

УДК 539.375

© 1998 г. Н.В. БАНИЧУК, Е.В. МАКЕЕВ, В.В. САУРИН

**О ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ УСЛОВИЙ КВАЗИХРУПКОГО
РАЗРУШЕНИЯ К ИЗМЕНЕНИЯМ ФОРМЫ ТЕЛА**

Работа посвящена получению эффективных соотношений, связывающих вариации скорости высвобождения упругой энергии при развитии трещин с вариациями геометрических параметров, определяющих конфигурацию деформируемого тела. Для вывода соотношений анализа чувствительности применяется подход, основанный на описании процесса высвобождения энергии через инвариантный контурный J -интеграл Эшелби – Райса. С использованием преобразования, указанного в [1], для повышения точности вычислений контурный J -интеграл представляется в форме двумерного интеграла по некоторой области, охватывающей конец трещины. Применение варьирования неизвестных границ и введение системы сопряженных уравнений позволяет получить искомые представления для вариации J -интеграла через вариации формы упругого тела. Приведены результаты численного решения задачи анализа чувствительности.

1. Основные соотношения задачи о нагружении упругого тела с трещиной. Пусть плоское упругое тело занимает область Ω с границей Γ , на части которой Γ_σ заданы нагрузки T , а на другой части Γ_u – тело жестко закреплено. Имеющаяся трещина моделируется прямолинейным разрезом Γ_f (фиг. 1), берега которого свободны от прикладываемых нагрузок. Напряженно-деформированное состояние тела с трещиной описывается следующей краевой задачей теории упругости:

$$\nabla \cdot \sigma = 0, \quad \sigma = C \cdot \epsilon, \quad \epsilon = \frac{1}{2} (\nabla u + (\nabla u)^T) \quad (1.1)$$

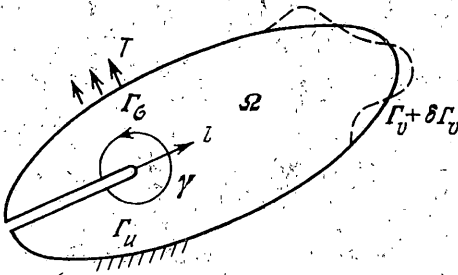
$$(\sigma \cdot n)_{\Gamma_\sigma} = T, \quad (u)_{\Gamma_u} = 0, \quad (\sigma \cdot n)_{\Gamma_f} = 0 \quad (1.2)$$

Здесь σ , ϵ , u – тензоры напряжений, деформаций и вектор перемещений, а через C и n в (1.1), (1.2) обозначены тензор модулей упругости и нормаль к поверхности тела Γ и к границе разреза Γ_f . Точкой и двумя точками обозначены операции скалярного и двойного скалярного произведений. В качестве основной характеристики, фигурирующей в условии начала развития трещины (условие квазистатического распространения трещины в идеально хрупких и квазихрупких материалах [2, 3]):

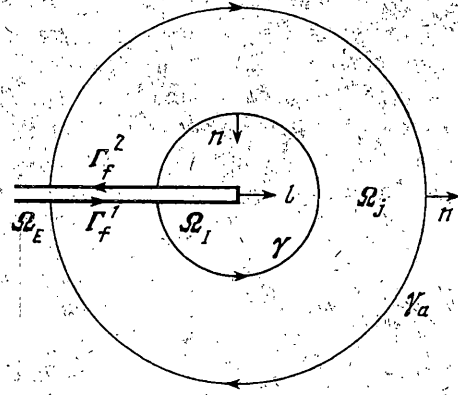
$$J = G_C, \quad J = -\partial / \partial l \{ \Pi \}_T \quad (1.3)$$

$$\Pi = \int_{\Omega} W d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} T \cdot u d\Gamma \quad (1.4)$$

примем величину скорости высвобождения энергии J . Через l , W в (1.3), (1.4) обозначены длина трещины и плотность энергии упругих деформаций $W = \frac{1}{2} \epsilon \cdot C \cdot \epsilon$, а через G_C – предельная величина скорости высвобождения энергии, необходимая для



Фиг. 1



Фиг. 2

начала процесса распространения трещины (постоянная материала). Нижний индекс у фигурных скобок в (1.3) означает условие постоянства нагрузок в выражении для потенциальной энергии системы П. Обозначая через l вектор касательной к трещине, а через γ — контур, охватывающий кончик трещины, запишем выражение для скорости высвобождения энергии

$$J = \int_{\gamma} \left[W(\mathbf{n} \cdot \mathbf{l}) - (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial l} \right] d\gamma \quad (1.5)$$

где $d\gamma$ — элемент контура γ , \mathbf{n} — вектор единичной нормали к γ . Контур интегрирования γ является произвольной, лежащей в Ω кривой и обходится против часовой стрелки от нижнего берега к верхнему берегу рассматриваемого прямолинейного разреза (фиг. 1). Величина инвариантного J -интеграла, представленного в (1.5), контурным интегралом, может быть преобразована, как показано в [1], к интегралу по некоторой области Ω_j с границей $\gamma + \gamma_a$, охватывающей кончик трещины и целиком лежащей в области Ω ($\Omega_j \subset \Omega$), занимаемой упругим телом (см. фиг. 2):

$$J = \int_{\Omega_j} \left[\frac{d\mathbf{u}}{dl} \cdot \boldsymbol{\sigma} - Wl \right] \cdot \nabla \psi d\Omega_j \quad (1.6)$$

Через ψ обозначена достаточно гладкая функция в Ω_j равная единице на γ и обращающаяся в ноль на внешней границе γ_a области Ω_j , т.е.

$$(\psi)_{\gamma} = 1, \quad (\psi)_{\gamma_a} = 0 \quad (1.7)$$

При этом исходная область Ω , занимаемая материалом тела, разбивается на внутреннюю область Ω_i , примыкающую к кончику трещины, промежуточную (рабочую) область Ω_j и внешнюю область Ω_E ($\Omega_i + \Omega_j + \Omega_E = \Omega$). В проводимых ниже общих рассуждениях формы областей Ω_i , Ω_j , Ω_E остаются произвольными. Однако при численной реализации анализа чувствительности оказывается удобным брать в качестве Ω_j кольцевую зону, ограниченную двумя концентрическими окружностями γ и γ_a . Выражение (1.6) оказывается полезным при численном моделировании условий квазихрупкого разрушения и развития трещины, позволяющим повысить точность вычислений, и будет использоваться ниже при получении соотношений, связывающих вариацию скорости высвобождения энергии с вариациями геометрических параметров, определяющих форму тела.

2. Вариация J -интеграла. Для оценки влияния формы тела на величину J -интеграла проварьируем часть Γ_v границы Γ , допуская, что соответствующие точки границы

($P \in \Gamma_j$) смещаются по нормали к границе на величины $\delta l(P)$. При этом перемещения, деформации и напряжения получают приращения $\delta \mathbf{u}$, $\delta \boldsymbol{\epsilon} = 1/2(\nabla \delta \mathbf{u} + (\nabla \delta \mathbf{u})^T)$, $\delta \boldsymbol{\sigma}$, обусловленные вариацией формы тела.

Получим выражение для вариации δJ через вариации полей $\delta \mathbf{u}$, $\delta \boldsymbol{\sigma}$. С этой целью проварируем выражение для J -интеграла, представленного в форме областного интеграла (1.6). Выполняя элементарные преобразования будем иметь

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_{\Omega_j} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial l} \cdot \delta \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \psi + \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial l} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \psi - (\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\epsilon}) \frac{\partial \psi}{\partial l} \right) d\Omega_j = \\ &= \int_{\Omega_j} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial l} \cdot \delta \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \psi + \nabla \cdot \left[(\nabla \psi \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u}) \mathbf{l} - (\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u}) \frac{\partial \psi}{\partial l} \right] - \delta \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial l} \cdot \nabla \psi \right) d\Omega_j \end{aligned} \quad (2.1)$$

Чтобы исключить из рассмотрений производные по пространственным координатам от вариаций перемещений преобразуем интеграл от дивергенции выражения, записанного в (2.1) в квадратных скобках, пользуясь для этого формулой Гаусса – Остроградского. В результате получим

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_{\Omega_j} \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial l} \cdot \delta \boldsymbol{\sigma} - \delta \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial l} \right] \cdot \nabla \psi d\Omega_j + \\ &+ \int_{\gamma + \gamma_a} \delta \mathbf{u} \cdot [\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \psi (\mathbf{n} \cdot \mathbf{l}) - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} (\mathbf{l} \cdot \nabla \psi)] d(\gamma + \gamma_a) + \\ &+ \int_{\Gamma_f^1 + \Gamma_f^2} \delta \mathbf{u} \cdot [\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \psi (\mathbf{n} \cdot \mathbf{l}) - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} (\mathbf{l} \cdot \nabla \psi)] d(\Gamma_f^1 + \Gamma_f^2) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь \mathbf{n} нормаль к границе $\gamma + \gamma_a$ области Ω_j и к участкам Γ_f^1 , Γ_f^2 – границ разреза (фиг. 2). Оценим контурный интеграл по $\gamma + \gamma_a$ в (2.2). Для этого заметим, что в силу постоянства функции ψ на контурах γ и γ_a (см. (1.7)) вектор градиента этой функции в точках $P \in \gamma + \gamma_a$ направлен по нормали \mathbf{n} к границе области Ω_j , т.е.

$$\nabla \psi = \kappa(P) \mathbf{n}, \quad P \in \gamma + \gamma_a \quad (2.3)$$

где $\kappa(P)$ скалярная функция, зависящая от положения точки P на рассматриваемой границе. Свойство (2.3) коллинеарности векторов $\nabla \psi$ и \mathbf{n} обуславливает обращение в ноль контурного интеграла по $\gamma + \gamma_a$ в (2.2). Действительно, непосредственное использование соотношения (2.3) приводит к равенствам

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \psi (\mathbf{n} \cdot \mathbf{l}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} (\mathbf{l} \cdot \nabla \psi) = \kappa \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} (\mathbf{l} \cdot \mathbf{n}) \quad (2.4)$$

и, следовательно, контурный интеграл по $\gamma + \gamma_a$, записанный в (2.2) тождественно равен нулю. Контурный интеграл по верхней Γ_f^2 и нижней Γ_f^1 частям границы разреза Γ_f , принадлежащим области Ω_j , обращается в ноль вследствие равенства нулю величин $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{l})$ и $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})$ на указанных участках. Приходим к искомому выражению для вариации J -интеграла

$$\delta J = \int_{\Omega_j} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial l} \cdot \delta \boldsymbol{\sigma} - \delta \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial l} \right) \cdot \nabla \psi d\Omega_j \quad (2.5)$$

Заметим, что доопределение скалярной функции $\psi(P)$ в область Ω такое, что $\nabla \psi(P) = 0$, если $P \in \Omega - \Omega_j$, и ψ – непрерывно дифференцируема в Ω позволяет распространить интегрирование в (2.5) на всю область Ω :

$$\delta J = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial l} \cdot \delta \boldsymbol{\sigma} - \delta \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial l} \right) \cdot \nabla \psi d\Omega \quad (2.6)$$

3. Соотношения анализа чувствительности. Полученные выражения для вариации

J -интервала зависят от вариации полей напряжений и перемещений, которые в свою очередь определяются вариациями формы тела и предположениями, накладываемыми на вариации величин, фигурирующих в граничных силовых и кинематических условиях. Поэтому, нахождение эффективного представления δJ через δt сводится к отысканию зависимостей вариации перемещений и напряжений от вариации границы тела. Непосредственное же отыскание указанных зависимостей в отдельных частных случаях оказывается затруднительным, а в общем случае не представляется возможным. Поэтому применение подхода к анализу чувствительности, основанного на представлении $\delta u, \delta \sigma$ через δt в (2.5), (2.6), для рассматриваемой задачи механики деформированного твердого тела не является целесообразным. Эффективным же в рассматриваемом случае оказывается подход использующий введение сопряженных переменных, расширенного функционала Лагранжа и сопряженных краевых задач. Данный подход к анализу чувствительности, хотя и приводит к необходимости решения дополнительных краевых задач для сопряженных переменных, позволяет произвести указанное исключение из рассмотрений вариаций $\delta u, \delta \sigma$. Применим данный подход к рассматриваемой задаче анализа чувствительности условий разрушения к вариации формы тела. Составим расширенный функционал Лагранжа, вводя в рассмотрение сопряженные переменные v (вектор, описывающий сопряженные перемещения), χ (симметричный тензор, описывающий сопряженные деформации) и добавляя к рассматриваемому функционалу (1.6) интеграл

$$\int_{\Omega} \left[v \cdot (\nabla \cdot \sigma) + \chi : \left(\sigma - \frac{1}{2} C : (\nabla u + (\nabla u)^T) \right) \right] d\Omega \quad (3.1)$$

учитывающий основные соотношения модели механики упругого тела. Выражение для вариации дополнительного интеграла (3.1), обусловленной варьированием формы тела, как показано в [4-6], может быть записано в следующем виде:

$$\begin{aligned} 0 = & \int_{\Omega} \left\{ \left[\chi - \frac{1}{2} (\nabla v + (\nabla v)^T) \right] : \delta \sigma + [\nabla \cdot (C : \chi)] \cdot \delta u \right\} d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma + \Gamma_f} [v \cdot \delta \sigma \cdot n - \delta u \cdot (C : \chi) \cdot n] d\Gamma + \\ & + \int_{\Gamma_v} \left[\frac{\partial}{\partial n} (v \cdot T) - 2Hv \cdot T - \nabla \cdot (v \cdot \sigma) \right] \delta t d\Gamma \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь предполагается, что варьруется часть поверхности тела, на которой заданы усилия ($\Gamma_v \subset \Gamma_\sigma$), и поверхности трещины не контактируют. Для получения уравнений и граничных условий, определяющих сопряженные переменные v и χ , сложим выражения первых вариаций (2.6), (3.2) и потребуем обращения в ноль коэффициентов при $\delta \sigma$ и δu на области Ω и коэффициентов при $\delta \sigma \cdot n$ и δu , соответственно, на участках границы Γ_σ и Γ_f . В результате будем иметь

$$\nabla \cdot (C : \chi) + q^0 = 0, \quad \chi - \frac{1}{2} (\nabla v + (\nabla v)^T) + \chi^0 = 0 \quad (3.3)$$

$$((C : \chi) \cdot n)_{\Gamma_\sigma} = 0, \quad (v)_{\Gamma_v} = 0, \quad ((C : \chi) \cdot n)_{\Gamma_f} = 0 \quad (3.4)$$

$$q^0 = - \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} \right) \cdot \nabla \psi, \quad \chi^0 = \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \otimes \nabla \psi \quad (3.5)$$

При этом основное соотношение анализа чувствительности запишется следующим образом:

$$\delta J = \int_{\Gamma_v} \Lambda \delta t d\Gamma, \quad \Lambda = \frac{\partial}{\partial n} (v \cdot T) - 2Hv \cdot T - \nabla \cdot (v \cdot \sigma) \quad (3.6)$$

Здесь $H = 1/R$ – кривизна варьируемого контура (R – радиус кривизны). Нетрудно заметить, что уравнения (3.3) и граничные условия (3.4) описывают напряженно-деформированное состояние тела с трещиной подверженного действию объемных сил \mathbf{q}^0 , приложенных к области Ω_J , и характеризующиеся наличием в этой области ненулевых начальных деформаций χ^0 . В ряде случаев для удобства проведения аналитических исследований и выполнения расчетов с применением универсальных программ целесообразно преобразовать краевую задачу (3.3), (3.4) к другому стандартному виду, исключив из системы уравнений (3.3) начальные деформации. Вводя обозначения

$$\mathbf{e} = \chi + \chi^0, \quad \mathbf{C} \cdot \chi^0 = \mathbf{s}^0, \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}^0 - \nabla \cdot \mathbf{s}^0 \quad (3.7)$$

будем иметь

$$\nabla \cdot \mathbf{s} + \mathbf{q} = 0, \quad \mathbf{s} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{e}, \quad \mathbf{e} = 1/2 (\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T) \quad (3.8)$$

$$(\mathbf{s} \cdot \mathbf{n})_{\Gamma_\sigma} = 0, \quad (\mathbf{v})_{\Gamma_u} = 0, \quad ((\mathbf{s} - \beta \mathbf{s}^0) \cdot \mathbf{n})_{\Gamma_f} = 0 \quad (3.9)$$

где $\beta = 1$ на участках границы трещины лежащих в области Ω_J и $\beta = 0$ на участках, расположенных в области $\Omega - \Omega_J$.

4. Конечно-элементное моделирование и анализ чувствительности. Для численного решения задачи оценивания скорости высвобождения упругой энергии и анализа чувствительности условий квазихрупкого разрушения к вариациям границ деформируемого тела применим метод конечных элементов (МКЭ) и биквадратичные функции формы. Используя изопараметрический вариант МКЭ в перемещениях и обозначения работы [1] представим функции формы N_k ($k = 1, 2, \dots, 9$) в изопараметрическом пространстве η_1, η_2 :

$$N_{3j-i-3} = f_i(\eta_1) f_j(\eta_2), \quad f_1 = 1/2 \eta (\eta - 1), \quad f_2 = (\eta - 1)(\eta + 1) \\ f_3 = 1/2 \eta (\eta + 1) \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad -1 \leq \eta_l \leq 1 \quad (l = 1, 2) \quad (4.1)$$

При использовании МКЭ области Ω_I, Ω_J и Ω_E ($\Omega = \Omega_I + \Omega_J + \Omega_E$) разбиваются на конечные четырехугольные элементы

$$\Omega_k = \sum_{e=1}^{M_k} \Omega_k^e \quad (k = I, J, K) \quad (4.2)$$

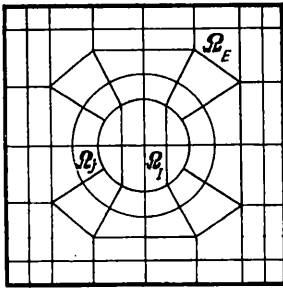
где M_k – количество элементов в области Ω_k . Координаты физического пространства x_1, x_2 и компоненты вектора перемещений u_1, u_2 могут быть записаны в виде

$$x_i = \sum_{k=1}^9 N_k X_{ik}, \quad u_i = \sum_{k=1}^9 N_k U_{ik} \quad (i = 1, 2) \quad (4.3)$$

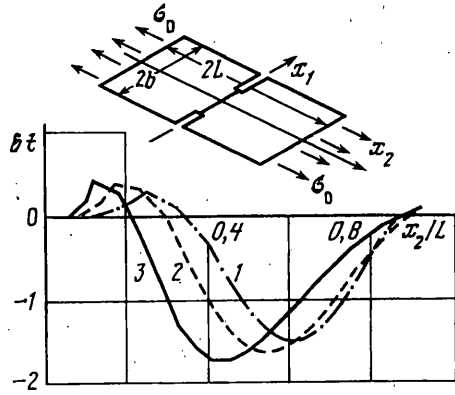
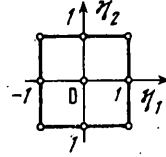
где X_{ik}, U_{ik} – узловые координаты и перемещения узлов конечно-элементной сетки.

Конечно-элементная сетка состоит из трех различных частей (фиг. 3), соответствующих областям $\Omega_I, \Omega_J, \Omega_E$. Первая область Ω_I является круговой с центром в кончике трещины, вторая область Ω_J представляет собой кольцо с внутренним радиусом r_I и внешним радиусом r_E и используется для подсчета областного J -интеграла (рабочая область), третья область (внешняя область) образуется при удалении $\Omega_I + \Omega_J$ из полной области Ω , занимаемой квазихрупким материалом, т.е. $\Omega_E = \Omega - \Omega_I - \Omega_J$. Учитывая структуру рабочей области Ω_J и условия $\psi = 0$ при $\eta_1 = -1$ и $\psi = 1$ при $\eta_1 = 1$ определим функцию ψ в ячейке $-1 \leq \eta_1 \leq 1, -1 \leq \eta_2 \leq 1$ как $\psi = 1/4(-\eta_1^3 + 3\eta_1 + 2)$. Функция ψ доопределяется гладким способом в области $\Omega_I + \Omega_E$ ($\psi = 1$ в $\Omega_I, \psi = 0$ в Ω_E), так что $\nabla \psi(P) = 0$ для $P \in \Omega_I + \Omega_E$.

Используя далее стандартную процедуру МКЭ (см. [7, 8]) получим две системы алгебраических уравнений для определения компонент глобального вектора \mathbf{U} узло-



Фиг. 3



Фиг. 4

вых перемещений и узловых компонент глобального вектора V сопряженных перемещений

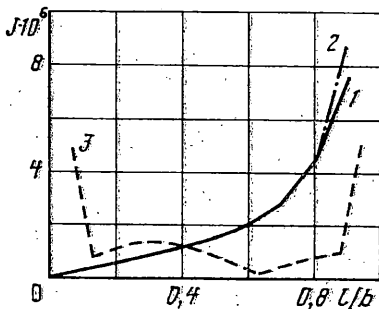
$$KU = F, \quad KV = Q \quad (4.4)$$

где K – глобальная матрица жесткости, а F , Q – глобальные векторы узловых нагрузок. Заметим, что сопряженная задача для V и прямая задача анализа для U различаются посредством правых частей приведенных уравнений (4.4). В рассматриваемом случае вектор F зависит от действительных поверхностных нагрузок, а вектор Q – от фиктивных объемных сил прикладываемых к области Ω_I и определяемых согласно (3.5), (3.7) – (3.9).

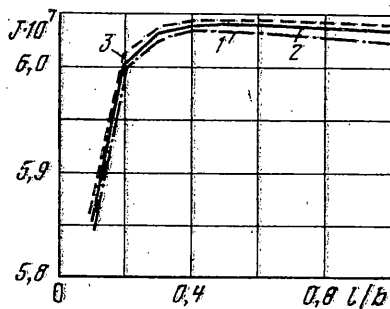
Точность вычислений скорости высвобождения упругой энергии при распространении трещины и чувствительности этой величины к вариациям границ тела с использованием адаптивной сетки, показанной на фиг. 3, зависит от целого ряда геометрических параметров, таких как размеры конечных элементов, радиусы рабочей зоны r_I и r_E , размеры трещин. Поэтому для обеспечения достаточной точности необходимо проведение вспомогательных исследований по отысканию рациональных параметров сетки. В данной работе с этой целью для широкого диапазона геометрических параметров проводились вычисления J -интеграла и сопоставление найденных величин с известными точными значениями. Для проведения тестовых расчетов бралась прямоугольная пластина толщины h , имеющая в плоскости x_1, x_2 размеры $2b, 2L$ ($-b \leq x_1 \leq b, -L \leq x_2 \leq L$, фиг. 4). Пластина подвергается действию растягивающих напряжений σ_0 , равномерно приложенных к сторонам $x_2 = L, -b \leq x_1 \leq b$ и $x_2 = -L, -b \leq x_1 \leq b$ и содержит две симметричные трещины длины $l > 0$, расположенные вдоль участков $x_2 = 0, -b \leq x_1 \leq l - b$ и $x_2 = 0, b - l \leq x_1 \leq b$ оси x_1 . Параметры задачи выбирались следующим образом: $h = 1$ мм, $L = 10$ мм, $b = 10$ мм, $\sigma_0 = 1$ Н/мм², $\nu = 0,3$, $E = 7200000$ Н/мм², где E – модуль Юнга, а ν – коэффициент Пуассона материал пластинки. Вследствие имеющейся симметрии относительно осей x_1 и x_2 все вычисления проводились для 1/4 части пластинки. Значения $J \cdot 10^6$, полученные в результате расчетов с применением МКЭ для различных длин трещин ($L = 30$ мм) на сетке содержащей 635 элементов и 2661 узел, показаны кривой 1 на фиг. 5. Для сравнения кривой 2 представлены значения $J \cdot 10^6$, полученные на основе асимптотического решения [9, 10]:

$$J = \frac{K_I^2}{E}, \quad K_I = \sigma_\infty \sqrt{\pi l} \frac{1,12 - 0,61l/b + 0,13(l/b)^3}{\sqrt{1 - l/b}} \quad (4.5)$$

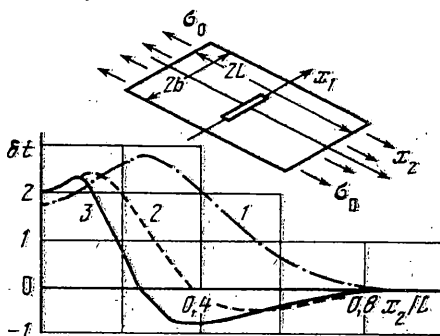
в случае $L = \infty$. Кривой 3 на фиг. 5 показана относительная ошибка (в процентах)



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

результатов вычислений скорости высвобождения энергии с применением МКЭ по сравнению с "точными" значениями (4.5). Представленная зависимость иллюстрирует нарастание ошибки для малых длин трещин и для относительно длинных трещин ($l/b \rightarrow 1$), когда расстояние между кончиками трещин стремится к нулю.

Влияние адаптивной сетки на результаты расчетов скорости высвобождения энергии в зависимости от внешнего радиуса r_E рабочей зоны Ω_r ($r_r = 0,005r_E$ показано на фиг. 6 для случая $L = b = 10$ мм. Кривыми с номерами 1, 2, 3 представлены, соответственно, зависимости $J \cdot 10^7$ для случаев разбиения рабочего кольца на 5, 9 и 19 конечных элементов. Данные кривые иллюстрируют слабое влияние на определяемое значение J -интеграла при $r_E > 0,3$ мм, независимо от мелкости разбиения рабочей зоны.

Анализ чувствительности скорости высвобождения энергии при распространении трещин к вариациям границ пластинки проводился для случаев пластинок с двумя боковыми трещинами (фиг. 4) и для случая пластинок с одной внутренней трещиной (фиг. 7) расположенной на оси $x_2 = 0$ ($-l \leq x_1 \leq l$) симметрично относительно краев пластинки. В обоих случаях рассматривались вариации формы боковых сторон пластинки, свободных от прикладываемых нагрузок, и с применением градиентных соотношений

$$\delta J = -\tau \Lambda, \quad \Lambda = -\sigma \cdot \mathbf{e} = -\sigma \cdot \chi \quad (4.6)$$

$$\delta J = -\tau \int_{\Gamma_v} \Lambda^2 d\Gamma \leq 0, \quad \tau > 0$$

находились улучшающие вариации формы, позволяющие уменьшить величину J -интеграла. Расчеты проводились для пластинок при различных значениях параметра L/b ($b = 10$ мм, $l = 5$ мм). Найденные в результате вычислений улучшающие вариации

формы свободных от нагрузок боковых сторон δ_1 показаны на фиг. 4, 7 кривыми с номерами 1, 2, 3 отвечающими, соответственно, случаям $L/b = 1; 1,5; 2$.

Авторы выражают благодарность профессору Э. Штайну и доктору Ф. Батольду за полезные обсуждения предложенного подхода к анализу чувствительности. Данные исследования были поддержаны научным фондом "Фольксваген" (грант № 1/71113).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Li F.Z., Shih C.F., Needleman A. A comparison of methods for calculating energy release rates // Engng. Fract. Mech. 1985. V. 21. № 2. P. 405-421.
2. Райс Дж. Математические методы в механике разрушения // Разрушение. М.: Мир, 1975. Т. 2. С. 204-335.
3. Хеллан К. Введение в механику разрушения. М.: Мир, 1988. 364 с.
4. Баничук Н.В. Введение в оптимизацию конструкций. М.: Наука, 1986. 302 с.
5. Хог Э., Чой К., Комков В. Анализ чувствительности при проектировании конструкций. М.: Мир, 1988. 428 с.
6. Banichuk N.V. Shape design sensitivity analysis for optimization problems with local and global functionals // Mech. Struct. and Mach. 1993. V. 21. № 3. P. 375-397.
7. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. М.: Мир, 1984. 428 с.
8. Сиратори М., Миеси Т., Мауссима Х. Вычислительная механика разрушения. М.: Мир, 1986. 334 с.
9. Keer L.M., Fridman J.M. Tensile strip with edge cracks // Intern. J. Engng. Sci. 1973. V. 11, N 12. P. 1265-1275.
10. Koiter W.T., Benthem J.P. Asymptotic approximations to crack problems // Mechanics of Fracture. Leyden: Noordhoff, 1973. V. 1. P. 131-178.

Москва

Поступила в редакцию
25.VIII.1997