МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1998

УДК 539.3

© 1998 г. В.М. МАЛЬКОВ

НЕЛИНЕЙНЫЙ ЗАКОН УПРУГОСТИ ДЛЯ ТЕНЗОРА УСЛОВНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ И ГРАДИЕНТА ДЕФОРМАЦИИ

В известных работах В.В. Новожилова [1–3] были рассмотрены вопросы о формах связи симметричных соосных тензоров и их приложениях в нелинейной теории упругости. Аналогичным методом, основанном на тригонометрическом представлении тензоров, в работе автора [4] и здесь продолжены исследования зависимостей тензоров напряжений и деформаций, образующих энергетическую пару. В дополнение к девиаторам тензоров естественным образом введены два новых тензора, которые раньше не употреблялись – тензоры напряжений и деформаций сдвига. В главных осях компоненты этих тензоров пропорциональны главным напряжениям и деформациям сдвига. Показано, что, единичный тензор, девиатор и тензор сдвига образуют ортогональный тензорный базис. Тензор напряжений может быть разложен по базису тензора деформаций и наоборот. Коэффициенты разложений зависят от смешанных инвариантов, введенных В.В. Новожиловым – обобщенных модулей объемного сжатия и сдвига и фазы подобия девиаторов. В главных осях и в некоторых других случаях (например, когда только одно направление используемой системы координат является главным) напряжения выражаются через деформации и обратно с помощью линейных соотношений, нелинейность содержится только в инвариантных коэффициентах. В работе рассмотрены определяющие уравнения для различных энергетических пар тензоров, в том числе для тензоров истинных напряжений и деформаций. Для этих тензоров обобщенные модули упругости сохраняют физический смысл модулей объемного сжатия и сдвига при больших деформациях. Установлены зависимости между обобщенными модулями упругости, участвующими в определяющих уравнениях разных энергетических пар тензоров. Эти зависимости могут быть полезными при решении прикладных задач нелинейной теории упругости.

В работах В.В. Новожилова и в [4] использовались свойства симметрии и соосности образующих энергетическую пару тензоров. Как известно, уравнения равновесия и движения записываются через тензор условных напряжений. Этот тензор и градиент деформации составляют энергетическую пару, но они не являются симметричными и соосными. Компоненты этих тензоров имеют индексы, относящиеся к разным векторным базисам. В работе построен закон упругости для тензора условных напряжений и градиента деформации, аналогичный по форме определяющим соотношениям для симметричных тензоров.

1. Рассмотрим в общем виде формы связи между тензорами напряжений и деформаций, удовлетворяющих условиям симметрии и соосности. При этом известные результаты [4] будут дополнены новыми, в частности соотношениями для третьих инвариантов тензоров.

Пусть в упругом теле введены тензор деформаций $\mathbf{A}$ и тензор напряжений $\mathbf{B}$. Предполагается, что эти тензоры симметричны, соосны и образуют энергетическую пару. Последнее условие означает, что приращение работы деформации можно записать в виде $\delta A = \mathbf{B} : \delta\mathbf{A}$ (две точки означают операцию свертки). Обозначим $\mathbf{I}$ – единичный тензор; $\mathbf{D}_A$, $\mathbf{D}_B$ – девиаторы тензоров; $\mathbf{S}_A$, $\mathbf{S}_B$ – тензоры деформаций и напряжений сдвига. Тензоры сдвига впервые были введены в [4] и названы так потому, что их компоненты в главных осях пропорциональны главным деформациям и напряжениям сдвига.

В главных осях деформации, направления которых заданы векторами $\mathbf{e}_i$ ($i = 1, 2, 3$), имеем

$$\mathbf{D}_A = \left(a_i - \frac{1}{3}a\right)\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i, \quad \mathbf{S}_A = \frac{1}{\sqrt{3}}(a_k - a_j)\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i$$

$$\mathbf{D}_B = \left(b_i - \frac{1}{3}b\right)\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i, \quad \mathbf{S}_B = \frac{1}{\sqrt{3}}(b_k - b_j)\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i \tag{1.1}$$

где a_i, b_i – компоненты тензоров; a, b – их первые инварианты. Индексы $i, j, k = 1, 2, 3$ образуют циклическую перестановку, по повторяющемуся индексу i выполняется суммирование.

Производя операции свертки, из формул (1.1) получим

$$\mathbf{D}_A{:}\mathbf{I} = \mathbf{S}_A{:}\mathbf{I} = 0, \quad \mathbf{D}_B{:}\mathbf{I} = \mathbf{S}_B{:}\mathbf{I} = 0$$

$$\mathbf{D}_A{:}\mathbf{S}_A = 0, \quad \mathbf{D}_A{:}\mathbf{D}_A = \mathbf{S}_A{:}\mathbf{S}_A = 2\bar{a}^2$$

$$\mathbf{D}_B{:}\mathbf{S}_B = 0, \quad \mathbf{D}_B{:}\mathbf{D}_B = \mathbf{S}_B{:}\mathbf{S}_B = 2\bar{b}^2$$

$$\mathbf{D}_A^2 + \mathbf{S}_A^2 = \tfrac{4}{3}\bar{a}^2\mathbf{I}, \quad \mathbf{D}_B^2 + \mathbf{S}_B^2 = \tfrac{4}{3}\bar{b}^2\mathbf{I} \tag{1.2}$$

величины $\bar{a}, \bar{b}$ есть интенсивности деформаций и напряжений сдвига для данных тензоров.

Приведенные соотношения инвариантны по отношению к системе координат, поэтому формулы (1.2) можно рассматривать как определение тензоров сдвига через девиаторы в общих координатах.

Тензоры ($\mathbf{I}$, $\mathbf{D}_A$, $\mathbf{S}_A$) и ($\mathbf{I}$, $\mathbf{D}_B$, $\mathbf{S}_B$) образуют ортогональные тензорные базисы. Тензор напряжений можно разложить по базису тензора деформаций и наоборот, причем коэффициентами в этих разложениях будут инвариантные величины. Для тензора напряжений получим

$$\mathbf{B} = Ka\mathbf{I} + 2G(\mathbf{D}_A\cos\omega + \mathbf{S}_A\sin\omega) \tag{1.3}$$

$$\mathbf{D}_B = 2G(\mathbf{D}_A\cos\omega + \mathbf{S}_A\sin\omega)$$

$$\mathbf{S}_B = 2G(-\mathbf{D}_A\sin\omega + \mathbf{S}_A\cos\omega) \tag{1.4}$$

где K, G – обобщенные модули объемного сжатия и сдвига, ω – фаза подобия девиаторов (разность углов вида). Эти инварианты определяются соотношениями

$$b = 3Ka, \quad \bar{b} = 2G\bar{a}, \quad \omega = \beta - \alpha \tag{1.5}$$

Из формул (1.4) следует

$$\mathbf{D}_A{:}\mathbf{D}_B = \mathbf{S}_A{:}\mathbf{S}_B = 2\bar{a}\bar{b}\cos\omega$$

$$\mathbf{D}_A{:}\mathbf{S}_B = -\mathbf{D}_B{:}\mathbf{S}_A = 2\bar{a}\bar{b}\sin\omega$$

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{\mathbf{D}_A{:}\mathbf{S}_B}{\mathbf{D}_A{:}\mathbf{D}_B} = -\frac{\mathbf{D}_B{:}\mathbf{S}_A}{\mathbf{D}_A{:}\mathbf{D}_B} \tag{1.6}$$

Углы вида α, β и фазу подобия девиаторов ω удобно вычислять с помощью соотношений

$$\frac{2}{3\sqrt{3}}\bar{a}^3\cos 3\alpha = D_a, \quad \frac{2}{3\sqrt{3}}\bar{a}^3\sin 3\alpha = S_a$$

$$\frac{2}{3\sqrt{3}}\bar{b}^3\cos 3\beta = D_b, \quad \frac{2}{3\sqrt{3}}\bar{b}^3\sin 3\beta = S_b$$

$$D_a D_b + S_a S_b = \frac{4}{27}\bar{a}^3\bar{b}^3\cos 3\omega, \quad S_a D_b - D_a S_b = \frac{4}{27}\bar{a}^3\bar{b}^3\sin 3\omega$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{S_a}{D_a}, \quad \operatorname{tg} 3\beta = \frac{S_b}{D_b}, \quad \operatorname{tg} 3\omega = \frac{S_a D_b - D_a S_b}{D_a D_b + S_a S_b}$$

Здесь D_a, D_b, S_a, S_b – определители (третьи инварианты) девиаторов и тензоров сдвига. Для третьих инвариантов имеют место зависимости

$$D_b = (2G)^3 (D_a \cos 3\omega - S_a \sin 3\omega)$$

$$S_b = (2G)^3 (D_a \sin 3\omega + S_a \cos 3\omega)$$

Нелинейный закон упругости (1.3) можно вывести разными способами. Например, с помощью упругого потенциала (плотности энергии деформации) $\mathbf{B} = d\Phi/\delta\mathbf{A}$, используя выражение для его дифференциала

$$d\Phi = Kada + 4G\bar{a}(\cos\omega d\bar{a} + \sin\omega\bar{a}d\alpha)$$

Более простой метод состоит в непосредственном применении тригонометрической формы представления главных компонент тензоров

$$a_i - \frac{1}{3}a = \frac{2}{\sqrt{3}}\bar{a}\cos\alpha_i, \quad \frac{1}{\sqrt{3}}(a_k - a_j) = -\frac{2}{\sqrt{3}}\bar{a}\sin\alpha_i$$

$$b_i - \frac{1}{3}b = \frac{2}{\sqrt{3}}\bar{b}\cos\beta_i, \quad \frac{1}{\sqrt{3}}(b_k - b_j) = -\frac{2}{\sqrt{3}}\bar{b}\sin\beta_i \tag{1.7}$$

где α_i и β_i – углы в общей девиаторной плоскости, отличающиеся для разных значений индекса $i = 1, 2, 3$ на величины кратные $2\pi/3$, причем $\beta_i - \alpha_i = \omega$. Из формул (1.7) сразу получим закон упругости в компонентах тензоров

$$b_i = Ka + 2G\left[\left(a_i - \frac{1}{3}a\right)\cos\omega + \frac{1}{\sqrt{3}}(a_k - a_j)\sin\omega\right] \tag{18}$$

Соотношения (1.3), (1.8) линейно зависят от компонент тензоров напряжений и деформаций, нелинейность содержится только в инвариантных коэффициентах. Коэффициентами являются введенные В.В. Новожиловым [1, 2] обобщенные модули упругости и тригонометрические функции фазы подобия девиаторов (разности углов вида). При малых деформациях обобщенные модули (1.5) являются модулями объемного сжатия и сдвига. Для некоторых энергетических пар тензоров, в частности для тензоров истинных напряжений и деформаций, обобщенные модули сохраняют свой физический смысл и при больших деформациях [2]. Формулы (1.3), (1.4), (1.8) легко обращаются, т.е. позволяют выразить тензор деформаций через тензор напряжений

$$\mathbf{A} = \frac{1}{9K}b\mathbf{I} + \frac{1}{2G}(\mathbf{D}_B\cos\omega - \mathbf{S}_B\sin\omega)$$

$$\mathbf{D}_A = \frac{1}{2G}(\mathbf{D}_B\cos\omega - \mathbf{S}_B\sin\omega)$$

$$\mathbf{S}_A = \frac{1}{2G}(\mathbf{D}_B\sin\omega + \mathbf{S}_B\cos\omega)$$

В [4] показано, что линейная зависимость напряжений и деформаций имеет место не только в главных координатах, но и в случае, когда только одно координатное направление является главным. Такие системы координат обычно используются при анализе плоской и осесимметричной деформаций.

Приведем некоторые энергетические пары тензоров, для которых применимы полученные выше результаты. Приращение работы деформации можно записать в следующих вариантах:

$$\delta A = \mathbf{\Sigma}:\delta\mathbf{E} = \mathbf{T}^*:\delta\mathbf{R} = \mathbf{B}^*:\delta\mathbf{\Lambda} \tag{1.9}$$

Здесь $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{G}^{-1}J\mathbf{T}\mathbf{G}^{-T}$ – тензор напряжений Пиола – Кирхгофа; $\mathbf{T}$ и $\mathbf{T}^* = \mathbf{G}^{-1}J\mathbf{T}\mathbf{G}$ – тензоры истинных напряжений, отнесенные к текущей и исходной конфигурациям; $\mathbf{B}^*$ – тензор напряжений Био; $\mathbf{E}$– тензор деформаций Грина; $\mathbf{R} = \ln\mathbf{\Lambda}$ – тензор истинных деформаций; $\mathbf{\Lambda}$ – тензор кратностей удлинений; $\mathbf{G}$ – градиент деформации; $J = \det\mathbf{G}$ – кратность изменения объема. В соотношении (1.9) участвуют три энергетические пары тензоров: $(\mathbf{\Sigma},\mathbf{E})$, $(\mathbf{T}^*,\mathbf{R})$, $(\mathbf{B}^*,\mathbf{\Lambda})$, для всех из них можно использовать результаты (1.3)–(1.8) и другие формулы.

2. Рассмотрим определяющие уравнения для двух энергетических пар тензоров из (1.9):

$$\mathbf{\Sigma} = K^*e\mathbf{I} + 2G^*(\mathbf{D}_E\cos\omega^* + S_E\sin\omega^*) \tag{2.1}$$

$$\mathbf{T}^* = KJr\mathbf{I} + 2GJ(\mathbf{D}_R\cos\omega + S_R\sin\omega) \tag{2.2}$$

где e, $r = \ln J$ – первые инварианты тензоров деформаций. При решении прикладных краевых задач обычно используют энергетическую пару $(\mathbf{\Sigma},\mathbf{E})$, поскольку тензор деформаций Грина достаточно просто записывается через перемещения. Известно, что параметры $\mathbf{K}^*$ и $\mathbf{G}^*$ в соотношениях (2.1) теряют смысл модулей упругости при больших деформациях и это является препятствием для их применения в полном объеме. От этого недостатка свободны уравнения состояния дли истинных напряжений и деформаций (2.2). Величины K и G в соотношениях (2.2) сохраняют физический смысл модуля объемного сжатия и модуля сдвига при любых деформациях. Это обстоятельство используется при обработке результатов экспериментов, проводимых с целью определения зависимости обобщенных модулей упругости от инвариантов тензоров. Сами тензоры истинных напряжений и деформаций как правило не удобны для практического применения. Поэтому при использовании энергетической пары тензоров $(\mathbf{\Sigma},\mathbf{E})$ могут оказаться полезными зависимости, связывающие обобщенные модули упругости и фазы подобия в уравнениях (2.1), (2.2). Между истинными напряжениями Коши t_i и напряжениями Пиола – Кирхгофа σ_i существует известная зависимость

$$Jt_i = \lambda_i^2\sigma_i \tag{2.3}$$

где λ_i – кратности удлинений в главных направлениях.

Образуя из левой части выражения (2.3) три главных инварианта тензора истинных напряжений и используя далее формулы (2.1), (2.2), получим

$$3KJr = 3K^*e(1+\tfrac{2}{3}e) + 8G^*\bar{e}^2\cos\omega^* \tag{2.4}$$

$$\begin{gathered}(GJ\bar{r})^2 = (K^*e\bar{e})^2 + (G^*\bar{e})^2(1+\tfrac{2}{3}e)^2 + \tfrac{4}{3}(G^*\bar{e}^2)^2 + 2K^*G^*e\bar{e}^2(1+\tfrac{2}{3}e)\cos\omega^* + \\ +6G^{*2}\left(1+\tfrac{2}{3}e\right)(D_e\cos2\omega^* - S_e\sin2\omega^*) + 6K^*G^*e(D_e\cos\omega^* - S_e\sin\omega^*)\end{gathered} \tag{2.5}$$

$$\begin{gathered}8G^3J(\cos3\omega D_r - \sin3\omega S_r) + K^3Jr^3 - 8KG^2Jr\bar{r}^2 = 8G^{*3}(\cos3\omega^* D_e - \sin3\omega^* S_e) + \\ +K^{*3}e^3 - 8K^*G^{*2}e\bar{e}^2\end{gathered} \tag{2.6}$$

Здесь D_r, S_r, D_e, S_e – определители соответствующих девиаторов и тензоров сдвига; $\bar{e}, \bar{r}$ – интенсивности деформаций. Уравнения (2.4)–(2.6) связывают обобщенные модули упругости и фазы подобия рассматриваемых энергетических пар тензоров. Если считать в уравнениях параметры K, G, ω известными, то параметры K^*, G^*, ω^* можно найти как функции инвариантов тензора деформаций Грина.

Рассмотрим в качестве примера на применение определяющих уравнений (2.1), (2.2) три задачи: растяжение или сжатие призматического бруса квадратного сечения, равномерное растяжение пластины в двух направлениях, раздувание давлением сферической оболочки. Законы упругости (2.1), (2.2) в компонентах тензоров имеют вид

$$\sigma_i = K^* e + 2G^*\left[\left(\varepsilon_i - \frac{1}{3}e\right)\cos\omega^* + \frac{1}{\sqrt{3}}(\varepsilon_k - \varepsilon_j)\sin\omega^*\right] \tag{2.7}$$

$$t_i = Kr + 2G\left[\left(r_i - \frac{1}{3}r\right)\cos\omega + \frac{1}{\sqrt{3}}(r_k - r_j)\sin\omega\right] \tag{2.8}$$

где ε_i, $r_i = \ln\lambda_i$ – компоненты тензоров деформаций.

В этих задачах главные напряжения и деформации в тангенциальных направлениях равны между собой: $\sigma_1 = \sigma_2$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, $t_1 = t_2$, $r_1 = r_2$. С помощью формулы (1.6) можно показать, что $\omega^* = \omega = 0$, т.е. реализуется модель материала с нулевой фазой подобия. В результате законы упругости (2.7), (2.8) приводятся к виду

$$\sigma_i = K^* e + 2G^*(\varepsilon_i - \tfrac{1}{3}e), \quad t_i = K\ln J + 2G(\ln\lambda_i - \tfrac{1}{3}\ln J) \tag{2.9}$$

Известно, что закон сжимаемости $p = K\ln J$ при постоянном модуле K применим для давлений p порядка 40–50 МПа. Ограничиваясь такими давлениями, будем считать величину K постоянной в формулах (2.9). Используя дифференциальные зависимости между обобщенными модулями упругости [2, 3], можно показать, что выражение GJ является функцией только инварианта $\bar{r} = (\ln\lambda_3 - \ln\lambda_1)/\sqrt{3}$. Для данных задач не сложно поставить эксперимент, чтобы определить вид функции $GJ = g(\bar{r})$.

Соотношения (2.4), (2.5) имеют вид

$$3KJr = 3K^* e(1 + \tfrac{2}{3}e) + 8G^*\bar{e}^2$$

$$GJ\bar{r} = [K^* e + (1 + \tfrac{2}{3}e + \tfrac{2}{\sqrt{3}}\bar{e})G^*]\bar{e}$$

Эти формулы являются точными для рассматриваемых частных задач. В некоторых ситуациях их можно использовать в качестве приближенного варианта общих формул (2.4), (2.5).

3. Методы, которые применялись выше для построения зависимости симметричных тензоров напряжений и деформаций, не могут быть использованы для тензора условных напряжений $\mathbf{N} = \mathbf{G}^{-1}J\mathbf{T}$ и градиента деформации $\mathbf{G}$, которые образуют энергетическую пару ($\delta A = \mathbf{N} : \delta\mathbf{G}$). Как известно, компоненты этих тензоров имеют индексы, относящиеся к разным векторным базисам. Поэтому для построения искомой связи между тензорами необходимы два векторных базиса, один из них введен в отсчетной конфигурации, а другой – в текущей. В качестве таковых возьмем главные оси деформации отсчетной $\mathbf{e}_i$ и текущей $\mathbf{e}_i^*$ конфигураций. Диады рассматриваемых тензоров будут образованы из векторов данных базисов.

Градиент деформации и сопряженный с ним тензор можно представить в виде

$$\mathbf{G} = \lambda_1\mathbf{e}_1^*\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2^*\mathbf{e}_2 + \lambda_3\mathbf{e}_3^*\mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{G}^T = \lambda_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^* + \lambda_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2^* + \lambda_3\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3^*$$

Из формулы полярного разложения градиента деформации $\mathbf{G} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}$ найдем ортогональный тензор поворота

$$\mathbf{Q}=\mathbf{e}_1^*\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2^*\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3^*\mathbf{e}_3,\quad \mathbf{Q}^T=\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^*+\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2^*+\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3^*$$

Поскольку главные оси в процессе деформации остаются ортогональными, тензор $\mathbf{Q}$ задает поворот твердого тела $\mathbf{e}_i^*=\mathbf{Q}\mathbf{e}_i$. Обратный тензор для градиента деформации равен

$$\mathbf{G}^{-1}=\lambda_1^{-1}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^*+\lambda_2^{-1}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2^*+\lambda_3^{-1}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3^*$$

Обозначим $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}^*=\mathbf{Q}\mathbf{n}$ – векторы нормали к девиаторной плоскости до и после деформации. С помощью градиента деформации найдем кратность удлинения вдоль нормали и кратность изменения площади этой плоскости

$$\lambda_n\mathbf{n}=\mathbf{G}\mathbf{n}=(\lambda_1\mathbf{e}_1^*+\lambda_2\mathbf{e}_2^*+\lambda_3\mathbf{e}_3^*)/\sqrt{3}$$

$$\varkappa_n\mathbf{n}^*=\mathbf{n}J\mathbf{G}^{-1}=J(\lambda_1^{-1}\mathbf{e}_1^*+\lambda_2^{-1}\mathbf{e}_2^*+\lambda_3^{-1}\mathbf{e}_3^*)/\sqrt{3}$$

Из этих формул следует

$$\lambda_n^2=\tfrac{1}{3}(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2),\quad \varkappa_n^2=\tfrac{1}{3}J^2(\lambda_1^{-2}+\lambda_2^{-2}+\lambda_3^{-2}) \tag{3.1}$$

Комбинации кратностей удлинений (суммы квадратов удлинений и обратных величин), участвующие в формулах (3.1), часто используются при написании упругих потенциалов. Из формул (3.1) виден их физический смысл и есть возможность оценить величину.

Для тензора условных напряжений $\mathbf{N}=s_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^*+s_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2^*+s_3\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3^*$ и других тензоров из (1.9) имеют место соотношения

$$\mathbf{N}=\mathbf{G}^{-1}J\mathbf{T}=\mathbf{\Sigma}\mathbf{G}^T=\mathbf{B}^*\mathbf{Q}^T$$

$$s_i=\lambda_i^{-1}Jt_i=\lambda_i\sigma_i$$

где s_i – компоненты тензора условных напряжений; компоненты тензора Био равны s_i.

Введем девиаторы и тензоры сдвига для рассматриваемой пары

$$\mathbf{D}_G=(\lambda_i-\tfrac{1}{3}\lambda)\mathbf{e}_i^*\mathbf{e}_i,\quad \mathbf{S}_G=\tfrac{1}{\sqrt{3}}(\lambda_k-\lambda_j)\mathbf{e}_i^*\mathbf{e}_i$$

$$\mathbf{D}_N=(s_i-\tfrac{1}{3}s)\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i^*,\quad \mathbf{S}_N=\tfrac{1}{\sqrt{3}}(s_k-s_j)\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i^* \tag{3.2}$$

где λ, s – первые инварианты тензоров; по индексу $i=1, 2, 3$, проводится суммирование.

Из формул (3.2) получим соотношения, выражающие свойства девиаторов и тензоров сдвига

$$\mathbf{D}_G:\mathbf{Q}^T=\mathbf{S}_G:\mathbf{Q}^T=0,\quad \mathbf{D}_G:\mathbf{S}_G^T=\mathbf{S}_G:\mathbf{D}_G^T=0 \tag{3.3}$$

$$\mathbf{D}_G:\mathbf{D}_G^T=\mathbf{S}_G:\mathbf{S}_G^T=2\bar{\lambda}^2,\quad \mathbf{D}_G\mathbf{D}_G^T+\mathbf{S}_G\mathbf{S}_G^T=\tfrac{4}{3}\bar{\lambda}^2\mathbf{I}$$

$$\mathbf{D}_N:\mathbf{Q}=\mathbf{S}_N:\mathbf{Q}=0,\quad \mathbf{D}_N:\mathbf{S}_N^T=\mathbf{S}_N:\mathbf{D}_N^T=0 \tag{3.4}$$

$$\mathbf{D}_N:\mathbf{D}_N^T=\mathbf{S}_N:\mathbf{S}_N^T=2\bar{s}^2\quad \mathbf{D}_N\mathbf{D}_N^T+\mathbf{S}_N\mathbf{S}_N^T=\tfrac{4}{3}\bar{s}^2\mathbf{I}$$

где $\bar{\lambda}$, $\bar{s}$ – интенсивности деформаций и напряжений сдвига. Формулы (3.3), (3.4) инварианты к системе координат, поэтому их можно считать определением тензоров сдвига через девиаторы в общем случае. Приведенные зависимости выражают свойства обобщенной ортогональности несимметричных тензоров. Тензоры $(\mathbf{Q},\mathbf{D}_G,\mathbf{S}_G)$ и $(\mathbf{Q},\mathbf{D}_N,\mathbf{S}_N)$ образуют ортогональные базисы (в обобщенном смысле).

Выполним некоторые геометрические построения, чтобы ввести углы вида и фазу подобия девиаторов для рассматриваемой пары тензоров, а также показать геометрический смысл этих величин. Вычислим векторы напряжений на девиаторной плоскости

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{N}=\frac{1}{\sqrt{3}}(s_1\mathbf{e}_1^*+s_2\mathbf{e}_2^*+s_3\mathbf{e}_3^*)=\frac{1}{3}s\mathbf{n}^*+\sqrt{\frac{2}{3}}\bar{s}\boldsymbol{\nu}^*$$

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{D}_N=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\left(s_1-\frac{1}{3}s\right)\mathbf{e}_1^*+\left(s_2-\frac{1}{3}s\right)\mathbf{e}_2^*+\left(s_3-\frac{1}{3}\right)\mathbf{e}_3^*\right]=\sqrt{\frac{2}{3}}\bar{s}\boldsymbol{\nu}^* \qquad (3.5)$$

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{S}_N=\frac{1}{3}[(s_3-s_2)\mathbf{e}_1^*+(s_1-s_3)\mathbf{e}_2^*+(s_2-s_1)\mathbf{e}_3^*]=\sqrt{\frac{2}{3}}\bar{s}\mathbf{t}^*$$

Можно доказать, что векторы $(\boldsymbol{\nu}^*,\mathbf{t}^*,\mathbf{n}^*)$ образуют ортогональный базис.

С помощью соотношений (3.5) обычным путем найдем

$$s_i-\frac{1}{3}s=\frac{2}{\sqrt{3}}\bar{s}\cos\beta_i,\quad \frac{1}{\sqrt{3}}(s_k-s_j)=-\frac{2}{\sqrt{3}}\bar{s}\sin\beta_i \qquad (3.6)$$

где β_i – углы между вектором ν^* и проекциями векторов e_i^* на девиаторную плоскость.

Аналогичные построения выполним для градиента деформации

$$\mathbf{G}\cdot\mathbf{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(\lambda_1\mathbf{e}_1^*+\lambda_2\mathbf{e}_2^*+\lambda_3\mathbf{e}_3^*)=\frac{1}{3}\lambda\mathbf{n}^*+\sqrt{\frac{2}{3}}\bar{\lambda}\boldsymbol{\nu}_1^*$$

$$\mathbf{D}_G\cdot\mathbf{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\left(\lambda_1-\frac{1}{3}\lambda\right)\mathbf{e}_1^*+\left(\lambda_2-\frac{1}{3}\lambda\right)\mathbf{e}_2^*+\left(\lambda_3-\frac{1}{3}\lambda\right)\mathbf{e}_3^*\right]=\sqrt{\frac{2}{3}}\bar{\lambda}\boldsymbol{\nu}_1^* \qquad (3.7)$$

$$\mathbf{S}_G\cdot\mathbf{n}=\frac{1}{3}[(\lambda_3-\lambda_2)\mathbf{e}_1^*+(\lambda_1-\lambda_3)\mathbf{e}_2^*+(\lambda_2-\lambda_1)\mathbf{e}_3^*]=\sqrt{\frac{2}{3}}\bar{\lambda}\mathbf{t}_1^*$$

Векторы $(\boldsymbol{\nu}_1^*,\ \mathbf{t}_1^*,\mathbf{n}^*)$ образуют ортогональный базис, который в общем случае не совпадает с базисом $(\boldsymbol{\nu}^*,\ \mathbf{t}^*,\mathbf{n}^*)$. Положим

$$\boldsymbol{\nu}^*=\cos\omega\boldsymbol{\nu}_1^*+\sin\omega\mathbf{t}_1^*,\quad \mathbf{t}^*=-\sin\omega\boldsymbol{\nu}_1^*+\cos\omega\mathbf{t}_1^* \qquad (3.8)$$

Угол ω назовем фазой подобия девиаторов рассматриваемых тензоров.

Используя формулы (3.7), получим тригонометрическое представление компонентов девиатора и тензора сдвига

$$\lambda_i-\frac{1}{3}\lambda=\frac{2}{\sqrt{3}}\bar{\lambda}\cos\alpha_i,\quad \frac{1}{\sqrt{3}}(\lambda_k-\lambda_j)=-\frac{2}{\sqrt{3}}\bar{\lambda}\sin\alpha_i \qquad (3.9)$$

где α_i – углы в девиаторной плоскости между вектором $\boldsymbol{\nu}_1^*$ и проекциями векторов $\mathbf{e}_i^*$ на эту плоскость. Из формулы (3.8) следует $\beta_i-\alpha_i=\omega$.

С помощью соотношений (3.6), (3.9) получим зависимость между компонентами тензора условных напряжений и градиента деформации

$$s_i=K\lambda+2G\left[\left(\lambda_i-\frac{1}{3}\lambda\right)\cos\omega+\frac{1}{\sqrt{3}}(\lambda_k-\lambda_j)\sin\omega\right] \qquad (3.10)$$

где обобщенные модули упругости определяются формулами $s=3K\lambda$, $\bar{s}=2G\bar{\lambda}$.

Запишем закон упругости (3.10) в тензорной форме

$$\mathbf{N}=\mathbf{K}\lambda\mathbf{Q}^T+2G(\mathbf{D}_G^T\cos\omega+\mathbf{S}_G^T\sin\omega) \qquad (3.11)$$

Закон упругости для тензоров Био и кратностей удлинений в компонентах будет тождественен (3.10). Его тензорную форму получим из (1.3):

$$\mathbf{B}^* = K\lambda\mathbf{I} + 2G(\mathbf{D}_\Lambda \cos\omega + \mathbf{S}_\Lambda \sin\omega) \tag{3.12}$$

На основании (3.10)–(3.12) можно сделать вывод, что тензоры энергетических пар $(\mathbf{B}^*, \mathbf{\Lambda})$ и $(\mathbf{N}, \mathbf{G})$ имеют одинаковые углы вида и фазы подобия девиаторов. Закон упругости (3.11) можно получить из (3.12) умножением справа на ортогональный тензор $\mathbf{Q}^T$. В свою очередь закон (3.12) получим из (3.11) умножением справа на тензор $\mathbf{Q}$.

Между девиаторами и тензорами сдвига этих энергетических пар тензоров существует зависимость

$$\mathbf{D}_N = \mathbf{D}_B\mathbf{Q}^T, \quad \mathbf{S}_N = \mathbf{S}_B\mathbf{Q}^T, \quad \mathbf{D}_G = \mathbf{Q}\mathbf{D}_\Lambda, \quad \mathbf{S}_G = \mathbf{Q}\mathbf{S}_\Lambda$$

Замечание. Тензором Био часто называют тензор $\frac{1}{2}[\mathbf{G}^{-1}J\mathbf{T}\mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T J\mathbf{T}\mathbf{G}^{-T}]$, который очевидно является симметричным. Но тензор $\mathbf{B}^* = \mathbf{N}\mathbf{Q} = \mathbf{G}^{-1}J\mathbf{T}\mathbf{Q}$ также симметричен. Симметричные тензоры $\mathbf{\Sigma}$ и $\mathbf{\Lambda}$ одновременно приводятся к диагональному виду, следовательно они перестановочны. Поскольку $\mathbf{B}^* = \mathbf{\Sigma\Lambda}$, то этот тензор симметричен.

Сформулируем условия, при которых имеет место разложение вида (3.11) для несимметричных тензоров второго ранга. Пусть $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ – обратимые тензоры с вещественными компонентами. Полярное разложение этих тензоров возьмем в виде $\mathbf{A} = \mathbf{QU}$, $\mathbf{B} = \mathbf{VP}$, где $\mathbf{Q}$, $\mathbf{P}$ – ортогональные тензоры, $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ – симметричные положительно определенные тензоры. Если тензоры $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ соосны, то $\mathbf{P} = \mathbf{Q}^T$, и имеет место разложение

$$\mathbf{B} = Ka\mathbf{Q}^T + 2G(\mathbf{D}_A^T \cos\omega + \mathbf{S}_A^T \sin\omega)$$

употребляемые здесь обозначения имеют прежний смысл.

Полученные зависимости между симметричными и несимметричными тензорами напряжений и деформаций, образующих энергетические пары, имеют общий математический характер. Они выполняются для любой пары тензоров, удовлетворяющих указанным условиям. Фактический переход к теории упругости произойдет, когда зададим или получим экспериментально зависимость обобщенных модулей упругости и фазы подобия от инвариантов тензоров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Новожилов В.В.* О связи между напряжениями и деформациями в нелинейно упругой среде // ПММ. 1951. Т. 15. Вып. 2. С. 183–194.
2. *Новожилов В.В.* О принципах обработки результатов статистических испытаний изотропных материалов // ПММ. 1951. Т. 15. Вып. 6. С. 709–722.
3. *Новожилов В.В.* Теория упругости. Л.: Судостроение, 1958. 370 с.
4. *Мальков В.М.* Зависимость тензоров напряжений и деформаций в нелинейной теории упругости // Вестник С.-Петербургского университета. Сер. 1. 1996. Вып. 4. С. 91–94.

С.-Петербург

Поступила в редакцию
27.XI.1996