

УДК 539.375

© 1998 г. С.Е. АЛЕКСАНДРОВ, Р.В. ГОЛЬДШТЕЙН

### **О МГНОВЕННОМ ВОЗНИКНОВЕНИИ ТРЕЩИН КОНЕЧНОЙ ПЛОЩАДИ**

Разрушение твердых тел зависит от напряженно-деформированного состояния, внешних условий и внутренней структуры материала. Для описания этого явления во всем его многообразии вводятся представления о различных механизмах разрушения, которые контролируют процесс в тех или иных условиях [1]. В соответствии с этими механизмами могут быть построены, обычно в координатах "температура" – "нормальное растягивающее напряжение", карты разрушения, дающие подробную информацию о модах разрушения конкретного материала [2, 3].

Приложение таких карт к расчету реальных конструкций или технологических процессов затруднено ввиду того, что поле напряжений неоднородно, что вызывает неоднородное распределение дефектов, в свою очередь влияющее на распределение напряжений. В связи с этим при феноменологическом описании процесса разрушения пластических материалов выделяют три основные моды разрушения: разделение тела на части вследствие только пластической деформации, вследствие возникновения поверхности разрыва, перпендикулярной приложенным растягивающим нормальным напряжениям (трещины), и смешанная мода [4]. Обычно образование трещин в пластических материалах описывают с помощью введения в модель параметра поврежденности (например, [5–7]). Краткий обзор моделей, описывающих эволюцию параметра поврежденности, приведен в [8]. Численные расчеты, выполненные на основе этих моделей, показывают, что при растяжении цилиндрического образца кривые "приложенная нагрузка" – поврежденность и редукция площади сечения (которое, впоследствии станет поверхностью раздела двух частей образца), полученные для моделей с учетом развития параметра поврежденности и моделей теории пластичности, практически совпадают вплоть до максимального значения нагрузки, рассчитанной для модели с учетом параметра поврежденности. После этого нагрузка, рассчитанная по модели с поврежденностью, резко падает до нулевого значения, так что дополнительной редукции площади практически не происходит [9]. Кроме того, экспериментальные исследования показывают, что для некоторых материалов катастрофическое разрушение наступает, когда расстояние между пустотами значительно превышает их характерный размер [10]. Таким образом, кажется естественным, по крайней мере для оценочных расчетов, использовать модель разрушения, основанную на введении поверхностной энергии разрушения, подобной или точно такой же как энергия, введенная Гриффитсом, и концепции мгновенного возникновения трещины конечной площади. Такая модель могла бы найти широкое применение в инженерных расчетах, когда применение мощных компьютеров, особенно при использовании моделей с учетом параметра поврежденности, не оправдывает себя [11].

В публикуемой работе развита модель, учитывающая возникновение трещины конечной площади в линейно-упругом материале. Таким образом, эта модель является дополнением к модели Гриффитса, в которой предполагается связь между ростом уже существующей трещины и упругой энергией системы. Отметим также, что применение модели с непрерывным ростом трещины встречается в ряде случаев некоторые принципиальные трудности. Эти трудности преодолеваются, в частности, введением трещины конечной площади, но на другом структурном уровне, например, соответствующем размеру зерна металла [12]. Концепция мгновенного возникновения трещин и (или) зон разрушения конечной площади была предложена в [13–15] для описания закономерностей терморазрушения. При этом в некоторых задачах удалось обосновать невозможность процесса непрерывного развития трещины из точки.

В [16] также была предложена модель разрушения, основанная на возникновении трещин конечной площади. Однако в этой модели предполагалось, что материал не деформируется перед и в процессе разрушения, то есть конструкция распадается на жесткие части.

**1. Критерий образования трещины.** Рассмотрим линейно-упругое тело, на границе которого заданы нагрузки и перемещения в соответствии с требованиями, предъявляемыми к краевым условиям в классической теории упругости. Предположим, что в этом теле могут возникнуть трещины конечной площади, требуемая энергия для образования которых пропорциональна их площади. Назовем возможными состояниями системы состояния, удовлетворяющие краевым условиям и допускающие возникновение произвольно ориентированных трещин конечной площади. Очевидно, состояние без трещин также относится к классу возможных. Так как реальные материалы не рассыпаются, если не совершена работа внешних или внутренних сил, то такие состояния исключим из числа возможных. Примем как постулат, что состояние с трещиной реализуется при минимально возможном значении работы, совершенной над телом.

**2. Бесконечный сплошной цилиндр, подверженный равномерному гидростатическому растяжению.** Эта проблема является двумерным аналогом известного исторического мысленного эксперимента о разрушении шара, подверженного гидростатическому растяжению [17]. Последняя проблема будет рассмотрена в следующем пункте, так как сравнение результатов позволит оценить влияние степени трехосности напряженного состояния на процесс разрушения, что представляет большой практический интерес (см., например, [18]).

Предположим, что цилиндр деформируется при заданных перемещениях его внешней границы,  $u_0$ . В рамках линейноупругого материала Гука распределение напряжений и деформаций в таком цилиндре будет однородным. Ненулевые компоненты тензора деформаций,  $\varepsilon_r$ ,  $\varepsilon_\theta$ , и напряжений  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ , в цилиндрической системе координат имеют вид

$$\varepsilon_{r0} = \varepsilon_{\theta 0} = \frac{u_0}{R}, \quad \sigma_{r0} = \sigma_{\theta 0} = \frac{2G'}{(1-2\nu)} \frac{u_0}{R} \quad (2.1)$$

Здесь  $R$  – внешний радиус цилиндра,  $G'$  – модуль сдвига,  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

Энергия накопленная в цилиндре при данном перемещении  $u_0$  будет определяться из (2.1) так

$$w_0 = \pi \int_0^R \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \theta r dr = \frac{2\pi G u_0^2}{(1-2\nu)} \quad (2.2)$$

Из симметрии следует, что если трещина возникнет, то ее сечение плоскостью  $z = \text{const}$  должно быть окружностью  $r = r_0$ . В соответствии с развиваемым общим подходом, трещина должна возникнуть мгновенно, что повлечет за собой мгновенное изменение напряженно-деформированного состояния в цилиндре, который после возникновения трещины будет состоять из двух частей: сплошного цилиндра радиуса  $r_0$  и полого с внутренним радиусом  $r_0$  и внешним –  $R$ . Очевидно, при этом внутренний цилиндр полностью разгрузится и отдаст запасенную энергию на образование трещины. Полый цилиндр не может полностью разгрузиться, так как при заданной величине  $u_0 \neq 0$  напряженно-деформированное состояние в нем не однородное. Чтобы найти часть энергии, оставшуюся в полом цилиндре, рассмотрим деформацию этого цилиндра из исходного состояния, определяемого соотношениями (2.1), к конечному состоянию, в котором радиальное напряжение равно нулю при  $r = r_0$ , а перемещение внешней границы по-прежнему равно  $u_0$ . Закон Гука в приращениях для рассматри-

ваемого процесса имеет вид

$$\varepsilon_r - \varepsilon_0 = \frac{1}{2G} [(1 - \nu)(\sigma_r - \sigma_0) - \nu(\sigma_\theta - \sigma_0)] \quad (2.3)$$

$$\varepsilon_\theta - \varepsilon_0 = \frac{1}{2G} [(1 - \nu)(\sigma_\theta - \sigma_0) - \nu(\sigma_r - \sigma_0)]$$

$$\varepsilon_0 = \frac{u_0}{R}, \quad \sigma_0 = \frac{2G}{(1 - 2\nu)} \frac{u_0}{R}$$

Общее решение для радиального перемещения имеет вид

$$u_r = c_1 r + c_2 r^{-1} \quad (2.4)$$

Отсюда и из краевого условия для смещений имеем

$$c_1 R + c_2 R^{-1} = u_0 \quad (2.5)$$

Деформации, определенные с помощью (2.4), будут равны

$$\varepsilon_r = c_1 - c_2 r^{-2}, \quad \varepsilon_\theta = c_1 + c_2 r^{-2} \quad (2.6)$$

Подставляя (2.6) в (2.3), найдем напряжения

$$\sigma_r = \frac{2G}{(1 - 2\nu)} [c_1 - (1 - 2\nu)c_2 r^{-2}] \quad (2.7)$$

$$\sigma_\theta = \frac{2G}{(1 - 2\nu)} [c_1 + (1 - 2\nu)c_2 r^{-2}]$$

Отсюда и из краевого условия для напряжений имеем

$$c_1 - (1 - 2\nu)c_2 r_0^{-2} = 0 \quad (2.8)$$

Решение системы (2.5), (2.8) дает

$$c_1 = \frac{(1 - 2\nu)u_0 R}{(1 - 2\nu)R^2 + r_0^2}, \quad c_2 = \frac{u_0 R r_0^2}{(1 - 2\nu)R^2 + r_0^2}$$

Подставляя эти выражения в (2.6) и (2.7), найдем напряженно-деформированное состояние в полном цилиндре

$$\varepsilon_r = \frac{u_0 R}{[(1 - 2\nu)R^2 + r_0^2]} \left[ 1 - 2\nu - \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 \right], \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_0 R}{[(1 - 2\nu)R^2 + r_0^2]} \left[ 1 - 2\nu + \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 \right] \quad (2.9)$$

$$\sigma_r = \frac{2u_0 R G}{[(1 - 2\nu)R^2 + r_0^2]} \left[ 1 - \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 \right], \quad \sigma_\theta = \frac{2u_0 R G}{[(1 - 2\nu)R^2 + r_0^2]} \left[ 1 + \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 \right]$$

Отсюда определим энергию, оставшуюся в полном цилиндре после образования трещины

$$w_1 = \frac{2U_0^2 G \pi}{[(1 - 2\nu) + (r_0 / R)^2]^2} \{ (1 - 2\nu)[1 - (r_0 / R)^2] - (r_0 / R)^2 [(r_0 / R)^2 - 1] \} \quad (2.10)$$

Тогда, полагая, что на образование трещины тратится энергия  $w_2 = 4\pi\gamma_0$  ( $\gamma = \text{const}$  — поверхностная энергия образования трещины), энергетический баланс имеет вид

$w_0 = w_1 + w_2$  или, используя (2.2) и (2.10), получим

$$\frac{2\pi G u_0^2}{1-2\nu} = \frac{2u_0^2 G \pi}{[(1-2\nu) + (r_0/R)^2]^2}$$

$$\{(1-2\nu)[1 - (r_0/R)^2] - (r_0/R)^2[(r_0/R)^2 - 1] + 4\pi\gamma r_0\}$$

Отсюда следует связь между  $u_0$  и  $x = r_0/R$ :

$$u_0^2 = \frac{R\gamma(1-2\nu)(1-2\nu+x^2)}{G(1-\nu)x} \quad (2.11)$$

Чтобы приложить критерий, введенный в пункте 1, заметим, что в данном случае работа внешних сил пропорциональна  $u_0^2$  и таким образом, при  $u_0 \neq 0$  минимальная энергия, при которой возможно возникновение трещины, соответствует минимальному значению величины  $u_0$ , при которой возможна деформация с образованием трещины. Из (2.11) следует, что  $du_0^2/dx = 0$  при  $x = x_0 = (1-2\nu)^{1/2}$ . Очевидно, что точка  $x = x_0$  является точкой минимума и что значение  $x_0$  существует и соответствует внутренности исходного цилиндра для всех реальных металлических материалов. Соответствующая величина перемещения внешнего радиуса определяется из (2.11)

$$u_0 = (1-2\nu)^{3/4} \sqrt{\frac{2R\gamma}{G(1-\nu)}} \quad (2.12)$$

### 3. Сплошной шар, подверженный равномерному гидростатическому давлению.

Аналогично предыдущему случаю, положим, что шар деформируется при заданных перемещениях его внешней поверхности,  $u_0$ . Распределение напряжений и деформаций в таком шаре будет однородным и ненулевые компоненты тензора деформаций,  $\epsilon_r$ ,  $\epsilon_\theta$  и  $\epsilon_\varphi$  и напряжений  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  и  $\sigma_\varphi$  в сферической системе координат примут вид

$$\epsilon_{r0} = \epsilon_{\theta0} = \epsilon_{\varphi0} = \frac{u_0}{R}, \quad \sigma_{r0} = \sigma_{\theta0} = \sigma_{\varphi0} = 2G \frac{(1+\nu)u_0}{(1-2\nu)R} \quad (3.1)$$

Упругая энергия, накопленная в шаре при данном перемещении  $u_0$ , будет определяться из (3.1) так

$$w_0 = 2\pi \int_0^R \sigma_{ij} \epsilon_{ij} r^2 dr = 4\pi \frac{G(1+\nu)}{(1-2\nu)} u_0^2 R \quad (3.2)$$

Из симметрии следует, что возникшая трещина должна соответствовать поверхности  $r = r_0$ . Аналогично предыдущему случаю, рассмотрим состояние сферической оболочки с внутренним радиусом  $r_0$  и внешним  $R$  после возможного возникновения трещины.

Общее решение уравнений теории линейной упругости в перемещениях в случае сферической симметрии имеет вид

$$u_r = c_1 r + c_2 r^{-2} \quad (3.3)$$

Отсюда могут быть определены деформации

$$\epsilon_r = c_1 - 2c_2 r^{-3}, \quad \epsilon_\theta = \epsilon_\varphi = c_1 + c_2 r^{-3} \quad (3.4)$$

и напряжения из (3.4) и закона Гука

$$\sigma_r = 2G \left[ \frac{(1+\nu)}{(1-2\nu)} c_1 - 2c_2 r^{-3} \right] \quad (3.5)$$

$$\sigma_{\theta} = \sigma_{\varphi} = 2G \left[ \frac{(1+\nu)}{(1-2\nu)} c_1 + c_2 r^{-3} \right]$$

Краевые условия, после возникновения трещины, имеют вид  $u_r = u_0$  при  $r = R$  и  $\sigma_r = 0$  при  $r = r_0$ .

Для определения  $c_1$  и  $c_2$  будем иметь систему

$$c_1 R + c_2 R^{-2} = u_0$$

$$(1+\nu)c_1 - 2c_2(1-2\nu)r_0^{-3} = 0$$

Решение этой системы имеет вид

$$c_1 = \frac{2u_0 R^2 (1-2\nu)}{r_0^3 (1+\nu) + 2R^3 (1-2\nu)}, \quad c_2 = \frac{u_0 (1+\nu) r_0^3 R^2}{r_0^3 (1+\nu) + 2R^3 (1-2\nu)} \quad (3.6)$$

Упругая энергия, оставшаяся во внешней оболочке после возникновения трещины, будет равна

$$w_1 = 2\pi \int_{r_0}^R \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} r^2 dr$$

Подставляя сюда деформации и напряжения из (3.4) и (3.5) и используя (3.6), получим

$$w_1 = \frac{8\pi G(1+\nu)R^4 u_0^2}{[r_0^3(1+\nu) + 2R^3(1-2\nu)]^2} \quad (3.7)$$

$$[2(1-2\nu)R^3 + (5\nu-1)r_0^3 - (1+\nu)r_0^6 R^{-3}]$$

На образование трещины тратится энергия

$$w_2 = 8\pi r_0^2 \gamma \quad (3.8)$$

Подставляя (3.2), (3.7) и (3.8) в уравнение энергетического баланса,  $w_0 = w_1 + w_2$ , получим связь между  $u_0$  и  $x = r_0/R$ :

$$u_0^2 = \frac{2(1-2\nu)\gamma R [x^3(1+\nu) + 2(1-2\nu)]}{3G(1-\nu^2)x} \quad (3.9)$$

Применяя введенный критерий, определяем положение трещины,  $x_0$ , из условия  $du_0^2/dx = 0$ . Из (3.9) найдем

$$x_0 = [(1-2\nu)/(1+\nu)]^{1/3}$$

Тогда соответствующая величина перемещения следует из (3.9)

$$u_0 = (1-2\nu) \sqrt{\frac{2\gamma R^2}{G(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{1+\nu}{1-2\nu}} \quad (3.10)$$

**4. Анализ результатов.** Большой теоретический и практический интерес представляет анализ влияния трехосности напряженно-деформированного состояния на процесс возникновения и движения трещин [18]. В частности, хорошо известно, что при растяжении образцов трещина возникает в центре, где трехосность выше, чем у краев [19]. Такое же влияние оказывает трехосность на рост трещины: изначально прямолинейный фронт трещины искривляется, причем больший прирост площади трещины наблюдается вдоль той части ее фронта, где выше степень трехосности напряженного состояния.

Степень трехосности напряженного состояния обычно оценивается безразмерным параметром  $T$ :

$$T = \sigma / \sigma_e, \quad \sigma_e = (s_{ij}s_{ij})^{1/2} \quad (4.1)$$

Здесь  $s_{ij}$  – компоненты девиатора тензора напряжений.

Подставляя (2.1) в (4.1) для цилиндра найдем

$$T_c = (1 + \nu) / \sqrt{3}(1 - 2\nu)$$

Безразмерная энергия на единицу длины, запасенная в цилиндре к моменту разрушения, определяется из (2.2) и (2.12):

$$w'_0 = \frac{w_0}{4\pi R\gamma} = \frac{\sqrt{1-2\nu}}{1-\nu} \quad (4.2)$$

Зависимость  $w'_0$  от  $T_c$  для значений коэффициента Пуассона  $0,26 \leq \nu \leq 0,47$  показана на фиг. 1, из которой видно, что с ростом степени трехосности напряженного состояния требуемая энергия, при которой наступает разрушение, уменьшается.

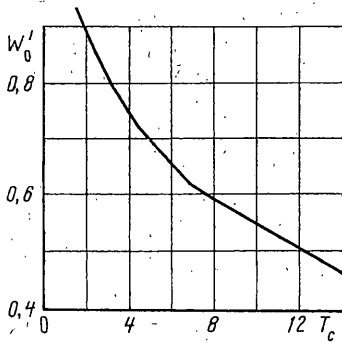
Для шара степень трехосности  $T_{sp} = \infty$ , поэтому разрушение в этом случае должно наступать при минимальных энергетических затратах. Однако прямое сравнение соответствующих энергий невозможно ввиду того, что в цилиндре энергия в (4.2) отнесена к радиусу и длине цилиндра, в то время как в шаре эту величину следовало бы отнести к  $R^2$ . В связи с этим целесообразно сравнить перемещения внешних радиусов цилиндра и шара при разрушении. Экспериментальные данные показывают, что при более высокой степени трехосности разрушение возникает при меньшем перемещении точки приложения нагрузки. Таким образом, для шара это перемещение всегда должно быть меньше, чем для цилиндра, так как  $T_c/T_{sp} = 0$ , что и видно из фиг. 2, на которой отношение  $u = u_{sp}/u_c$  представлено как функция коэффициента Пуассона ( $u_{sp}$  и  $u_c$  – перемещения внешних радиусов шара и цилиндра соответственно, рассчитанные в момент разрушения по формулам (3.10) и (2.12)).

Для упругопластического материала приведенный анализ будет корректным, если сразу после разрушения не возникают пластические зоны во внешней оболочке. Минимальный радиус цилиндра (шара),  $R_m$ , при котором оболочка после разрушения остается полностью упругой, определяется из напряженного состояния (2.9) – для цилиндра и (3.5) – для шара, при значении  $\tau_0$ , которое соответствует моменту разрушения, и условия текучести.

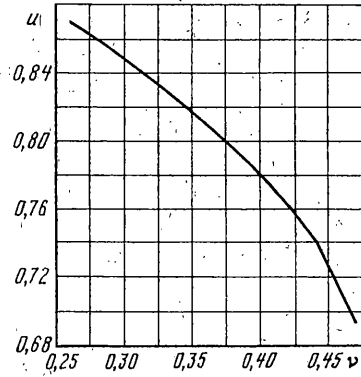
Примем условие текучести Треска, которое имеет вид

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2K \quad (4.3)$$

Здесь  $\sigma_1$  – максимальное главное напряжение,  $\sigma_2$  – минимальное главное напряжение,  $K$  – предел текучести при чистом сдвиге.



Фиг. 1



Фиг. 2

Из (2.9) и (3.9) следует, что  $\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_\theta - \sigma_r$  и эта разность максимальна при  $r = r_0$ . Тогда из (2.9) и (4.3) получим для цилиндра

$$R_m = \frac{2\gamma G}{K^2(1-\nu)\sqrt{1-2\nu}}$$

и из (3.5) и (4.3) для шара

$$R_m = \frac{2\gamma G(1+\nu)}{K^2(1-\nu)} \sqrt{\frac{1+\nu}{1-2\nu}}$$

В случае, если  $R < R_m$ , необходимо в общем балансе учитывать энергию, затраченную на пластическое деформирование.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Riedel H. Fracture mechanisms // Materials science and technology: A comprehensive treatment. V. 6. Plastic deformation and fracture of materials / Ed. H. Mughrabi. Weinheim: VCH, 1993. P. 565-633.
2. Ashby M.F., Gandhi C., Taplin D.M.R. Fracture-mechanism maps and their construction for F.C.C. metals and alloys // Acta met. 1979. V. 27. No. 5. P. 699-729.
3. Gandhi C., Ashby M.F. Fracture-mechanism maps for materials which cleave: F.C.C., B.C.C. and H.C.P. metals and ceramics // Acta met. 1979. V. 27. No. 10. P. 1565-1602.
4. Sih G.C. Mechanics of ductile fracture // Fracture Mechanics and Technology / Eds. G.C.Sih., C.L. Chow. Alphen aan den Rijn: Sijthoff and Noordhoff, 1977. V. 2. P. 767-784.
5. Lemaitre J. A continuous damage mechanics model for ductile fracture // Trans. ASME J. Mater. Technol. 1985. V. 107. No. 1. P. 83-89.
6. Chaboche J.L. Continuum damage mechanics: Pt 1. General concepts // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1988. V. 55. No 1. P. 59-64.
7. Chaboche J.L. Continuum damage mechanics: Pt 2. Damage growth, crack initiation, and crack growth // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1988. V. 55. No. 1. P. 65-72.
8. Chandrakanth S., Pandey P.C. A new ductile damage evolution model // Intern. J. Fracture. 1993. V. 60. P. R73-R76.
9. Zavaliangos A., Anand L. Thermo-elasto-viscoplasticity of isotropic porous metals // J. Mech. and Phys. Solids. 1993. V. 41. No. 6. P. 1087-1118.
10. Beremin F.M. Study of fracture criteria for ductile rupture of A508 steel // Advances in fracture research / Ed. D. Francois. Oxford: Pergamon Press, 1981. V. 2. P. 809-816.
11. Schwalbe K.-H. The prediction of failure situations using the CTOD concept based on the engineering treatment model (ETM) // The Crack Tip Opening Displacement in Elastic-Plastic Fracture Mechanics / Ed. K.-H. Schwalbe. Berlin: Springer, 1986. P. 315-340.

12. *Kfouri A.P., Rice J.R.* Elastic/plastic separation energy rate for crack advance in finite growth steps // Fracture 1977; Advances in Research on the Strength and Fracture of Materials // Ed. D.M.R. Taplin. N.Y.: Pergamon Press, 1978. V. 1. P. 48–59.
13. *Шестериков С.А., Юмашева М.А.* К проблеме терморазрушения при быстром нагреве // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 1. С. 128–135.
14. *Шестериков С.А., Юмаиёв М.В., Юмашева М.А.* Терморазрушение упругого пространства со сферической полостью // Деформирование и разрушение твердых тел / Под ред. Н.И. Малинина, С.А. Шестерикова. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1985. С. 106–111.
15. *Бахарёв М.С., Миркин Л.И., Шестериков С.А., Юмашёва М.А.* Структура и прочность материалов при лазерных воздействиях. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. 224 с.
16. *Ивлёв Д.Д.* К теории разрушения твердых тел // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 3. С. 618–624.
17. *Finnie I., Mayville R.A.* Historical aspects in our understanding of the ductile–brittle transition in steels // Trans. ASME, J. Engng. Mater. Technol. 1990. V. 112. No. 1. P. 56–60.
18. *Knott J.F.* Effects of triaxial stress-states on deformation and fracture // Constitutive Relations and Their Physical Basis: Proc. 8th Riso Intern. Symp. on Metallurgy and Materials Science / Eds. S.I. Anderson et al. Roskilde: Riso Nat. Lab., 1987. P. 107–121.
19. *Надаи А.* Пластичность и разрушение твердых тел. Т. 2. М.: Мир, 1969. 863 с.

Москва

Поступила в редакцию  
23.VII.1997