

УДК 539.4

© 1998 г. А.А. МОВЧАН

УЧЕТ ПЕРЕМЕННОСТИ УПРУГИХ МОДУЛЕЙ И ВЛИЯНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ НА ФАЗОВЫЙ СОСТАВ В СПЛАВАХ С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ

В сплавах с памятью формы [1, 2] при их охлаждении через интервал температур прямого мартенситного превращения (M_1, M_2); $M_1 > M_2$ происходит фазовый переход, при котором доля мартенситной фазы q возрастает от нуля до единицы. Если образец находится под напряжением, то в нем накапливается фазовая деформация прямого превращения, которая снимается при последующем нагревании через интервал температур обратного превращения (A_1, A_2), $A_2 > A_1$. В [3–5] приведена система определяющих уравнений для сплавов с памятью формы, в которой с помощью микромеханического подхода [6] отражен процесс зарождения и развития кристаллов мартенсита в аустенитной матрице. В [7–8] предложен аналитический метод решения соответствующих краевых задач для материалов, упругие модули которых постоянны, а доля мартенситной фазы не зависит от действующих напряжений. В данной работе исследован вопрос о единственности решения краевой задачи для сплавов, у которых упругие модули зависят от q . Для материалов, у которых величина q зависит от действующих напряжений исследован вопрос об однозначной разрешимости определяющих уравнений относительно скоростей изменения напряжений; сформулирована связная задача изгиба пластин и соответствующее разрешающее уравнение в приращениях прогиба; приведены некоторые результаты решения задачи чистого цилиндрического изгиба при прямом превращении.

1. Определяющие уравнения для сплавов с памятью формы. Определяющие уравнения для сплавов с памятью формы [3–5] имеют вид:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^1 + \varepsilon_{ij}^2 + \varepsilon_{ij}^3 \quad (1.1)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta^1 \delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij}^1, \quad \theta^1 = \varepsilon_{kk}^1, \quad \varepsilon_{ij}^2 = \alpha(T - T_0) \delta_{ij}, \quad d\varepsilon_{ij}^3 / dq = B_{ij} + a_0 \varepsilon_{ij}^3 \quad (1.2)$$

$$B_{ij} = \beta \delta_{ij} + c_0 \sigma_{ij}' \quad \text{при} \quad dq > 0$$

$$B_{ij} = \lambda_0 B_{ij}^1 + (1 - \lambda_0) \frac{a_0 \varepsilon_{ij}^0}{\exp(a_0 q_0) - 1} \quad \text{при} \quad dq < 0$$

$$q = \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{M_1 - T}{M_1 - M_2} \right) \quad \text{при} \quad M_2 < T < M_1, \quad dT < 0 \quad (1.3)$$

$$q = \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{T - A_1}{A_2 - A_1} \right) \quad \text{при} \quad A_1 < T < A_2, \quad dT > 0 \quad (1.4)$$

и $q = \text{const}$ если не одно из этих условий не выполняется. Здесь $\varepsilon_{ij}^1, \varepsilon_{ij}^2, \varepsilon_{ij}^3$ – упругая, температурная и фазовая деформации, λ, G, α – параметры Ламе и коэффициент тем-

пературного расширения, T, T_0 — температура и ее значение, при котором температурная деформация считается равной нулю, штрихом обозначены компоненты девятигоров, $\alpha_0, \epsilon_0, \beta, \lambda_0$ — параметры материала. Величины $\epsilon_{ij}^0, q_0, B_{ij}^1$ — для данного этапа обратного превращения представляют из себя значения фазовой деформации и доли мартенситной фазы в начальной точке этого этапа и величину B_{ij} для предшествующего этапа прямого превращения, вычисленную для того же значения объемной доли мартенситной фазы q .

2. Учет переменности упругих модулей. Поведение сплавов с памятью формы типа никелида титана осложнено тем, что значения упругих постоянных и коэффициента температурного расширения аустенитной и мартенситной фаз существенно различаются. В результате термоупругие параметры сплава при фазовом переходе меняются, становясь функциями q .

В [1] предложено получать зависимости для упругих модулей от q , исходя из "правила смеси фаз" под которым понимается предположение о том, что упругие деформации сплава равны сумме упругих деформаций аустенитной и мартенситной составляющих, умноженных на соответствующие объемные доли в совокупности с гипотезой о равенстве напряжений в этих фазах. В [9] используются линейные зависимости обратных величин модуля Юнга E и коэффициента Пуассона ν от q .

В данной работе предполагается, что свободная энергия объема, состоящего из аустенитной и мартенситной фаз, равна сумме свободных энергий этих фаз. Кроме того считается, что деформации обеих фаз одинаковы (т.е. применяется осреднение по Фойгхту). Фазы предполагаются изотропными. Тогда плотность свободной энергии элементарного объема будет равна:

$$F = qF_1^1 + (1-q)F_2 = \frac{1}{2}\lambda(\theta^1)^2 + G\epsilon_{ij}^1\epsilon_{ij}^1 + \alpha K\theta^1(T - T_0) \quad (2.1)$$

$$\lambda = \lambda_1 q + \lambda_2 (1-q), \quad G = G_1 q + G_2 (1-q), \quad K = K_1 q + K_2 (1-q)$$

$$\alpha = \frac{K_1 \alpha_1 q + K_2 \alpha_2 (1-q)}{K_1 q + K_2 (1-q)}$$

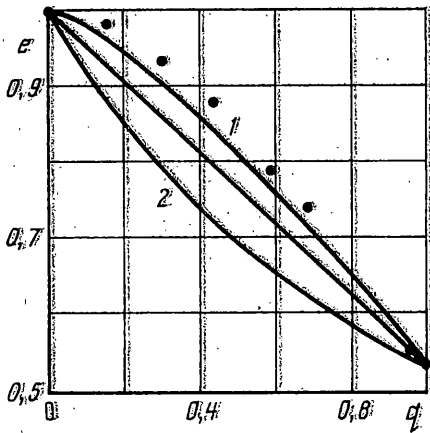
Здесь индексы 1 и 2 относятся соответственно к мартенситному и аустенитному состояниям, $K = E/[(1-2\nu)]$ — утроенный объемный модуль. Для модуля Юнга и коэффициента Пуассона получаются следующие выражения:

$$E = \frac{(G_1 q + G_2 (1-q))(K_1 q + K_2 (1-q))}{(G_1 + \lambda_1)q + (G_2 + \lambda_2)(1-q)}$$

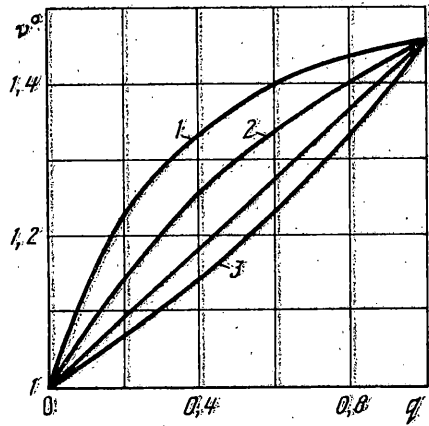
$$\nu = \frac{\lambda_1 q + \lambda_2 (1-q)}{2((\lambda_1 + G_1)q + (\lambda_2 + G_2)(1-q))} \quad (2.2)$$

На фиг. 1-3 приведены графики зависимостей от q величин $e = E/E_2, \nu^0 = \nu/\nu_2, \alpha^0 = \alpha/\alpha_2$ (кривые 1); для никелида титана, у которого [10]: $E_1 = 44000$ мПа, $E_2 = 83000$ мПа, $\nu_1 = 0,48, \nu_2 = 0,33, \alpha_1 = 6 \times 10^{-6}, \alpha_2 = 14 \times 10^{-6}$.

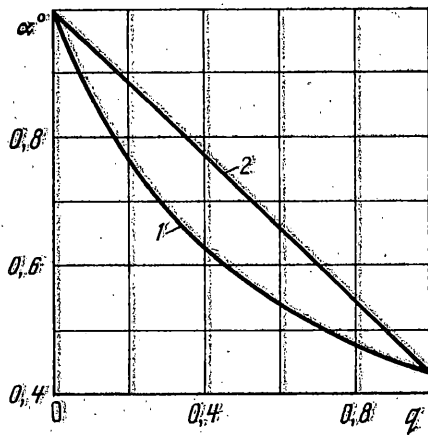
На тех же графиках приведены данные, получаемые из предположения об аддитивности потенциала Гиббса и осреднения по Рейсу (линии 2). Для модуля Юнга эта линия совпадает с графиком зависимости E от q , получаемым в предположении о линейной связи $1/E$ и q [9]. На фиг. 1 и 2 построены кроме этого графики линейных зависимостей соответствующих величин от q (для коэффициента температурного расширения линейная зависимость от q получается при осреднении по Рейсу и совпадает с линией фиг. 3). На фиг. 2 приведен также график зависимости коэффициента Пуассона от q , следующий из предположения о линейной зависимости от q величины $1/\nu$ [9] (кривая 3). Следуя приведенным данным, графики зависимостей ν от q , получаемые при осреднении по Фойгхту и по Рейсу, оба расположены сверху от соответствующей



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

прямой линии, а график зависимости, предложенной в [9], — снизу. Для модуля Юнга график функции (2.2), получающейся при осреднении по Фойгхту, является кривой, выпуклой вверх, а при осреднении по Рейсу — кривой, выпуклой вниз. Следуя экспериментальным данным [10, 11], графики зависимости модуля Юнга от температуры для никелида титана либо прямолинейны, либо выпуклы вверх. Учитывая этот факт, а также соотношения (1.3), (1.4) легко видеть, что графики зависимости E от q должны быть выпуклыми вверх, что свидетельствует в пользу зависимостей (2.2). Точками на фиг. 1 обозначены данные, полученные по зависимости модуля Юнга от температуры для никелида титана, приведенной в [10]. Как видно, экспериментальные значения E даже превосходят предсказания, получаемые при осреднении по Фойгхту.

С учетом полученных зависимостей преобразование Лапласа для решения задачи [7, 8] становится неэффективным, поскольку упругий закон в пространстве изображений перестает быть конечным соотношением (превращается в дифференциальное уравнение):

3. Единственность решения для краевой задачи в случае определяющих уравнений (1.1)–(1.4), (2.1). Пусть задана (достаточно гладкая) история изменения термомеханического нагружения, т.е. зависимости от времени объемных F_i^0 и поверхностных T_i^0 сил, правых частей u_i^0 кинематических граничных условий и температуры. Можно

доказать, что в этом случае решение краевой задачи механики деформируемого твердого тела для сплава с памятью формы, свойства которого описываются системой определяющих уравнений (1.1)–(1.4), (2.1) единственно.

Действительно, при заданной истории изменения внешних воздействий в каждой точке процесса определены производные по времени $\dot{F}_i, \dot{T}_i^0, \dot{u}_i^0, \dot{T}$. В этом случае скорости изменения напряжений в любой точке процесса также определяются однозначно.

Доказательство этого факта аналогично используемому в теории пластического течения [12]. Предполагается, что существует два решения $\dot{\sigma}_{ij}^0, \dot{\epsilon}_{ij}^0, \dot{u}_i^0$ и $\dot{\sigma}_{ij}^{00}, \dot{\epsilon}_{ij}^{00}, \dot{u}_i^{00}$. Записывая для разностей этих решений тождество начала возможных перемещений, можно получить

$$\int_V (\dot{\sigma}_{ij}^0 - \dot{\sigma}_{ij}^{00})(\dot{\epsilon}_{ij}^0 - \dot{\epsilon}_{ij}^{00}) dV = 0 \quad (3.1)$$

где интеграл берется по объему тела V .

Разделяя в подинтегральном выражении шаровые и девиаторные части для подинтегральной функции Φ можно получить:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2, \quad \Phi_1 = \frac{1}{3}(\dot{\sigma}_{kk}^0 - \dot{\sigma}_{kk}^{00})(\dot{\epsilon}_{kk}^0 - \dot{\epsilon}_{kk}^{00}), \quad \Phi_2 = (\dot{\sigma}_{ij}^{0'} - \dot{\sigma}_{ij}^{00'}) (\dot{\epsilon}_{ij}^{0'} - \dot{\epsilon}_{ij}^{00'})$$

Выражения для скоростей изменения упругих, температурных и фазовых деформаций могут быть представлены в виде

$$\dot{\epsilon}_{kk}^1 = \frac{\dot{\sigma}_{kk}}{K} - \frac{K_1 - K_2}{K^2} \sigma_{kk} \dot{q}, \quad \dot{\epsilon}_{ij}^{1'} = \frac{\dot{\sigma}_{ij}^{0'}}{2G} - \frac{1}{2} \frac{G_1 - G_2}{G^2} \sigma_{ij}^{0'} \dot{q} \quad (3.2)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}^2 = [\alpha \dot{T} + \theta \dot{q}(T - T_0)] \delta_{ij}, \quad \theta = \frac{K_1 K_2 (\alpha_1 - \alpha_2)}{K^2}$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}^3 = (B_{ij}' + a_0 \epsilon_{ij}^3) \dot{q}, \quad \dot{\epsilon}_{kk}^3 = (3\beta + a_0 \epsilon_{kk}^3) \dot{q}, \quad \dot{q} = -\dot{T} \gamma \sqrt{1 - q^2} \quad (3.3)$$

где $\gamma = \pi/[2(A_2 - A_1)]$ для обратного и $\gamma = \pi/[2(M_1 - M_2)]$ для прямого превращений.

Ясно, прежде всего, что следуя условиям (1.3) и (1.4) для обоих решений одновременно либо происходит прямое превращение, либо обратное, либо фазовая деформация не меняется. Связано это с тем, что величины T и \dot{T} входящие в условия (1.3) и (1.4) одинаковы для обоих решений. Далее, из (3.3) следует, что величины \dot{q} , $\dot{\epsilon}_{ij}^3$ будут также одинаковы для обоих решений. Отсюда уже получается, что ненулевой вклад в выражения для Φ_1 и Φ_2 могут давать только упругие деформации. Поэтому

$$\Phi_1 = \frac{1}{3K} (\dot{\sigma}_{kk}^0 - \dot{\sigma}_{kk}^{00})^2 \geq 0, \quad \Phi_2 = \frac{1}{2G} (\dot{\sigma}_{ij}^{0'} - \dot{\sigma}_{ij}^{00'})^2 \geq 0$$

причем равенство возможно лишь если оба поля скоростей изменения напряжений совпадают. Единственность для скоростей изменения напряжений доказана.

Единственность для скоростей изменения деформаций следует из однозначного определения этих величин по формулам (3.2). Отсюда получается, что если задана вся история изменения внешних нагрузок, температуры, граничных значений смещений, а также начальные значения фазовой деформации, то история изменения напряжений, деформаций, смещений и доли мартенситной фазы определяется однозначно.

Таким образом, в общем случае решение задачи однозначно, лишь если задана вся история термомеханического нагружения. Однако для частного случая обратного превращения теорема единственности справедлива в более простой формулировке. Пусть в начале данного этапа процесса обратного превращения заданы значения напряжений, деформаций (упругих, фазовых и температурных), смещений и температуры.

Кроме того, фиксирована история изменения напряжений на предшествующем этапе прямого превращения. Тогда значения напряжений, деформаций и смещений в произвольной точке рассматриваемого обратного превращения однозначно определяются мгновенными значениями внешних воздействий и температуры только в рассматриваемой точке не зависимо от истории их изменения (лишь бы все время происходило обратное превращение).

Доказательство опирается на тот факт, что, следуя (1.2), на этапе обратного превращения изменение фазовой деформации не зависит от значения напряжений именно на этом этапе, а определяется начальными значениями $q = q_1$ и $\epsilon_{ij}^3 = \epsilon_{ij}^{03}$ и историей изменения напряжений на этапе предшествующего прямого превращения. Далее устанавливается, что при фиксированной в некоторой точке процесса фазовой деформации, величины напряжений, деформаций и смещений однозначно определяются значениями внешних нагрузок и температуры в рассматриваемой точке. Для этого предполагается, что существуют два решения $\sigma_{ij}^0, \epsilon_{ij}^0, u_i^0$ и $\sigma_{ij}^{00}, \epsilon_{ij}^{00}, u_i^{00}$. Разница $\sigma_{ij}^0 - \sigma_{ij}^{00}$ является статически допустимым полем с нулевыми объемными и поверхностными силами. При условии равенства температурных и фазовых деформаций (последнее обеспечивается равенством температур и значений q для обоих решений) разница упругих составляющих деформаций $\epsilon_{ij}^{01} - \epsilon_{ij}^{001} = \epsilon_{ij}^0 - \epsilon_{ij}^{00}$ совпадает с разницей полных деформаций обоих решений и является поэтому кинематически допустимым полем с нулевыми значениями смещений на S_u . Тогда из тождества начала возможных перемещений следует

$$\int_V (\sigma_{ij}^0 - \sigma_{ij}^{00})(\epsilon_{ij}^{01} - \epsilon_{ij}^{001}) dV = 0$$

Но подинтегральное выражение представляет из себя положительно определенный упругий потенциал и, следовательно, $\epsilon_{ij}^0 = \epsilon_{ij}^{00}, \sigma_{ij}^0 = \sigma_{ij}^{00}$, что и требовалось доказать.

4. Краевые задачи для сплавов, фазовый состав которых зависит от действующих напряжений. Для многих сплавов с памятью формы термоупругие мартенситные превращения могут вызываться не только изменениями температуры, но и изменением напряжений [1]. В [5] это явление описывается с помощью введения зависимости температур перехода от действующих напряжений по формулам

$$M_i = M_{i0} + k\sigma_i, \quad A_i = A_{i0} + k\sigma_i \quad (i = 1, 2) \quad (4.1)$$

где k – постоянная материала, σ_i – интенсивность напряжений, M_{i0}, A_{i0} – значения температур перехода в ненапряженном материале. Температуры фазового перехода принимаются не зависящими от шаровой части тензора напряжений по следующим причинам. Следуя физическим соображениям, изложенным в [1], эффективная температура локального кристалла, через которую осуществляется влияние действующих напряжений на температуры фазового перехода, зависит от действующих напряжений через свертку $d_{ij}\sigma_{ij}$, где d_{ij} – дисторсия фазового превращения. Поскольку симметричная часть d_{ij} , близка для рассматриваемых сплавов с памятью формы к девiatorу, то указанная свертка, а значит и температуры M_i, A_i слабо зависят от гидростатического напряжения. Этот же вывод подтверждается экспериментальными данными [13], следуя которым влияние гидростатического напряжения на температуры перехода примерно на порядок меньше, чем влияние компонент девiatorа напряжений.

В результате принятия соотношений (4.1), краевые задачи становятся связанными в том смысле, что теперь доля мартенситной фазы q , следуя (1.3), (1.4), (4.1) зависит не

только от температуры, но и от действующих напряжений, которые определяются в процессе решения задачи.

Следуя (4.1), (1.3) условие активного фазового деформирования при прямом превращении можно записать в виде

$$\sigma_i = \frac{1}{k} \left(\frac{2(M_1 - M_2)}{\pi} \arcsin(q) + T - M_1 \right), \quad k\dot{\sigma}_i > \dot{T}$$

аналогичном условию пластичности Мизеса для упругопластической среды, причем роль параметра изотропного упрочнения играет величина q (неравенство является условием возрастания величины q , вычисленной в соответствии с (1.3), (4.1)). Здесь, однако, из-за слагаемого $a_0 \epsilon_{ij}^3$ в (1.2) для скорости фазовой деформации не выполняется принцип градиентальности (то есть, вектор скорости фазовой деформации не ортогонален поверхности начала фазового превращения в пространстве напряжений). Следовательно, не справедлив и постулат Друкера.

Для скоростей изменения q и полной деформации в данной модели, следуя (1.1), (4.1), (3.2), (3.3) справедливы соотношения

$$\dot{q} = \gamma \sqrt{1 - q^2} \left(\frac{3}{2} k \frac{\sigma'_{mn} \dot{\sigma}'_{mn}}{\sigma_i} - \dot{T} \right) \quad (4.2)$$

$$\dot{\epsilon}'_{ij} = \frac{\dot{\sigma}'_{ij}}{2G} + f_{ij} \dot{q}, \quad \dot{\epsilon}_{kk} = \frac{\dot{\sigma}_{kk}}{K} + \delta \dot{q} + 3[\alpha \dot{T} + \dot{q} \theta (T - T_0)] \quad (4.3)$$

$$f_{ij} = \left(\frac{G_2 - G_1}{2G^2} \sigma'_{ij} + B'_{ij} + a_0 \epsilon_{ij}^3 \right), \quad \delta = \left(\frac{K_2 - K_1}{K^2} \sigma_{kk} + 3\beta + a_0 \epsilon_{kk}^2 \right)$$

Недостатком используемой модели является тот факт, что согласно (4.2), величина q не определена при $\sigma_i = 0$. Поэтому при расчетах во избежание численной неустойчивости точки с малым значением интенсивности напряжений приходится обходить, применяя в них для вычисления скоростей (приращений) искомых величин несвязную модель.

Соотношение (4.2) справедливо при

$$M_2 + k\sigma_i \leq T \leq M_1 + k\sigma_i, \quad \frac{3}{2} k \frac{\sigma'_{mn} \dot{\sigma}'_{mn}}{\sigma_i} > \dot{T}$$

или

$$A_1 + k\sigma_i \leq T \leq A_2 + k\sigma_i, \quad \frac{3}{2} k \frac{\sigma'_{mn} \dot{\sigma}'_{mn}}{\sigma_i} < \dot{T}$$

Для решения краевых задач соотношения (4.3) удобно разрешить относительно скоростей изменения напряжений. Для этого величины $\dot{\sigma}'_{ij}$ выражаются из первого уравнения (4.3)

$$\dot{\sigma}'_{ij} = 2G(\dot{\epsilon}'_{ij} - f_{ij} \dot{q}) \quad (4.4)$$

и результат подставляется в соотношение (4.2), которое становится линейным уравнением относительно \dot{q} . Решая это уравнение относительно \dot{q} можно получить

$$\dot{q} = (\Phi_{mn} \dot{\epsilon}'_{mn} - \beta_2 \dot{T}) / R \quad (4.5)$$

$$\beta_1 = 3Gk\beta_2, \quad \beta_2 = \gamma \sqrt{1 - q^2}, \quad R = 1 + f_{mn} \Phi_{mn}, \quad \Phi_{mn} = \beta_1 \sigma'_{mn} / \sigma_i$$

Подстановка (4.5) в (4.4) дает искомые выражения для скоростей изменения

девиатора и шаровой части напряжений

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}'_{ij} &= 2G \left[\frac{\delta_{im} \delta_{jn} R - f_{ij} \Phi_{mn}}{R} \dot{\epsilon}'_{mn} + \frac{\beta_2 f_{ij}}{R} \dot{T} \right] \\ \dot{\sigma}_{kk} &= K \left[\dot{\epsilon}_{kk} - \frac{\Phi_{mn} \dot{\epsilon}'_{mn} - \beta_2 \dot{T}}{R} (\delta + 3\theta(T - T_0)) - 3\alpha \dot{T} \right]\end{aligned}$$

или для скоростей изменения напряжений и полных деформаций:

$$\dot{\sigma}_{ij} = \lambda \dot{\theta}_1 \delta_{ij} + 2G \dot{\epsilon}_{ij} - (2G f_{ij} + K[\delta/3 + \theta(T - T_0)] \delta_{ij}) (\Phi_{mn} \dot{\epsilon}'_{mn} - \beta_2 \dot{T}) / R - K \alpha \dot{T} \delta_{ij}$$

Необходимо отметить, что обращение определяющих соотношений (4.3) существует и единственно лишь в случае если $R \neq 0$. Если же

$$R = 0 \quad (4.6)$$

то формально имеются две возможности; если кроме (4.6) выполняется еще и условие

$$\Phi_{mn} \dot{\epsilon}'_{mn} - \beta_2 \dot{T} = 0 \quad (4.7)$$

то обращение определяющих соотношений существует, но не единственно. Если же равенство (4.7) не выполнено, то обращение определяющих соотношений не существует, что можно, следуя (4.5) трактовать как обращение в бесконечность скорости изменения доли мартенситной фазы (т.е., при выполнении (4.6) возможно скачкообразное изменение параметра q).

Легко установить, однако, что если скорость изменения q определяется зависимостью (4.2), а скорость изменения фазовой деформации — соотношением (1.2), то из условия (4.6) следует выполнение равенства (4.7), т.е. обращение определяющих соотношений всегда существует, но может быть не единственно (при выполнении условия (4.6)). В последнем случае заданным скоростям изменения полной деформации $\dot{\epsilon}_{ij}$ соответствует одномерное множество скоростей изменения напряжений

$$\dot{\sigma}'_{ij} = 2G \dot{\epsilon}'_{ij} - 2G f_{ij} t, \quad \dot{\sigma}_{kk} = K[\dot{\epsilon}_{kk} - \delta t - 3(\alpha \dot{T} + \theta t(T - T_0))] \quad (4.8)$$

определенное с точностью до значения параметра t . Связанна эта неединственность обращения с тем, что добавки к $\dot{\sigma}'_{ij}$, $\dot{\sigma}_{kk}$, пропорциональные соответственно $2G f_{ij}$ и $K(\delta + 3\theta(T - T_0))$ не меняют скорости изменения полных деформаций (поскольку изменения скоростей упругих и фазовых деформаций взаимно компенсируются). Возможность неединственного обращения определяющих соотношений связана с тем, что для данной модели не выполняется постулат Друкера. При решении краевых задач в приращениях в точках процесса, где выполнено условие (4.6), значение параметра t для подстановки в (4.8) определяется из уравнений равновесия, что и позволяет найти скорости изменения напряжений и величину q , которая равна t .

5. Случай плоского напряженного состояния. Для плоского напряженного состояния ($\sigma_z = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$) определяющие уравнения, разрешенные относительно компонент скоростей деформации в плоскости пластины имеют вид

$$\dot{\epsilon}_x = \frac{1}{E} (\dot{\sigma}_x - \nu \dot{\sigma}_y) + (f_x + \delta/3 + \theta(T - T_0)) \dot{q} + \alpha \dot{T} \quad (5.1)$$

$$\dot{\epsilon}_y = \frac{1}{E} (\dot{\sigma}_y - \nu \dot{\sigma}_x) + (f_y + \delta/3 + \theta(T - T_0)) \dot{q} + \alpha \dot{T}$$

$$\dot{\epsilon}_{xy} = \frac{1}{2G} \dot{\sigma}_{xy} + f_{xy} \dot{q}$$

$$\begin{vmatrix} f_x \\ f_y \\ f_{xy} \end{vmatrix} = \frac{G_2 - G_1}{2G^2} \begin{vmatrix} \sigma'_x \\ \sigma'_y \\ \sigma'_{xy} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B'_x \\ B'_y \\ B'_{xy} \end{vmatrix} + a_0 \begin{vmatrix} \epsilon_x^3 \\ \epsilon_y^3 \\ \epsilon_{xy}^3 \end{vmatrix}$$

В силу того, что $\dot{\sigma}'_{mn} \sigma'_{mn} = \dot{\sigma}'_{mn} \sigma_{mn}$ и условий плоского напряженного состояния

$$\dot{q} = \gamma \sqrt{1 - q^2} \left(\frac{3}{2} k \frac{\sigma_x \dot{\sigma}'_x + \sigma_y \dot{\sigma}'_y + 2\sigma_{xy} \dot{\sigma}'_{xy} - \dot{T}}{\sigma_i} \right)$$

Разрешая эту систему относительно скоростей изменения напряжений, можно получить

$$\dot{\sigma}_x = \frac{E}{1 - \nu^2} [(\dot{\epsilon}_x + \nu \dot{\epsilon}_y) - (f_x + \nu f_y + (1 + \nu)(\delta/3 + \theta(T - T_0))) \dot{q} + (1 + \nu) \alpha \dot{T}] \quad (5.2)$$

$$\dot{\sigma}_{xy} = 2G(\dot{\epsilon}_{xy} - f_{xy} \dot{q})$$

$$\dot{q} = \frac{\beta_2 [\eta \Psi(\dot{\epsilon}_x, \dot{\epsilon}_y, \dot{\epsilon}_{xy}) - \sigma_i \dot{T}]}{\sigma_i + \beta_2 \eta [\Psi(f_x, f_y, f_{xy}) + (1 + \nu) \delta (\sigma_x + \sigma_y) / 3]}, \quad \eta = \frac{kE}{2(1 - \nu^2)}$$

$$\Psi(a, b, c) = \sigma_x [(2 - \nu)a + (2\nu - 1)b] + \sigma_y [(2 - \nu)b + (2\nu - 1)a] + 2\sigma_{xy} (1 + \nu)c$$

6. Уравнения изгиба тонких пластин из сплава с памятью формы. При решении задачи принимаются обычные гипотезы теории изгиба пластин Кирхгофа. Считается, что температура от координаты z по толщине пластины не зависит. Температурные деформации и объемный эффект реакций фазового превращения не учитываются, что приводит к упрощению соотношений (5.2) для скоростей изменения напряжений (фазовая деформация представляет из себя девiator, поэтому при вычислении функций f_x, f_y по формулам (5.1) значение фазовой деформации по толщине пластины не требуется и все величины с индексом z удается исключить из рассмотрения.

Далее для определенности рассматривается случай охлаждения пластины, нагруженной в аустенитном состоянии. Из-за влияния действующих напряжений на фазовый переход прямое превращение в крайних (по толщине) волокнах начнется при температуре

$$T_0 = M_1 + E_2 k \beta_i h / (1 - \nu_2^2) > M_1$$

$$\beta_1 = [(1 - \nu + \nu^2)(\beta_x^2 + \beta_y^2) - (\nu^2 - 4\nu + 1) \beta_x \beta_y + 3(1 - \nu^2) \beta_{xy}^2]^{0.5}$$

$$\beta_x = -\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad \beta_y = -\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}, \quad \beta_{xy} = -\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}$$

Здесь W, h – прогиб пластины и ее полутолщина, $\beta_x, \beta_y, \beta_{xy}$ – кривизны и кручение (в рамках геометрически линейной теории изгиба). При дальнейшем изменении температуры и (или) кривизны зоны превращения будут примыкать к верхней и нижней поверхностям пластины; координата по толщине a внутренней границы зоны превращения определяется по формуле $a = (1 - \nu^2)(T - M_1)/(Ek \beta_i)$.

При $T = M_1$ зона превращения достигает нейтральной плоскости и упругая область исчезает. Для получения разрешающего уравнения соотношение (5.2) записываются в приращениях. Путем интегрирования по толщине умноженных на z выражений для приращений напряжений находятся соотношения для приращений изгибающих и крутящего моментов. Записывая уравнение равновесия для приращений моментов,

можно окончательно получить

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(a_x \frac{\partial^2 dW}{\partial x^2} + b_x \frac{\partial^2 dW}{\partial y^2} + c_x \frac{\partial^2 dW}{\partial x \partial y} - d_x dT \right) + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(a_y \frac{\partial^2 dW}{\partial x^2} + b_y \frac{\partial^2 dW}{\partial y^2} + c_y \frac{\partial^2 dW}{\partial x \partial y} - d_y dT \right) + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(a_{xy} \frac{\partial^2 dW}{\partial x^2} + b_{xy} \frac{\partial^2 dW}{\partial y^2} + c_{xy} \frac{\partial^2 dW}{\partial x \partial y} - d_{xy} dT \right) + dp = 0 \end{aligned}$$

$$d_x = 2 \int_a^h \eta_1 \sigma_i F_x z dz, \quad d_y = 2 \int_a^h \eta_1 \sigma_i F_y z dz, \quad d_{xy} = 2 \int_a^h \eta_1 \sigma_i F_{xy} z dz$$

$$a_x = 2 \int_a^h \eta \eta_1 F_x S_x z^2 dz - (d_1 + d_2), \quad b_x = 2 \int_a^h \eta \eta_1 F_x S_y z^2 dz - (v_2 d_1 + d_3)$$

$$c_x = 2 \int_a^h \eta \eta_1 F_x S_{xy} z^2 dz, \quad a_y = 2 \int_a^h \eta \eta_1 F_y S_x z^2 dz - (\eta_2 d_1 + d_3)$$

$$b_y = 2 \int_a^h \eta \eta_1 F_y S_y z^2 dz - (d_1 + d_2), \quad c_y = 2 \int_a^h \eta \eta_1 F_y S_{xy} z^2 dz$$

$$a_{xy} = 2 \int_a^h \eta \eta_1 (1 - \nu) F_{xy} S_x z^2 dz, \quad b_{xy} = 2 \int_a^h \eta \eta_1 (1 - \nu) F_{xy} S_y z^2 dz$$

$$c_{xy} = 2 \int_a^h \eta \eta_1 (1 - \nu) F_{xy} S_{xy} z^2 dz - (d_1 (1 - \nu_2) + d_4), \quad d_1 = \frac{2}{3} \frac{E_2 a^3}{(1 - \nu_2^2)}$$

$$d_2 = 2 \int_a^h \frac{E z^2}{1 - \nu^2} dz, \quad d_3 = 2 \int_a^h \frac{\nu E z^2}{1 - \nu^2} dz, \quad d_4 = 2 \int_a^h \frac{E z^2}{1 + \nu} dz$$

$$S_x = (2 - \nu) \sigma_x + (2\nu - 1) \sigma_y, \quad S_y = (2 - \nu) \sigma_y + (2\nu - 1) \sigma_x$$

$$S_{xy} = 2(1 + \nu) \sigma_{xy}, \quad F_x = (f_x + \nu f_y + (1 + \nu) \delta / 3) / \sigma_i$$

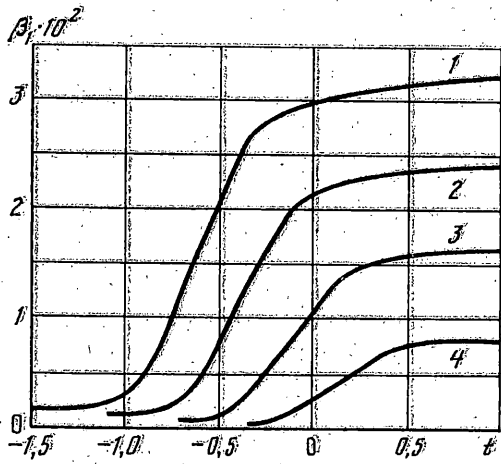
$$F_y = (f_y + \nu f_x + (1 + \nu) \delta / 3) / \sigma_i$$

$$F_{xy} = (1 + \nu) f_{xy} / \sigma_i, \quad \eta_1 = E \beta_2 / (\sigma_i (1 - \nu^2) R)$$

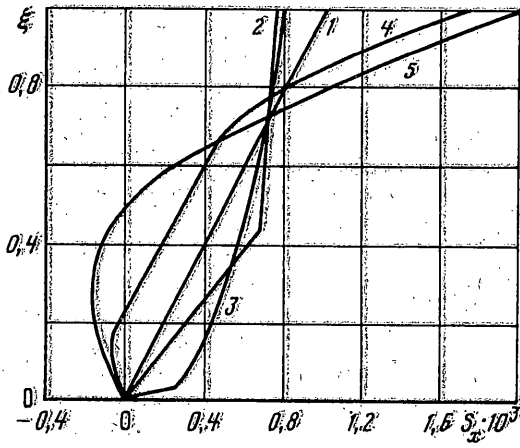
7. Цилиндрический изгиб прямоугольной пластины. Пусть прямоугольная пластина со сторонами, параллельными осям декартовой системы координат, изгибается моментом M_x так, что $\epsilon_y = \epsilon_{xy} = \beta_y = \beta_{xy} = 0$, $\sigma_z = 0$, а все величины ϵ_x , σ_x , σ_y , M_x , M_y , β_y и т.д. не зависят от координаты y . Выражение для приращения момента M_x в этих условиях может быть записано в виде

$$dM_x = a_x d\beta_x - d_x dT \quad (7.1)$$

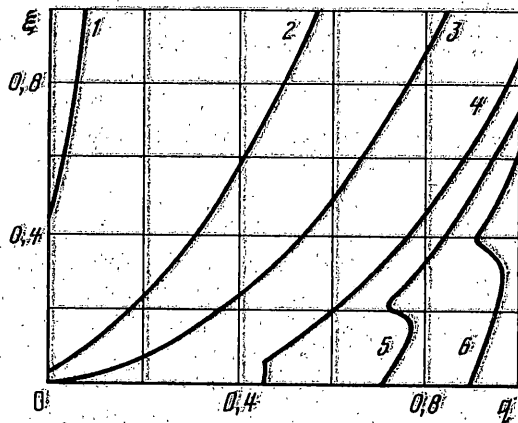
Соотношение (7.1) позволяет найти приращение кривизны $d\beta_x$, если заданы приращения изгибающего момента и(или) температуры и известно напряженно-деформированное состояние. После нахождения приращения кривизны по формуле (7.1) приращение деформаций определяется в соответствии с гипотезой плоских сечений, а приращение напряжений, исходя из определяющих соотношений. Найденные приращения добавляются к значениям напряжений и кривизны, известным для начальной точки рассматриваемого шага по нагрузке и температуре. После этого величина доли маргентситной фазы в рассматриваемой точке пластины определяется по формулам (1.3)



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

или (1.4), а фазовые деформации ξ_x^3, ξ_y^3 как разности между полными $\epsilon_x = \beta_x z, \epsilon_y = 0$ и упругими деформациями.

В соответствии с приведенными формулами была решена задача о прямом превращении в прямоугольной пластине из никелида титана со следующими характеристиками [5]: $a_0 = 0,718, c_0 = 0,243 \times 10^{-3} \text{ МПа}^{-1}, k = 0,2^\circ\text{C} \times \text{МПа}^{-1}, E_1 = 28000 \text{ МПа}, E_2 = 84000 \text{ МПа}, \nu_1 = 0,48, \nu_2 = 0,33$. Пластина в аустенитном состоянии нагружена постоянным изгибающим моментом M_x . При охлаждении кривизна пластины за счет прямого превращения увеличивается, как это показано на фиг. 4. Кривая 1 построена для значения безразмерного изгибающего момента $\mu = 3M_x/(2E_2h^2) = 0,002$, кривая 2 — для $\mu = 0,0015$, 3 — для $\mu = 0,001$, 4 — $\mu = 0,0005$. По оси абсцисс отложено значение параметра $t = (M_1 - T)/(M_1 - M_2)$ монотонно возрастающего при охлаждении, по оси ординат — безразмерная кривизна $\beta_1 = \mu/\beta$. Из-за того, что задача решается в связанной постановке, прямое превращение и соответствующий рост кривизны начинается не

при $t = 0$, а при $t = -E_2k/(M_1 - M_2) \mu \sqrt{1 - \nu_2 + \nu_2^2}$. На фиг. 5 приведены графики изменения безразмерных напряжений $S_x = \sigma_x/E_2$ по толщине пластины ($\xi = z/h$) для случая $\mu = 0,001$. Прямая 1 соответствует упругому решению, а также решению несвязанной задачи о прямом превращении [7], в котором напряжения по толщине пластины всегда распределены линейно. Кривая 2 соответствует $t = -0,5$, 3 — $t = -0,2$. На обеих кривых видны точки перехода от упругой области, прилегающей к нейтральной оси к зоне превращения. Кривые 4 и 5 соответствуют значениям $t = 0,2$ и $t = 1$. Обращает на себя внимание существенное перераспределение напряжений для $t > 0$: средние слои пластины разгружаются (вплоть до возникновения зоны небольших по модулю напряжений противоположного знака), крайние слои — наоборот, перегружаются по сравнению с упругим решением, что может быть опасно для низкопрочного мартенситного состояния.

На фиг. 6 приведены графики распределения по толщине пластины доли мартенситной фазы q . Кривая 1 соответствует $t = -0,5$, 2 — $t = -0,2$, 3 — $t = 0$, 4 — $t = 0,2$, 5 — $t = 0,5$, 6 — $t = 0,7$. Как видно, распределение q по сечению пластины далеко от равномерного, характерного для решения несвязанных задач изгиба. Немонотонное изменение q с ростом z при $t = 0,5$ и $t = 0,7$ связано с прохождением через нуль величины напряжений (см. фиг. 5), в результате чего интенсивность напряжений и зависящая от нее величина q имеют локальные минимумы в некоторой точке сечения. К сожалению, экспериментальные данные по распределению величины q по сечению изгибаемых пластин в литературе отсутствуют. Почти двукратную перегрузку внешних слоев пластины по сравнению с упругим решением (фиг. 5) можно объяснить движением по сечению фронта завершения фазового превращения, после прохождения которого во внешних слоях, где $q = 1$ (фиг. 6) при дальнейшем охлаждении происходит чисто упругое деформирование, в то время как в слоях, примыкающих к нейтральной линии продолжается фазовый переход, сопровождающийся неупругой деформацией.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 96-01-01406).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лихачев В.А., Малинин В.Г. Структурно-аналитическая теория прочности. С.-Петербург: Наука, 1993. 471 с.
2. Ооцука К., Симицзу К., Судзуки Ю. и др. Сплавы с эффектом памяти формы. М.: Металлургия, 1990. 222 с.
3. Мовчан А.А. Микромеханический подход к описанию деформации мартенситных превращений в сплавах с памятью формы // Изв. АН МТТ. 1995. № 1. С. 197–205.
4. Мовчан А.А. Выбор аппроксимации фазовой диаграммы и модели исчезновения кристаллов мартенсита для сплавов с памятью формы // ПМТФ. 1995. № 2: С. 173–181.

5. Мовчан А.А. Микромеханические определяющие уравнения для сплавов с памятью формы // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1994. № 6. С. 47–53.
6. Мовчан А.А. Микромеханический подход к проблеме описания накопления анизотропных рассеянных повреждений // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 3. С. 115–123.
7. Мовчан А.А. Аналитическое решение задач о прямом и обратном превращении для материалов с памятью формы // Изв. АН. МТТ. 1996. № 4. С. 136–144.
8. Мовчан А.А. Некоторые проявления способности к ориентированному превращению для сплавов с памятью формы // ПМТФ. 1996. № 6. С. 181–189.
9. Бречко Т.М., Лихачев В.А. Моделирование эффекта памяти формы // Механика прочности материалов с новыми функциональными свойствами: XXIV Всес. семинар "Актуальные проблемы прочности". Рубежное: 1990. С. 57–60.
10. Ковнеристый Ю.К., Федотов С.Г., Матлахова Л.А. Влияние деформаций на модуль упругости, ЭЗФ, ОЭЗФ и интервалы фазовых превращений TiNi // Сверхупругость, эффект памяти формы и их применение в новой технике: Тез. докл. Всесоюзн. конф. Томск: Изд-е Том. ун-та, 1985. С. 138–139.
11. Корнилов И.И., Белоусов О.К., Качур Е.В. Никелид титана и другие сплавы с эффектом "памяти". М.: Наука, 1977. 179 с.
12. Койтер В.Т. Общие теоремы теории упругопластических сред. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 79 с.
13. Беляев С.П., Егоров С.А., Лихачев В.А., Ольховик О.Е. Мартенситная неупругость и эффект памяти формы в условиях действия давления // Материалы с эффектом памяти формы. Сб. докл. I Рос.-Америк. семинара и XXXI семинара "Актуальные проблемы прочности". С.-Петербург, 1995. Ч. 1. С. 11–19.

Москва

Поступила в редакцию
1.X.1996