МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1998

УДК 539.374

 Д.Д. ИВЛЕВ

О ПРОСТРАНСТВЕННОМ ТЕЧЕНИИ ИДЕАЛЬНОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА, СЖАТОГО ШЕРОХОВАТЫМИ ПЛИТАМИ

В работе получены обобщения решений Прандтля [1] и Гартмана [2] на случай пространственного состояния идеальнопластических сред. Используется условие полной пластичности [3]. Обобщение решения Прандтля на случай пространственного состояния при условии пластичности Мизеса дано в [4].

1. Рассмотрим обобщение решения Прандтля на случай пространственного состояния идеальнопластического тела.

Уравнения равновесия в декартовой системе координат имеют вид

$$\begin{aligned}
&\partial\sigma_x / \partial x + \partial\tau_{xy} / \partial y + \partial\tau_{xz} / \partial z = 0\\
&\partial\tau_{xy} / \partial x + \partial\sigma_y / \partial y + \partial\tau_{yz} / \partial z = 0\\
&\partial\tau_{xz} / \partial x + \partial\tau_{yz} / \partial y + \partial\sigma_z / \partial z = 0
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Условие полной пластичности в компонентах главных напряжений запишем в виде

$$\sigma_1 = \sigma_2, \quad \sigma_3 = \sigma_1 + k, \quad k = \text{const} \tag{1.2}$$

Согласно [3], условие пластичности (2.2) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned}
&\sigma_x = \sigma - k/3 + k\cos^2\varphi_1, \quad \tau_{xy} = k\cos\varphi_1\cos\varphi_2\\
&\sigma_y = \sigma - k/3 + k\cos^2\varphi_2, \quad \tau_{yz} = k\cos\varphi_2\cos\varphi_3\\
&\sigma_z = \sigma - k/3 + k\cos^2\varphi_3, \quad \tau_{xz} = k\cos\varphi_1\cos\varphi_3\\
&\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_3 = 1
\end{aligned} \tag{1.3}$$

где $\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$, $\cos\varphi_i$ – направляющие косинусы третьего главного направления относительно координатных осей.

Соотношения (1.3) могут быть переписаны в виде

$$\sigma_x = \sigma - \frac{k}{3} + \frac{\tau_{xy}\tau_{xz}}{\tau_{yz}}, \quad \sigma_y = \sigma - \frac{k}{3} + \frac{\tau_{xy}\tau_{yz}}{\tau_{xz}}, \quad \sigma_z = \sigma - \frac{k}{3} + \frac{\tau_{xz}\tau_{yz}}{\tau_{xy}} \tag{1.4}$$

$$\frac{\tau_{xy}\tau_{xz}}{\tau_{yz}} + \frac{\tau_{xy}\tau_{yz}}{\tau_{xz}} + \frac{\tau_{xz}\tau_{yz}}{\tau_{xy}} = k \tag{1.5}$$

В дальнейшем условие полной пластичности будет использоваться в форме (1.4).

Следуя идеям Прандтля положим

$$\tau_{xz} = az, \qquad \tau_{yz} = bz, \qquad a, b = \text{const} \tag{1.6}$$

Из (1.5), (1.6) найдем

$$\tau_{xy} = \frac{ab}{a^2+b^2}\left(k \pm \sqrt{k^2-(a^2+b^2)z^2}\right) \tag{1.7}$$

Согласно (1.4), (1.6) получим

$$\sigma_x = \sigma - \frac{k}{3} + \frac{a}{b}\tau_{xy}, \qquad \sigma_y = \sigma - \frac{k}{3} + \frac{b}{a}\tau_{xy}, \qquad \sigma_z = \sigma - \frac{k}{3} + \frac{abz^2}{\tau_{xy}} \tag{1.8}$$

Из (1.8), (1.1) будем иметь

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x} + a = 0, \qquad \frac{\partial\sigma}{\partial y} + b = 0, \qquad \frac{\partial\sigma_z}{\partial_z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\sigma + \frac{abz^2}{\tau_{xy}}\right) = 0 \tag{1.9}$$

Из (1.9) следует

$$\sigma = -ax - by - \frac{abz^2}{\tau_{xy}} + \frac{k}{3} + c, \qquad c = \text{const} \tag{1.10}$$

Согласно (1.10), (1.8) окончательно будем иметь

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= -ax - by + c - \frac{abz^2}{\tau_{xy}} + \frac{a}{b}\tau_{xy} \\
\sigma_y &= -ax - by + c - \frac{abz^2}{\tau_{xy}} + \frac{b}{a}\tau_{xy} \\
\sigma_z &= -ax - by + c
\end{aligned} \tag{1.11}$$

где τ_{xy} определяется из (1.7).

Соотношения, определяющие кинематику пластического течения, могут быть записаны в виде [5]:

$$\varepsilon_x + \varepsilon_{xy}\frac{\cos\varphi_2}{\cos\varphi_1} + \varepsilon_{xz}\frac{\cos\varphi_3}{\cos\varphi_1} = \varepsilon_{xy}\frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2} + \varepsilon_y + \varepsilon_{yz}\frac{\cos\varphi_3}{\cos\varphi_2} = \varepsilon_{xz}\frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_3} + \varepsilon_{yz}\frac{\cos\varphi_2}{\cos\varphi_3} + \varepsilon_z \tag{1.12}$$

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0 \tag{1.13}$$

где ε_{ij} – компоненты скорости пластической деформации.

Используя выражения (1.3), придадим соотношениям (1.12) вид

$$\tau_{yz}\left(\frac{\varepsilon_x}{\tau_{yz}} + \frac{\varepsilon_{xy}}{\tau_{xz}} + \frac{\varepsilon_{xz}}{\tau_{xy}}\right) = \tau_{xz}\left(\frac{\varepsilon_{xy}}{\tau_{yz}} + \frac{\varepsilon_y}{\tau_{xz}} + \frac{\varepsilon_{yz}}{\tau_{xy}}\right) = \tau_{xy}\left(\frac{\varepsilon_{xz}}{\tau_{yz}} + \frac{\varepsilon_{yz}}{\tau_{xz}} + \frac{\varepsilon_z}{\tau_{xy}}\right) \tag{1.14}$$

Решение определяется в виде

$$u = p_1x + q_1y + u^0(z), \quad v = p_2x + q_2y + v^0(z), \quad w = pz, \quad p_1, q_1, p_2, q_2, p = \text{const} \tag{1.15}$$

где u, v, w – компоненты скорости перемещения.

Из (1.14) и уравнения несжимаемости (1.13) следует

$$p_1 + q_2 + p = 0 \tag{1.16}$$

Две неизвестные функции u^0, v^0 определяются из уравнений (1.14) с учетом выражений (1.6), (1.7). Окончательные выражения для компонент скоростей перемещений и скоростей пластических деформаций опустим.

2. Уравнения равновесия в цилиндрической системе координат ρ, θ, z имеют вид

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_\rho}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau_{\rho\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{\rho z}}{\partial z}+\frac{\sigma_\rho-\sigma_\theta}{\rho}=0\\
&\frac{\partial\tau_{\rho\theta}}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial z}+\frac{2\tau_{\rho\theta}}{\rho}=0\\
&\frac{\partial\tau_{\rho z}}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{\tau_{\rho z}}{\rho}=0
\end{aligned}\tag{2.1}$$

Соотношения, определяющие условие полной пластичности, аналогично (1.4), запишем в виде

$$\sigma_\rho=\sigma-\frac{k}{3}+\frac{\tau_{\rho\theta}\tau_{\rho z}}{\tau_{\theta z}},\qquad \sigma_\theta=\sigma-\frac{k}{3}+\frac{\tau_{\rho\theta}\tau_{\theta z}}{\tau_{\rho z}},\qquad \sigma_z=\sigma-\frac{k}{3}+\frac{\tau_{\rho z}\tau_{\theta z}}{\tau_{\rho\theta}}\tag{2.2}$$

$$\frac{\tau_{\rho\theta}\tau_{\rho z}}{\tau_{\theta z}}+\frac{\tau_{\rho\theta}\tau_{\theta z}}{\tau_{\rho z}}+\frac{\tau_{\rho z}\tau_{\theta z}}{\tau_{\rho\theta}}=k\tag{2.3}$$

Положим

$$\tau_{ij}=\tau_{ij}(\rho)\tag{2.4}$$

Уравнения (2.1) согласно (2.2), (2.4) примут вид

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\rho}+\frac{d}{d\rho}\left(\frac{\tau_{\rho\theta}\tau_{\rho z}}{\tau_{\theta z}}\right)+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\tau_{\rho\theta}\tau_{\rho z}}{\tau_{\theta z}}-\frac{\tau_{\rho\theta}\tau_{\theta z}}{\tau_{\rho z}}\right)=0\tag{2.5}$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}+\rho\frac{d\tau_{\rho\theta}}{dp}+2\tau_{\rho\theta}=0\tag{2.6}$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial z}+\frac{d\tau_{\rho z}}{d\rho}+\frac{\tau_{\rho z}}{\rho}=0\tag{2.7}$$

Полагая

$$\rho\frac{d\tau_{\rho\theta}}{d\rho}+2\tau_{\rho\theta}=a,\qquad a=\mathrm{const}\tag{2.8}$$

из (2.8) и (2.6) получим

$$\tau_{\rho\theta}=\frac{a}{2}+\frac{c_1}{\rho^2},\qquad \sigma=-a\theta+f(\rho,z),\qquad c_1=\mathrm{const}\tag{2.9}$$

Полагая

$$d\tau_{\rho z}/d\rho+\tau_{\rho z}/\rho=2b,\qquad b=\mathrm{const}\tag{2.10}$$

из (2.9), (2.7) получим

$$\tau_{\rho z}=b\rho+c_2/\rho,\qquad \sigma=-2bz+\varphi(\rho,\theta),\qquad c_2=\mathrm{const}\tag{2.11}$$

Из (2.5) следует

$$\sigma = F(\rho)+\Psi(\theta,z), \qquad F(\rho)=\frac{\tau_{\rho\theta}\tau_{\rho z}}{\tau_{\theta z}}-\int\left(\frac{\tau_{\rho\theta}\tau_{\rho z}}{\tau_{\theta z}}-\frac{\tau_{\rho\theta}\tau_{\theta z}}{\tau_{\rho z}}\right)\frac{d\rho}{\rho} \tag{2.12}$$

Из (2.9), (2.11), (2.12) следует

$$\sigma = -a\theta-2bz+F(\rho) \tag{2.13}$$

где $F(\rho)$ определяется согласно (2.12), а выражения $\tau_{\rho\theta}$, $\tau_{\rho z}$ – согласно (2.9), (2.11), (2.3).

Компоненты напряжений определяются из выражений (1.2), (1.12), (1.9), (1.11), (1.3). Отметим, что решение при $a = 0$ было получено в работе [6].

3. Положим

$$\tau_{ij}=\tau_{ij}(\theta) \tag{3.1}$$

Из (3.1), (2.2), (2.1) следует

$$\rho\frac{\partial\sigma}{\partial\rho}+\frac{d\tau_{\rho\theta}}{d\theta}+\left(\frac{\tau_{\rho\theta}\tau_{\rho z}}{\tau_{\theta z}}-\frac{\tau_{\rho\theta}\tau_{\theta z}}{\tau_{\rho z}}\right)=0 \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}+\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\tau_{\rho\theta}\tau_{\theta z}}{\tau_{\rho z}}\right)+2\tau_{\rho\theta}=0 \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial z}+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial\theta}+\tau_{\rho z}\right)=0 \tag{3.4}$$

Положим

$$\sigma=-a\ln\rho+\sigma^0(\theta), \qquad a=\mathrm{const} \tag{3.5}$$

Согласно (3.5) из (3.2), (3.3), (3.4) соответственно получим

$$d\tau_{\rho\theta}/d\theta+\tau_{\rho\theta}\tau_{\rho z}/\tau_{\theta z}-\tau_{\rho\theta}\tau_{\theta z}/\tau_{\rho z}=a \tag{3.6}$$

$$\sigma^0=-\frac{\tau_{\rho\theta}\tau_{\theta z}}{\tau_{\rho z}}-2\int\tau_{\rho\theta}d\theta \tag{3.7}$$

$$d\tau_{\theta z}/d\theta+\tau_{\rho z}=0 \tag{3.8}$$

Величины $\tau_{ij}(\theta)$ связаны соотношением (2.3).

Три уравнения (3.8), (3.6), (2.3) определяют компоненты $\tau_{ij}(\theta)$, величина σ определяется согласно (3.5), (3.7), а компоненты напряжения – согласно (2.2).

Отметим, что предположение $\tau_{ij}(z)$ не проходит.

4. Уравнения равновесия в сферической системе координат $\rho\theta\varphi$ имеют вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial\sigma_\rho}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau_{\rho\theta}}{\partial\theta}+\frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial\tau_{\rho\varphi}}{\partial\varphi}+\frac{1}{\rho}[2\sigma_\rho-(\sigma_\theta+\sigma_\varphi)+\tau_{\rho\theta}\operatorname{ctg}\theta]=0\\ \frac{\partial\tau_{\rho\theta}}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+\frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial\tau_{\theta\varphi}}{\partial\varphi}+\frac{1}{\rho}[3\tau_{\rho\theta}+(\sigma_\theta-\sigma_\varphi)\operatorname{ctg}\theta]=0\\ \frac{\partial\tau_{\rho\varphi}}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau_{\theta\varphi}}{\partial\theta}+\frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial\sigma_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{1}{\rho}[3\tau_{\rho\varphi}+2\tau_{\theta\varphi}\operatorname{ctg}\theta]=0\end{gathered} \tag{4.1}$$

Для данного случая справедливы соотношения (2.2), (2.3) с заменой индекса z на φ, что и предполагается в дальнейшем. Предположим

$$\tau_{ij} = \tau_{ij}(\theta) \tag{4.2}$$

Из (2.2), (4.1), (4.2) следует

$$\rho\frac{\partial\sigma}{\partial\rho} + \frac{d\tau_{\rho\theta}}{d\theta} + 2\frac{\tau_{\rho\theta}\tau_{\rho\varphi}}{\tau_{\theta\varphi}} - \left(\frac{\tau_{\rho\theta}\tau_{\theta\varphi}}{\tau_{\rho\varphi}} + \frac{\tau_{\rho\varphi}\tau_{\theta\varphi}}{\tau_{\rho\theta}}\right) + \tau_{\rho\theta}\operatorname{ctg}\theta = 0 \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\theta} + \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\tau_{\rho\theta}\tau_{\theta\varphi}}{\tau_{\rho\varphi}}\right) + 3\tau_{\rho\theta} + \left(\frac{\tau_{\rho\theta}\tau_{\theta\varphi}}{\tau_{\rho\varphi}} + \frac{\tau_{\rho\varphi}\tau_{\theta\varphi}}{\tau_{\rho\theta}}\right)\operatorname{ctg}\theta = 0 \tag{4.4}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\sigma}{\partial\varphi} + \frac{d\tau_{\theta\varphi}}{d\theta} + 3\tau_{\rho\varphi} + 2\tau_{\theta\varphi}\operatorname{ctg}\theta = 0 \tag{4.5}$$

Положим

$$\sigma = -a\ln\rho - b\varphi + \sigma^0(\theta), \qquad a, b = \text{const} \tag{4.6}$$

Согласно (4.6), из (4.3), (4.4), (4.5) соответственно получим

$$\frac{d\tau_{\rho\theta}}{d\theta} + 2\frac{\tau_{\rho\theta}\tau_{\rho\varphi}}{\tau_{\theta\varphi}} - \left(\frac{\tau_{\rho\theta}\tau_{\theta\varphi}}{\tau_{\rho\varphi}} + \frac{\tau_{\rho\varphi}\tau_{\theta\varphi}}{\tau_{\rho\theta}}\right) + \tau_{\rho\theta}\operatorname{ctg}\theta = a \tag{4.7}$$

$$\sigma^0 = -\frac{\tau_{\rho\theta}\tau_{\theta\varphi}}{\tau_{\rho\varphi}} - \int\left[3\tau_{\rho\theta} + \left(\frac{\tau_{\rho\theta}\tau_{\theta\varphi}}{\tau_{\rho\varphi}} - \frac{\tau_{\rho\varphi}\tau_{\theta\varphi}}{\tau_{\rho\theta}}\right)\operatorname{ctg}\theta\right]d\theta \tag{4.8}$$

$$\frac{d\tau_{\theta\varphi}}{d\theta} + 3\tau_{\rho\varphi} + 2\tau_{\theta\varphi}\operatorname{ctg}\theta = \frac{b}{\sin\theta} \tag{4.9}$$

Три уравнения (4.7), (4.9), (2.3) определяют компоненты $\tau_{ij}(\theta)$, величина σ определяется согласно соотношениям (4.6), (4.8), а компоненты напряжения – согласно (2.2).

Предположения $\tau_{ij}(\rho)$, $\tau_{ij}(\varphi)$ не проходят.

5. Условие предельного состояния для среды, свойства которой зависят от среднего давления, запишем в виде (1.3), полагая

$$k = k_0 + a\sigma, \qquad k_0, a = \text{const} \tag{5.1}$$

В дальнейшем введем обозначение $k = \xi$, тогда согласно (5.1):

$$\xi = a\sigma + k_0, \qquad \sigma = (\xi - k_0)/a \tag{5.2}$$

Соотношение (1.3), согласно (5.2), перепишем в виде

$$\begin{gathered}
\sigma_x = C\xi - k_0/a + \xi\cos^2\varphi_1, \qquad \tau_{xy} = \xi\cos\varphi_1\cos\varphi_2 \\
\sigma_y = C\xi - k_0/a + \xi\cos^2\varphi_2, \qquad \tau_{xy} = \xi\cos\varphi_2\cos\varphi_3 \\
\sigma_x = C\xi - k_0/a + \xi\cos^2\varphi_3, \qquad \tau_{xy} = \xi\cos\varphi_1\cos\varphi_3 \\
\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_3 = 1, \qquad C = 1/a - 1/3
\end{gathered} \tag{5.3}$$

Подставляя соотношения (5.3) в уравнения равновесия (1.1), получим

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\xi}{\partial x}(C+\cos^2\varphi_1)+\frac{\partial\xi}{\partial y}\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\frac{\partial\xi}{\partial z}\cos\varphi_1\cos\varphi_3=\\
&=-\xi\left[\frac{\partial(\cos\varphi_1\cos\varphi_1)}{\partial x}+\frac{\partial(\cos\varphi_1\cos\varphi_2)}{\partial y}+\frac{\partial(\cos\varphi_1\cos\varphi_3)}{\partial z}\right]\\
&\frac{\partial\xi}{\partial x}\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\frac{\partial\xi}{\partial y}(C+\cos^2\varphi_2)+\frac{\partial\xi}{\partial z}\cos\varphi_2\cos\varphi_3=\\
&=-\xi\left[\frac{\partial(\cos\varphi_1\cos\varphi_2)}{\partial x}+\frac{\partial(\cos\varphi_2\cos\varphi_2)}{\partial y}+\frac{\partial(\cos\varphi_2\cos\varphi_3)}{\partial z}\right]\\
&\frac{\partial\xi}{\partial x}\cos\varphi_1\cos\varphi_3+\frac{\partial\xi}{\partial y}\cos\varphi_2\cos\varphi_3+\frac{\partial\xi}{\partial z}(C+\cos^2\varphi_3)=\\
&=-\xi\left[\frac{\partial(\cos\varphi_1\cos\varphi_3)}{\partial x}+\frac{\partial(\cos\varphi_2\cos\varphi_3)}{\partial y}+\frac{\partial(\cos\varphi_3\cos\varphi_3)}{\partial z}\right]
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

Из (5.4) можно определить

$$
\begin{aligned}
&-\frac{C}{\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}=\bar{n}\,\mathrm{grad}(\cos\varphi_1)+\frac{C\cos\varphi_1}{1+C}\mathrm{div}\,\bar{n}\\
&-\frac{C}{\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}=\bar{n}\,\mathrm{grad}(\cos\varphi_2)+\frac{C\cos\varphi_2}{1+C}\mathrm{div}\,\bar{n}\\
&-\frac{C}{\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}=\bar{n}\,\mathrm{grad}(\cos\varphi_3)+\frac{C\cos\varphi_3}{1+C}\mathrm{div}\,\bar{n}
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

$$\bar{n}=\cos\varphi_1\mathbf{i}+\cos\varphi_2\mathbf{j}+\cos\varphi_3\mathbf{k}$$

Следуя идеям Гартмана [2], положим

$$\xi=\exp(mx+ny)\eta(z),\qquad \varphi_i=\varphi_i(z) \tag{5.6}$$

Согласно (5.6) уравнения (5.5) примут вид

$$-mC=\cos\varphi_3\frac{\partial\cos\varphi_1}{\partial z}+\frac{C\cos\varphi_1}{1+C}\frac{\partial\cos\varphi_3}{\partial z} \tag{5.7}$$

$$-nC=\cos\varphi_3\frac{\partial\cos\varphi_2}{\partial z}+\frac{C\cos\varphi_2}{1+C}\frac{\partial\cos\varphi_3}{\partial z} \tag{5.8}$$

$$-\frac{C}{\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}=\cos\varphi_3\frac{\partial\cos\varphi_3}{\partial z}+\frac{C\cos\varphi_3}{1+C}\frac{\partial\cos\varphi_3}{\partial z} \tag{5.9}$$

Уравнение (5.9) приводит к интегралу

$$\eta=c\exp\left(-\frac{1+2C}{2C(1+C)}\cos^2\varphi_3\right),\qquad c=\mathrm{const} \tag{5.10}$$

Из уравнений (5.7), (5.8) следует

$$\frac{d(n\cos\varphi_1-m\cos\varphi_2)}{dz}+\frac{C}{1+C}(n\cos\varphi_1-m\cos\varphi_2)\frac{d\ln\cos\varphi_3}{dz}=0 \tag{5.11}$$

Уравнение (5.11) интегрируется

$$n\cos\varphi_1 - m\cos\varphi_2 = B(\cos\varphi_3)^{-\varkappa}, \qquad \varkappa = \frac{C}{1+C} \tag{5.12}$$

Из (5.7), (5.8) также следует

$$C(m\cos\varphi_1 + n\cos\varphi_2) = \frac{\cos\varphi_3}{2}\frac{d(\cos^2\varphi_3)}{dz} - \varkappa(1-\cos^2\varphi_3)\frac{d\cos\varphi_3}{dz} \tag{5.13}$$

Соотношения (5.13) запишем в виде

$$m\cos\varphi_1 + n\cos\varphi_2 = M, \qquad M = \frac{C-(1+2C)\cos^2\varphi_3}{C(1+C)}\sin\varphi_3\frac{d\varphi_3}{dz} \tag{5.14}$$

Интеграл (5.12) перепишем следующим образом

$$n\cos\varphi_1 - m\cos\varphi_2 = N, \qquad N = B(\cos\varphi_3)^{-\varkappa} \tag{5.15}$$

Из (5.14), (5.15) следует

$$\cos\varphi_1 = \frac{1}{m^2+n^2}(Mm+Nn), \qquad \cos\varphi_2 = \frac{1}{m^2+n^2}(Mn-Nm) \tag{5.16}$$

Используя соотношение $\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_3 = 1$, согласно (5.16) получим

$$M = \pm\sqrt{(m^2+n^2)\sin^2\varphi_3 - N^2} \tag{5.17}$$

Из (5.17), (5.14) найдем

$$\frac{d\varphi_3}{dz} = \frac{\pm C(1+C)\sqrt{(m^2+n^2)\sin^2\varphi_3 - N^2}}{[C-(1+2C)\cos^2\varphi_3]\sin\varphi_3} \tag{5.18}$$

где N определяется согласно (5.15).

Согласно (5.18), зависимость $\varphi_3(z)$ определяется квадратурой

$$\pm\int\frac{[C-(1+2C)\cos^2\varphi_3]\sin\varphi_3 d\varphi_3}{C(1+C)\sqrt{(m^2+n^2)\sin^2\varphi_3 - B^2(\cos\varphi_3)^{-2\varkappa}}} = Z + D, \qquad D = \text{const} \tag{5.19}$$

Из (5.19), (5.16) определяются функции $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$.

Величина ξ определяется согласно (5.6), (5.10), таким образом, могут быть определены компоненты напряжения согласно (5.3).

Случай плоской задачи имеет место при $\cos\varphi_1 = 0$ или $\cos\varphi_2 = 0$. Положим $\cos\varphi_2 = 0$, тогда, обозначая $\varphi_1 = \varphi$, будем иметь $\varphi_3 = \pi/2 - \varphi$. Из (6.8) следует $n = 0$, соотношение (5.7) принимает вид

$$-mC = \sin\varphi\frac{d\cos\varphi}{dz} + \frac{C\cos\varphi}{1+C}\frac{d\sin\varphi}{dz} \tag{5.20}$$

или

$$mC(1+C)dz = [C\cos^2\varphi - (1+C)\sin^2\varphi]d\varphi \tag{5.21}$$

Откуда следует (с точностью до обозначений) интеграл Гартмана [2].

Отметим, что в плоском случае либо $n = \cos\varphi_2 = 0$, либо $m = \cos\varphi_1 = 0$, поэтому $B = N = 0$, (5.12), (5.15) и интеграл Гартмана следует непосредственно из (5.19).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Прандтль Л.* Примеры применения теоремы Генки к равновесию пластических тел // Теория пластичности. М.: ИЛ, 1948. С. 102–113.
2. *Надаи А.* Пластичность и разрушение твёрдых тел. Т.2. М.: Мир, 1969. 597 с.
3. *Ивлев Д.Д.* Теория идеальной пластичности. М.: Наука. 1966. 231 с.
4. *Задоян М.А.* Пространственные задачи теории пластичности. М.: Наука. 1992. 382 с.
5. *Ивлев Д.Д.* О соотношениях, определяющих пластическое течение при условии пластичности Треска и его обобщениях // Докл. АН СССР. 1959. Т. 124. № 3. С. 546–549.
6. *Ивлев Д.Д.* Об одном частном решении общих уравнений теории идеальной пластичности в цилиндрических координатах при условии пластичности Треска // Изв. АН СССР. ОТН. 1959. № 1. С. 68–74.

Чебоксары

Поступила в редакцию 27.III.1997