А.* О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в областях с коническими точками // Mathematische Nachrichten. 1977. Bd. 76. S. 29–60.
7. *Гринченко В.Т., Улитко А.Ф.* Равновесие упругих тел канонической формы. Киев: Наук. думка, 1985. 280 с.
8. *Бабешко В.А., Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Лапина О.Н.* Особенность напряжений в окрестности вершины упругого трехгранника // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318. № 5. С. 1113–1116.
9. *Александров В.М., Гришин С.А.* Об асимптотике в вершине конуса из степенного материала // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 2. С. 32–44.
10. *Победря Б.Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1995. 366 с.
11. *Победря Б.Е.* О зависимости решения задачи теории упругости от упругих постоянных // Проблемы прочности. 1972. № 3. С. 63–66.

Москва

Поступила в редакцию
20.X.1997