

УДК 539.375

© 1998 г. Г.А. ВАНИН

**ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ГРАДИЕНТНОЙ ТЕОРИИ ХРУПКОГО  
РАЗРУШЕНИЯ КОМПОЗИТОВ С ТРЕЩИНОЙ**

На основе соотношений градиентной теории плоского деформированного состояния композиционной среды [1] построено решение плоской задачи о хрупком разрушении при наличии сквозной трещины второго уровня, когда длина последней превосходит наибольший размер неоднородности. Установлено, что в случае трещины нормального разрыва в отличие от классической теории разрушение в принципе может инициироваться как нормальными, так и градиентными напряжениями. Поэтому в статье рассмотрены интенсивности напряжений у кончика трещины для обоих состояний. Исследование особенностей в напряженном состоянии у трещины в рамках моментной теории упругости однородных изотропных сред детально проведено другим методом в [2]. Непосредственное применение моментной теории упругости, как известно, встречает трудности как в определении фундаментальных постоянных, так и при интерпретации напряженного состояния. Теоретическое определение механических характеристик композитов на основе градиентной теории установлено с помощью алгоритмов, предложенных ранее [1, 3].

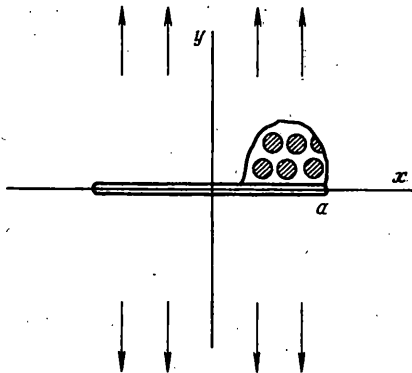
Учитывая большую роль инвариантных интегралов в механике разрушения, найден инвариантный интеграл, учитывающий влияние градиентных компонентов напряжения на состояние у трещины, и на его основе предложен критерий разрушения. Конкретные результаты рассмотрены применительно к первому градиентному состоянию в армированной и пористой средах с регулярной структурой.

1. В соответствии с принятой классификацией [3] состояние основного уровня компонентов композитов моделируется однородной изотропной или анизотропной упругой средой. Плоское состояние первого масштабного уровня композитов установлено комплексными потенциалами для компонентов среды (волокна и матрицы)  $\varphi_a(z)$ ,  $\psi_a(z)$ ,  $\varphi(z)$ ,  $\psi(z)$  и вещественной функцией поворотов  $\omega_3 = \Omega$  в [1], где они найдены в явном виде для первого градиентного состояния. Для определенности в дальнейшем рассматривается поперечное состояние линейно-армированных сред с трещиной второго масштабного уровня в матрице, когда длина трещины превышает диаметр поперечного сечения элементарного волокна. Интегральные упругие постоянные безградиентного состояния линейно-армированных сред с двоякопериодической структурой общего вида определены ранее [4]. Их приближенные значения, удовлетворительно согласующиеся с точными формулами для простой (гексагональной) упаковки структуры при объемном содержании волокон  $\xi \leq 0,7$  установлены асимптотическими разложениями

$$\hat{G} = G[\chi + \zeta + (1 - \zeta)G / G_a][(1 - \zeta)\chi + (1 + \zeta\chi)G / G_a]^{-1} + \dots \quad (1.1)$$

$$v_{21} = v - (\chi + 1)(v - v_a)\zeta d + \dots + d = \{2 + \zeta(\chi - 1) + (1 - \zeta)(\chi_a - 1)G / G_a\}^{-1}$$

$$v_{12} = v_{21}E_2 / E_1, \quad v_{23} = 1 - v_{12}v_{21} - E_2(4G)^{-1}\{\chi - 1 - (\chi + 1)\zeta[\chi - 1 - (\chi_a - 1)G / G_a]d\}$$



Фиг. 1

$$E_2^{-1} = v_{21}^2 / E_1 + (4\hat{G})^{-1} + (8G)^{-1} [2(1-\zeta)(\kappa-1) + (\kappa_a-1)(\kappa-1+2\zeta)G/G_a]d + \dots$$

$$\hat{\kappa} = 3 - 4(v_{23} + v_{12}v_{21})(1+v_{23})^{-1}, \quad E_1 = \zeta E_a + (1-\zeta)E - 8G\zeta(1-\zeta)(v-v_a)d + \dots$$

Здесь и везде в дальнейшем индексом  $a$  отмечены величины, относящиеся к волокнам, без индексов – к матрице или ко всем компонентам одновременно. Остальные обозначения общепринятые в теории упругости анизотропных тел [5]. Ось  $x_1$  совмещена с направлением ориентации волокон. Интегральные постоянные первого градиентного состояния композиционной среды определены в [1], их парциальные разложения будут

$$l^2 = R_0(2\hat{G})^{-1}, \quad R_0 = \beta R^2 = R^2 GL^2 L_0^2 (\hat{\kappa} + 1)^{-1} [(p+q)L_0^2 + (p+9q)L^2]^{-1} \quad (1.2)$$

$$L = \hat{\kappa} + 1 + \zeta^2 [\hat{\kappa}(\kappa - \kappa_a G/G_a)(1 + \kappa_a G/G_a)^{-1} + (1 - G/G_a)(\kappa + G/G_a)^{-1}] + \dots$$

$$L_0 = \hat{\kappa} + 9 - 3\zeta^2 / 2(\hat{\kappa} - 1)(1 - G/G_a)(\kappa + G/G_a)^{-1} + \zeta^2 / 2(\kappa - \zeta)(\kappa - \kappa_a G/G_a)(1 +$$

$$+ \kappa_a G/G_a)^{-1}$$

$$p = \kappa + \zeta^2(\kappa - 1)(\kappa - \kappa_a G/G_a)(1 + \kappa_a G/G_a)^{-1} +$$

$$+ \zeta^4(\kappa - \kappa_a G/G_a)^2(1 + \kappa_a G/G_a)^{-2} + \dots$$

$$q = 1 - \zeta^2(\kappa - 1)(1 - G/G_a)(\kappa + G/G_a)^{-1} -$$

$$- \zeta^4[\kappa + 8(1 - \zeta)^2](1 - G/G_a)^2(\kappa + G/G_a)^{-2} + \dots$$

где  $R$  – радиус окружности, ограничивающий равновеликую область усреднения; количественная зависимость фундаментальной постоянной  $l^2$  от  $\zeta$  и характеристик компонентов армированной среды, рассмотрена в [1].

Состояние среды с гексагональной структурой на втором масштабном уровне (фиг. 1) с учетом первого градиентного состояния определено соотношениями [1]:

$$\hat{\sigma} = 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}], \quad \sigma = \sigma_{22} + \sigma_{33}, \quad \Sigma = \sigma_{33} - \sigma_{22} + 2i\sigma_{23}$$

$$\hat{\Sigma} = 2[\overline{z}\varphi''(z) + \psi'(z)] + 2i\partial(m_{32} - im_{23}) / \partial z \quad (1.3)$$

$$2\hat{G}U = \hat{\kappa}\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} + i(m_{32} + im_{23})$$

$$m_{32} + im_{23} = i\mu a^2 / 4\overline{\varphi''(z)} + 4R_0\partial\Omega / \partial\bar{z}, \quad \mu = 8(\hat{\kappa} + 1)l^2 / a^2$$

$$U = u_2 + iu_3, \quad \Omega = \frac{1}{2}(\partial u_3 / \partial x - \partial u_2 / \partial y), \quad \nabla^2\Omega - l^{-2}\Omega = 0$$

Для упрощения выкладок вводим наряду с обычными  $\sigma_{ik}$  приведенные напряжения

$$\begin{aligned}\Sigma_{kk} &= \sigma_{kk}, \quad \Sigma_{23} = \sigma_{23} + \frac{1}{2}(m_{32}^1 + m_{23}^{01}) \\ \Sigma_{32} &= \sigma_{23} - \frac{1}{2}(m_{32}^1 + m_{23}^{01}), \quad \partial \Sigma_{ik} / \partial x_k = 0 \\ m_{32}^1 + m_{23}^{01} &= 4\hat{G}\Omega\end{aligned}$$

В качестве модели контура трещины  $h$  рассмотрим кривые, образованные преобразованием  $z = x + iy = w(\chi)$ ,  $\chi = \xi + i\eta$ ;  $\xi, \eta$  — изотермические координаты. В криволинейных координатах  $\xi, \eta$  первая квадратичная форма, производные по нормали  $(\partial / \partial n)$  к контуру  $h$  и дуге  $(\partial / \partial s)$ , а также соответствующие кривизны будут

$$\begin{aligned}ds^2 &= |w'(\chi)|^2 (d\xi^2 + d\eta^2), \quad \nabla^2 = \partial^2 / \partial n^2 + \partial^2 / \partial s^2 + \rho_n^{-1} \partial / \partial n + \rho_s^{-1} \partial / \partial s \\ \partial / \partial n &= H^{-1} \partial / \partial \xi, \quad \partial / \partial s = H^{-1} \partial / \partial \eta, \quad H^2 = |w'(\chi)|^2 \\ e^{-2i\theta} &= \overline{w'(\chi)} / w'(\chi), \quad \varepsilon_1 / \rho_s = -\partial \ln H / \partial s, \quad \varepsilon_2 / \rho_n = -\partial \ln H / \partial n\end{aligned}\tag{1.4}$$

где  $\varepsilon_1 > 0$  ( $\varepsilon_2 > 0$ ), если касательный вектор к кривой  $\xi = \text{const}$  ( $\eta = \text{const}$ ) направлен в сторону выпуклости кривой  $\eta = \text{const}$  ( $\xi = \text{const}$ ).

Приведенные напряжения и моменты на контуре  $z \in h$  будут

$$\begin{aligned}\Sigma_{nn} - i\Sigma_{sn} &= (\Sigma_{2j} - i\Sigma_{3j})n_j e^{i\theta} = \Phi(\chi) + \overline{\Phi(\chi)} - \overline{w'(\chi)}^{-1} \{ \overline{w(\chi)} \Phi'(\chi) + \\ &+ w'(\chi) \Psi(\chi) + \mu a^2 / 4 [w'(\chi)]^{-2} [w'(\chi) \Phi''(\chi) - w''(\chi) \Phi'(\chi)] + \\ &+ iR_0 (\nabla^2 - 4e^{2i\theta} \partial^2 / \partial z^2) \Omega\end{aligned}\tag{1.5}$$

$$\begin{aligned}m_n &= m_{32}n_2 + m_{23}n_3 = 2R_0 \partial / \partial n \{ \Omega - i(1 - \hat{\nu}) \hat{G}^{-1} [\Phi(\chi) - \overline{\Phi(\chi)}] \} \\ \nabla^2 &= 4e^{2i\theta} \partial^2 / \partial z^2 = 2(\partial^2 / \partial s^2 + \rho_n^{-1} \partial / \partial n + \rho_s^{-1} \partial / \partial s) + \\ &+ i(\partial^2 / \partial n \partial s + \partial^2 / \partial s \partial n + \rho_s^{-1} \partial / \partial n + \rho_n^{-1} \partial / \partial s) \\ \Phi(z) &= \Phi'(z), \quad \Psi(z) = \Psi'(z), \quad n_2 = \cos \theta, \quad n_3 = \sin \theta\end{aligned}$$

Рассмотрим хрупкое разрушение неограниченной композитной среды со сквозным вырезом и растянутой напряжениями  $\sigma_3$ . Предельные при  $|z| \rightarrow \infty$  значения потенциалов второго уровня будут

$$\Phi(z) \rightarrow z\sigma_3 / 4, \quad \Psi(z) \rightarrow z\sigma_3 / 2, \quad \Omega \rightarrow 0\tag{1.6}$$

Берега трещины ( $z \in h$ ) свободны от напряжений, поэтому  $\Sigma_{nn} - i\Sigma_{sn} = 0$ ,  $m_n = 0$ . Последние приводят к системе граничных уравнений для функций, определяющих состояние на втором масштабном уровне ( $\chi \in h$ ):

$$\begin{aligned}\Phi(\chi) + \overline{\Phi(\chi)} - \overline{w'(\chi)}^2 \Phi'(\chi) - w'(\chi) \overline{w'(\chi)}^{-1} \Psi(\chi) - \\ - \mu a^2 / 4 [w(\chi)]^{-2} [\Phi''(\chi) - w''(\chi) w'(\chi)^{-1} \Phi'(\chi)] + 2iR_0 (\partial^2 / \partial s^2 + \\ + \rho_n^{-1} \partial / \partial n + \rho_s^{-1} \partial / \partial s) \Omega - R_0 (\partial^2 / \partial n \partial s + \partial^2 / \partial s \partial n + \rho_s^{-1} \partial / \partial n - \rho_n^{-1} \partial / \partial s) \Omega = 0 \\ \partial \Omega / \partial n - i(1 - \hat{\nu}) \hat{G}^{-1} |w'(\chi)|^{-1} [\Phi'(\chi) - \overline{\Phi(\chi)}] = 0, \quad \hat{\nu} = (3 - \hat{\kappa}) / 4\end{aligned}\tag{1.7}$$

2. В качестве простейшей модели трещины примем предельное значение эллиптического выреза, когда его меньшая полуось  $b \rightarrow 0$ . Вводим эллиптическую систему

координат  $\xi, \eta$  преобразованием  $w(\chi) = c/2(\chi + \chi^{-1})$ ,  $\chi = \exp(\xi + i\eta)$ ,  $c^2 = a^2 - b^2$ , где  $a, b$  — большая и меньшая полуоси граничного эллипса.

Уравнение Гельмгольца в (1.3) для функции  $\Omega = U(\xi)V(\eta)$  допускает разделение переменных

$$U'' + (v_0 + 2q \operatorname{ch} 2\xi)U = 0, \quad V'' + (v_0 + 2q \cos 2\eta)V = 0 \quad (2.1)$$

$$H^2 = c^2 / 2(\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta), \quad q = a^2 \hat{G}(2\beta R^2)^{-1}, \quad \beta = R_0 R^{-2}$$

где  $v_0$  — постоянная разделения. Решения уравнений (2.1) выражаются через функции Матье [6]. Искомая функция поворотов, удовлетворяющая условиям затухания при  $\xi \rightarrow \infty$  и условиям симметрии по переменной  $\eta$ , будет

$$\Omega(\xi, \eta) = \sigma_3 \sum_{r=0}^{\infty} C_{2r+2} \frac{\operatorname{Gek}_{2r+2}(\xi, -q)}{\operatorname{Gek}_{2r+2}(0, -q)} \operatorname{se}_{2r+2}(\eta, -q) \quad (2.2)$$

Для определенности приводим соотношения между коэффициентами выбранных разложений функций Матье в тригонометрические ряды

$$\operatorname{se}_{2n+2}(\eta, q) = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+2}^{(2n+2)} \sin(2r+2)\eta \quad (2.3)$$

$$\operatorname{se}_{2n+2}(\eta, -q) = (-1)^n \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r B_{2r+2}^{(2n+2)} \sin(2r+2)\eta$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} [B_{2r+2}^{(2n+2)}]^2 = 1, \quad \int_0^{2\pi} \operatorname{se}_{2n+2}^2(\eta, -q) d\eta = \pi$$

Разложение радиальных функций Матье принимаем в виде рядов по произведениям функций Бесселя [6]:

$$\begin{aligned} \operatorname{Gek}_{2n+2}(\xi, -q) &= s'_{2n+2} (\pi B_2^{(2n+2)})^{-1} \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+2}^{(2n+2)} [J_r(v_1) K_{r+2}(v_2)] = \\ &= J_{r+2}(v_1) K_r(v_2)], \quad v_1 = q^{1/2} e^{-\xi}, \quad v_2 = q^{1/2} e^{\xi} \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$s'_{2n+2} = (-1)^{n+1} s_{2n+2} = (-1)^{n+1} \operatorname{se}'_{2n+2}(0, q) \operatorname{se}_{2n+2}(\pi/2, q) (q B_2^{(2n+2)})^{-1}$$

Комплексные потенциалы, удовлетворяющие условиям затухания и четности по переменной  $\eta$ , ищем в виде

$$\Phi(\chi) = \frac{\sigma_3}{4} + \sigma_3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{2n}}{2n} \exp(-2n\chi) \quad (2.5)$$

$$\Psi(\chi) = \frac{\sigma_3}{2} + \sigma_3 \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n} \exp(-2n\chi), \quad \chi = \xi + i\eta$$

Удовлетворяя второму краевому условию (1.7) и учитывая разложение (2.2) и (2.5), получим соотношения между коэффициентами разрешающих функций

$$C_{2r+2} = (\tilde{\chi} + 1) (-1)^r (2\hat{G})^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m B_{2m}^{(2r+2)} A_{2m} \quad (2.6)$$

Первое граничное условие (1.7) преобразуем с учетом соотношений (2.1) и второго

краевого уравнения (1.7), а также предельных переходов  $c \rightarrow a$ ,  $\xi \rightarrow 0$ ,  $\chi \rightarrow i\eta$ :

$$ia^2 \sin^3 \eta [\phi(\chi) + \overline{\phi(\chi)}] + [a^2 \cos \eta \sin^2 \eta + \mu a^2 / 4 \cos \eta] \phi'(\chi) + \\ + ia^2 \sin^3 \eta \Psi(\chi) + 2R_0 \sin \eta (v_0 + 2q \cos 2\eta) \Omega + \\ + i\mu a^2 / 8 \sin \eta [\phi''(\chi) - \overline{\phi''(\chi)}] = 0$$

Отделяя вещественные части от мнимых, приходим к двум связанным бесконечным системам неоднородных алгебраических уравнений:

$$\frac{A_4}{2} - 2A_2 - 2B_2 + 6 = \mu(2A_2 + \sum_{m=1}^{\infty} p_{2m} A_{2m}) \quad (2.7)$$

$$A_{2n+6}/(n+3) - 3A_{2n+4}/(n+2) + 3A_{2n+2}/(n+1) - A_{2n}/n - 2\delta_{n0} = \\ = \mu[2(2+n)A_{2n+4} - 2(n+1)A_{2n+2} - (-1)^n \sum_{m=1}^{\infty} p_{2m}^{(2n+2)} A_{2m}]$$

$$B_4 - 4B_2 - 2A_2 - A_4 / 2 + 6 = -\mu A_2$$

$$B_{2n+6} - 3B_{2n+4} + 3B_{2n+2} - B_{2n} - (n+1)A_{2n} / n + (n+4)A_{2n+2} / (\mu+1) + \\ + (n-1)A_{2n+4} / (n+2) - (n+2)A_{2n+6} / (n+3) - 2\delta_{n0} = -\mu(A_{2n+2} + A_{2n+4})$$

$$p_{2m} = - \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\text{Gek}_{2r+2}(0, -q)}{\text{Gek}'_{2r+2}(0, -q)} B_{2m}^{(2r+2)} (v_0 B_2^{(2r+2)} - q B_4^{(2r+2)}) \quad (2.8)$$

$$p_{2m}^{(2n+2)} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\text{Gek}_{2r+2}(0, -q)}{r_0 \text{Gek}'_{2r+2}(0, -q)} B_{2m}^{(2r+2)} \left[ q(B_{2n}^{(2r+2)} + B_{2n+6}^{(2r+2)}) - \right.$$

$$\left. - (v_0 - q)(B_{2n+2}^{(2r+2)} + B_{2n+4}^{(2r+2)}) \right], B_0 = 0, A_0 / 0 = 0, n = 0, 1, \dots, \delta_{nn} = 1$$

Если влияние градиентного состояния мало  $\mu \approx 0$ , то предполагая аналитическую зависимость коэффициентов  $A_{2n}$ ,  $B_{2n}$  от параметра  $\mu$ , ищем решение систем (2.7) в виде формальных степенных рядов вида

$$A_{2n} = a_{2n} + \mu a'_{2n} + \mu^2 a''_{2n} + \dots, B_{2n} = b_{2n} + \mu b'_{2n} + \mu^2 b''_{2n} + \dots \quad (2.9)$$

Специфика первой системы (2.7) конечно-разностных уравнений в том, что коэффициенты  $A_{2n}$  с ростом индекса растут. Члены под знаком суммы возрастают значительно медленнее, поэтому решение строится по методу последовательных приближений. В первом приближении отбрасываются члены, стоящие под знаком суммы. Полученная таким образом усеченная система может быть решена в явном виде. Вводя переменные  $X_n = A_{2n}/n$  приводим первую систему к виду

$$X_{n+3} - 3X_{n+2} + 3X_{n+1} - X_n = 2\delta_{n0} + \mu[2(n+2)^2 X_{n+2} - \quad (2.10)$$

$$-2(n+1)^2 X_{n+1} - (-1)^n \sum_{m=1}^{\infty} m p_{2m}^{(2n+2)} X_m]$$

Решение усеченной системы ищем в виде  $X_n = X_n^0 + \mu X_n^1 + \mu^2 X_n^2 + \dots$  или  $X_n = C_0 x^n + \mu C_1 n^k + \mu^2 C_2 n^m + \dots$ . Окончательный результат может быть получен в явном виде для любого приближения

$$X_n = 2 + \mu n^4 / 3 + \mu^2 (3n^8 - 14n^6 + 21n^4) / 252 + \dots \quad (2.11)$$

Решение полной системы возможно только численно с учетом поправок, вносимых членами под знаком суммы. Пользуясь решением усеченной системы, определяем вклад членов, стоящих под знаком бесконечной суммы при заданном  $n$ . Затем на основе системы алгебраических уравнений находим  $A_{2n}$  и  $B_{2n}$ , полагая известными  $A_2$  и  $B_2$ . Таким способом удается последовательно находить искомые коэффициенты  $A_{2n}$ ,  $B_{2n}$  для каждого  $n$ . Асимптотическое разложение потенциальной функции  $\phi(z)$  находим путем суммирования частных решений, используя представление

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k \exp(-2n\chi) = \frac{(-1)^k}{2^{k+1}} \frac{d^k}{d\chi^k} \left( \frac{z/a}{\sqrt{(z/a)^2 - 1}} - 1 \right)$$

$$\phi(z) = -\frac{\sigma_3^\circ}{4} + \frac{\sigma_3^\circ z/a}{2\sqrt{(z/a)^2 - 1}} q_0(z) + \dots$$

$$q_0(z) = 1 + \mu/6 + 533\mu^2/1008 - (35\mu + 47\mu^2)p_2(z)/84 +$$

$$+ (42\mu + 301\mu^2)p_4(z)/168 - 175\mu^2 p_6(z)/56 + 105\mu^2 p_8(z)/112 + \dots$$

$$p_{2n}(z) = (z/a)^{2n} [(z/a)^2 - 1]^{-n} \quad (2.12)$$

Решение второй бесконечной системы (2.7) строится аналогично. Используя введенные обозначения, представим систему в виде

$$2B_2 = 6 - (2\mu + 2)X_1 - X_2, \quad B_4 = 4B_2 - 6 - (\mu - 2)X_1 + X_2$$

$$B_{2n+6} - 3B_{2n+4} + 3B_{2n+2} - B_{2n} = 2\delta_{n0} + (n+2)X_{n+3} -$$

$$- [\mu(n+2) + n - 1]X_{n+2} - [\mu(n+1) + n + 4]X_{n+1} + (n+1)X_n \quad (2.13)$$

Подставляя  $X_n$  по (2.11) в правую часть, последнее уравнение приводим к виду

$$B_{2n+6} - 3B_{2n+4} + 3B_{2n+2} - B_{2n} = \alpha_0 + \alpha_1 n + \dots + \alpha_9 n^9$$

Однородное конечно-разностное уравнение решается с помощью подстановки  $B_{2n}^\circ = \lambda_1 n + \lambda_2 n^2$ . Общее решение ищется в виде

$$B_{2n} = 2n^2 + \lambda_3 n^3 + \dots + \lambda_{12} n^{12} \quad (2.14)$$

Коэффициенты  $\alpha_k$  и  $\lambda_k$  имеют громоздкий вид и легко находятся, поэтому их явное выражение здесь не приводится. Из (2.5) и (2.14) установлено асимптотическое разложение комплексной функции

$$\Psi(z) = \frac{\sigma_3^\circ}{2} \left\{ 1 + q_1(z) + \frac{z/a}{4\sqrt{(z/a)^2 - 1}} [-4 + 4\lambda_4 - 17\lambda_6 + (4 - 10\lambda_4 -$$

$$- 123\lambda_6 p_2(z) + (6\lambda_4 - 105\lambda_6) p_4(z) + \dots] \right\} \quad (2.15)$$

$$q_1(z) = (\lambda_3 - \lambda_5)/4 - (\lambda_3 + 145\lambda_5)p_2(z)/2 - (3\lambda_3 + 30\lambda_5)p_4(z)/8 + \dots$$

С помощью функций (2.12) и (2.15) находим асимптотическое распределение нормальных напряжений на площадках  $y = 0$ :

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_3^\circ}{2} \left[ q_1(x) + \frac{x/a}{\sqrt{(x/a)^2 - 1}} q_2(x) - \frac{x/a}{[(x/a)^2 - 1]^{3/2}} q_3(x) + \dots \right] \quad (2.16)$$

$$q_2(z) = 1 + \mu/3 + 533\mu^2/504 + \lambda_4 - 17\lambda_6/4 + (1 - \lambda_3/2 - 71\lambda_5 -$$

$$= 5\lambda_4 / 2 - 123\lambda_6 / 4) p_2(z) + (42\mu + 301\mu^2 + 126\lambda_4 - 2205\lambda_6) p_4(z) / 84 + \dots$$

$$q_3(z) = 1 + \mu / 6 + 533\mu^2 / 1008 - (35\mu + 47\mu^2) p_2(z) / 84 + (240\mu + 1505\mu^2) p_4(z) / 168 + \dots$$

В [2,7] выделена только классическая особенность в распределении напряжений у конца трещины по моментной теории упругости. Появление вместо корневой существенной сингулярности в напряжениях обусловлено производной  $\phi'''(z)$  в формуле (1.3). Из вышеприведенных асимптотических разложений следует, что напряжения у концов трещины растут по более сложному закону нежели в классической теории упругости. Поэтому применение критерия хрупкого разрушения Ирвина, основанного на выделении коэффициента интенсивности напряжений при классическом законе их роста, неприемлемо.

Рассмотрим распределение моментных напряжений, вызванных градиентным состоянием на площадках, перпендикулярных контуру трещины

$$m_s = 2R_0 \partial \Omega / \partial s + \mu a^2 / 8 [\phi'(z) e^{i\theta} + \overline{\phi'(z)} e^{-i\theta}] \quad (2.17)$$

Учитывая разложение  $\partial / \partial s = H^{-1} \partial / \partial \eta \approx (2ar)^{-1/2} \partial / \partial \eta$ ,  $r$  – расстояние от кончика трещины, и полагая  $\eta = 0$ , получим

$$m_s = \frac{2R_0}{\sqrt{2ar}} \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} - \frac{\mu a \sigma_3}{16[(x/a)^2 - 1]^{3/2}} f(x) + \dots \quad (2.18)$$

$$f(z) = 1 + \mu / 6 + 533\mu^2 / 1008 - (35\mu + 47\mu^2) p_2(z) / 28 - \\ - (42\mu + 301\mu^2) [5(z/a)^2 + 1] [(z/a)^2 - 1]^{-1} p_4(z) / 168 + \dots$$

Ранее отмечалось, что функция  $\Omega(0, \eta)$  не имеет особенностей по контуру трещины [8]. Приведенное распределение моментов отличается от найденных ранее решений (2.7) тем, что наряду с корневой появились более сложные особенности у концов трещины. Установленное градиентной теорией повышенное по сравнению с классической теорией возрастание напряжений и смещений у концов трещины приведет к более развитым пластическим деформациям.

3. Для дальнейшего установим существование контурного интеграла, учитывающего градиентное состояние у трещины и независящего от пути интегрирования. По аналогии с градиентной теорией продольного сдвига с трещиной [8] для исследования состояний в условиях плоского деформированного состояния тел со сквозными трещинами введем  $g_m$ -интеграл

$$g_m = \int_{\Gamma} \left( W n_2 - \Sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x} - m_n \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right) ds \quad (i, j = 2, 3) \quad (3.1)$$

где  $\Gamma$  – контур, охватывающий конец трещины,  $n_i$  – проекции единичной внешней нормали к  $\Gamma$  на соответствующие оси координат; трещина направлена по оси  $x$ . Полагаем, что условия применимости  $g_m$ -интеграла совпадают с ограничениями, накладываемыми на  $J$ -интеграл [2,10], тем более, что из (3.1) при  $\mu = 0$  нетрудно получить  $J$ -интеграл. Плотность энергии деформирования определяем суммой состояний

$$W(\sigma_{ik}, \epsilon_{ik}, m_{ik}, \chi_{ik}) = \int_0^{\epsilon} \sigma_{ik} d\epsilon_{ik} + \int_0^{\chi} m_{ik} d\chi_{ik}$$

Для доказательства независимости интеграла (3.1) от пути интегрирования используем формулу Стокса

$$\int_F \frac{\partial v_k}{\partial x_k} dF = \int_{\Gamma} v_k n_k ds, \quad x_2 = x, \quad x_3 = y$$

где  $F$  – площадь, ограниченная контуром  $\Gamma$ .

Имеем легко доказуемые соотношения

$$\sigma_{ij} \partial \varepsilon_{ij} / \partial x = \partial (\sigma_{ij} \partial u_i / \partial x) \partial x_j - \partial \sigma_{ij} / \partial x_j \partial u_i / \partial x$$

$$\oint \Sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x} ds = \int \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) dF$$

$$\oint m_n \frac{\partial \Omega}{\partial x} ds = \int \left[ (m_{23}^{01} + m_{32}^1) \frac{\partial \Omega}{\partial x} + m_{23} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} + m_{32} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} \right] dF$$

Подстановка этих выражений в интеграл (3.1) приводит к формуле

$$g_m = \int \left\{ \left[ -\frac{\partial \sigma_{2j}}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 m_{32}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_{23}}{\partial y^2} \right) \right] \frac{\partial u_2}{\partial x} + \left[ -\frac{\partial \sigma_{3j}}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 m_{32}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_{23}}{\partial x \partial y} \right) \right] \frac{\partial u_3}{\partial x} \right\} ds = 0 \quad (3.2)$$

в силу уравнений равновесия [1]. Если  $\Gamma$  составить из двух контуров, охватывающих конец трещины как в классическом случае [9], то значение  $g_m$ -интеграл не изменится. Потенциальная энергия тела с надрезом  $\pi$  будет

$$\pi = \int_F W dF - \int_{\Gamma_e} (\Sigma_{ij} n_j u_i + m_n \Omega) ds$$

Здесь  $\Gamma_e$  — часть контура  $\Gamma$ , на котором заданы приведенные напряжения и момент. Если совершается переход от одного состояния к другому и длина трещины подрастает на величину  $\delta a$ , то уменьшение потенциальной энергии при сохранении очертания контура у конца трещины будет

$$-\frac{\partial \pi}{\partial a} = g_m = \int_F \frac{\partial W}{\partial a} dF - \int_{\Gamma_e} \left( \Sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial a} + m_n \frac{\partial \Omega}{\partial a} \right) ds \quad (3.3)$$

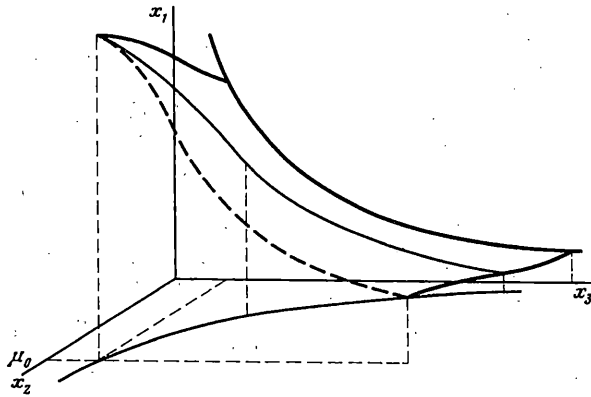
Как видно,  $g_m$ -интеграл может быть представлен через интенсивность освобождения потенциальной энергии при локальном росте трещины. Поэтому соотношение (3.3) и предлагается в качестве критерия разрушения хрупкого тела с учетом градиентного состояния в его структуре. Для первого градиентного состояния  $m = 1$ , а параметр разрушения будет  $g_1$ . Отметим, что найденный критерий хрупкого разрушения при выбранных характеристиках материала зависит как от длины трещины  $2a$ , так и от отношения  $R/a$ , входящего в параметр  $\mu = 4(\hat{\chi} + 1)\beta \hat{G}^{-1}(R/a)^2$ . Если по оси  $x_1$  отложить критические напряжения, по  $x_3$  и  $x_2$  соответственно — зависимость их от длины трещины и параметра  $\mu$ , то предельное состояние можно представить в виде поверхности (фиг. 2), где точка  $\mu_0$  определена неравенством  $R/a < 1$ . Состояния при  $\mu > \mu_0$  устанавливаются при рассмотрении трещин первого масштабного уровня. Учет высших градиентных состояний при разрушении тел, находящихся в условиях плоского деформированного состояния, осуществляется добавлением моментных членов в подинтегральное выражение (3.3). Аналогичный критерий разрушения тел в условиях продольного сдвига, где удалось построить полное решение задачи [8], имеет вид

$$g_m = \int \left( W n_2 - T_{1n} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2} m_{ik} \varepsilon_k n_k \frac{\partial \gamma_{li}}{\partial x} - M_{ik}^{s+m+1} \frac{\partial \chi_{ik}^{sm}}{\partial x} \right) ds$$

Последнее слагаемое характеризует вклад вторых и последующих градиентных состояний.

Как известно [7, 9, 10], концепция  $J$ -интеграла широко используется в механике





Фиг. 2

упругопластического разрушения. Введение  $g_m$ -интеграла вносит поправки в указанные теории, т.к. его отличие от  $J$ -интеграла будет тем больше, чем значительнее возрастает параметр  $l^2 = R_0 / (2\hat{G})$ . Числитель  $R_0$  зависит от эффектов Пуассона структурных элементов, пропорционален  $R^2$ , определяющего площадь усреднения и при заданном  $R^2$  может изменяться в ограниченных пределах. Интегральный модуль  $\hat{G}$  чувствителен к концентрации в элементарном объеме пор, трещин и нелинейной деформации компонентов. Поэтому существенные эффекты от учета градиентного состояния следует также ожидать в локальных зонах у границы между упругими и пластическими областями деформирования материала. Отметим, что решение (2.16) остается справедливым только для второго масштабного уровня, когда длина трещины или расстояние от ее кончика превышает наибольший размер неоднородности, например, диаметр отдельного волокна. При уменьшении размеров трещины или приближении к ее концу состояние в этих случаях исследуется на основе соотношений для следующего масштабного уровня. Поэтому найденное решение в связи с появлением более сильной, чем классическая особенность не приводит к физически противоречивым результатам. Проблема согласования состояний вблизи концов трещины или при уменьшении ее размеров при переходе на следующий масштабный уровень представляет собой самостоятельную задачу.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ванин Г.А. Градиентная теория плоского деформированного состояния многоуровневых сред // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 3. С. 5–15.
2. Морозов Н.Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. 255 с.
3. Ванин Г.А. Градиентная теория сдвига многоуровневых композитов // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 1. С. 120–127.
4. Ванин Г.А. Микромеханика композиционных материалов. Киев: Наук. думка, 1985. 302 с.
5. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.
6. Мак-Лахлан Н.В.: Теория и приложения функций Матье. М.: Изд-во иностр. лит., 1953. 476 с.
7. Си Г., Либовиц Г. Математическая теория хрупкого разрушения. // Разрушение. М.: Мир, 1975. Т. 2. С. 83–203.
8. Ванин Г.А. Градиентная теория сдвига композитов с трещиной // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 4. С. 114–121.
9. Плювинаж Г. Механика упруго-пластического разрушения. М.: Мир, 1993. 448 с.
10. Эрдоган Ф., Кобаяси А., Атаури С. и др. Вычислительные методы в механике разрушения. М.: Мир, 1990. 391 с.

Москва

Поступила в редакцию  
4.IX.1995