

УДК 539.376

© 1998 г. - В.М. АЛЕКСАНДРОВ, А.А. ШМАТКОВА

**УСТАНОВИВШАЯСЯ ПОЛЗУЧЕСТЬ ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА,
ЛЕЖАЩЕГО НА МЕРЗЛОМ ГРУНТЕ,
ПРИ СОСРЕДОТОЧЕННОМ ВОЗДЕЙСТВИИ**

Рассмотрена плоская задача об установившейся ползучести ледяного покрова, подстилаемого мерзлым грунтом. Предполагается, что материал покрова и материал грунта несжимаемы и описываются степенной зависимостью между интенсивностью скоростей деформаций сдвига и интенсивностью касательных напряжений с различными показателями нелинейности. Для описания деформации грунта принята модель нелинейно ползучего винклеровского основания. С учетом этого и на базе гипотез Кирхгофа для описания деформации покрова на грунте получено нелинейное дифференциальное уравнение относительно скорости прогиба. Найден первый интеграл, что позволило методом пристрелки получить приближенное решение этого дифференциального уравнения при воздействии на покров сосредоточенной нагрузки. Рассмотрены конкретные примеры.

1. Пусть бесконечная ледяная плита толщины h находится в условиях цилиндрического изгиба под действием приложенного к ее верхней грани погонного сосредоточенного усилия P и лежит на мерзлом грунте толщины H , который находится в условиях плоской деформации и в свою очередь покоится на скальном основании (фиг. 1).

Относительно материала плиты и материала грунта полагаем, что они несжимаемы, то есть их объемные модули $k_s = 0$ (здесь и далее $s = 1$ для плиты и $s = 2$ для грунта), а установившаяся деформация ползучести плиты и грунта может быть описана следующими определяющими соотношениями [1]:

$$\xi_{ij} = \psi_s (\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.1)$$

$$2\psi_1 = B^{(1)} \tau^{m-1}, \quad 2\psi_2 = B^{(2)} \tau^{n-1}$$

$$\sigma = 3^{-1} \sigma_{ij} \delta_{ij}, \quad \tau^2 = 2^{-1} (\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) (\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij})$$

Здесь ξ_{ij} – компоненты тензора скоростей деформации, σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, δ_{ij} – символ Кронекера, $m > 1$ – показатель нелинейности для плиты, $n > 1$ – показатель нелинейности для грунта. Отметим еще, что [1]:

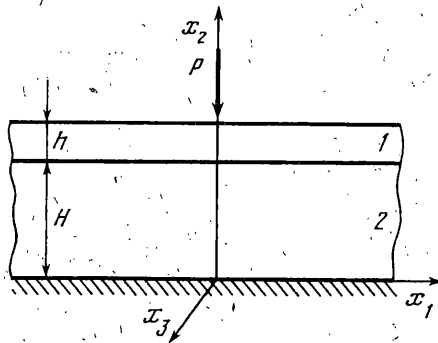
$$B^{(1)} = 3^{1/2(m+1)} B_1^{(1)}, \quad B^{(2)} = 3^{1/2(n+1)} B_1^{(2)} \quad (1.2)$$

где $B_1^{(s)}$ – коэффициенты в зависимостях

$$\xi = B_1^{(1)} \sigma^m, \quad \xi = B_1^{(2)} \sigma^n \quad (\sigma > 0) \quad (1.3)$$

для плиты и грунта в одноосном напряженном состоянии.

В случае плоской деформации конструкции $\xi_{33} = 0$ и следовательно $\sigma_{33} = \sigma =$



Фиг. 1

$= 2^{-1}(\sigma_{11} + \sigma_{22})$. При этом также $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$ и система соотношений (1.1) примет вид

$$\xi_{11} = 2^{-1} \psi_s (\sigma_{11} - \sigma_{22}), \quad \xi_{22} = 2^{-1} \psi_s (\sigma_{22} - \sigma_{11}) \quad (1.4)$$

$$\xi_{12} = \psi_s \sigma_{12}, \quad 2\psi_1 = B^{(1)} \tau^{m-1}, \quad 2\psi_2 = B^{(2)} \tau^{n-1}$$

$$\tau^2 = 4^{-1} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \sigma_{12}^2]$$

Далее при $s = 1$ (для плиты) принимаем классические допущения плиты Кирхгофа. Полагая, как обычно, $\sigma_{22} = \sigma_{12} = 0$, из (1.4) найдем

$$\sigma_{11} = \left(\frac{2|\xi_{11}|}{B^{(1)}} \right)^{\mu-1} \frac{4\xi_{11}}{B^{(1)}} \left(\mu = \frac{1}{m} \right) \quad (1.5)$$

а в силу гипотезы плоских сечений для относительной скорости удлинения волокна, расположенного на расстоянии r от нейтральной плоскости, с достаточной точностью имеем

$$\xi_{11} = rv''(x_1) \quad (1.6)$$

где $v(x_1)$ — средняя по толщине скорость прогиба точек плиты, совпадающая очевидно со скоростью прогиба верхней грани слоя грунта.

Для погонного изгибающего момента

$$M(x_1) = \int_{-h/2}^{h/2} r \sigma_{11} dr \quad (1.7)$$

с учетом соотношений (1.5), (1.6) и первого соотношения (1.2) получим

$$M(x_1) = D^* |v''|^{\mu-1} v'' \quad (1.8)$$

$$D^* = h^{\mu+2} \{(\mu + 2) 3^{(1/2)(1+\mu)} [B_1^{(1)}]^\mu\}^{-1}$$

Заметим, что при $\mu = 1$ и с заменой $B_1^{(1)}$ на E^{-1} выражение D^* совпадает с изгибной жесткостью D для упругого несжимаемого материала. Вспоминая, наконец, известную зависимость

$$M''(x_1) = \sigma_2(x_1) - \sigma_1(x_1) \quad (1.9)$$

где σ_1 и σ_2 — нормальные напряжения на верхней и нижней поверхностях плиты, окончательно получим следующее нелинейное дифференциальное уравнение для определения скорости прогиба нейтральной плоскости плиты

$$D^* (|v''|^{\mu-1} v'')'' = \sigma_2 - \sigma_1 \quad (1.10)$$

Подобное уравнение для балки получено в [1].

При $s = 2$ (для слоя грунта) принимаем классические допущения основания Винклера. Полагая, как обычно, $\sigma_{11} = \sigma_{12} = 0$, из (1.4) найдем

$$\sigma_{22} = \left(\frac{2|\xi_{22}|}{B^{(2)}} \right)^{\nu-1} \frac{4\xi_{22}}{B^{(2)}} \left(\nu = \frac{1}{n} \right) \quad (1.11)$$

Учитывая, далее, второе соотношение (1.2) и то обстоятельство, что скорость деформации ξ_{22} по высоте слоя постоянна и равна $(-\nu H^{-1})$, будем иметь

$$\sigma_{22} = -D_* |v|^{v-1} v \quad (1.12)$$

$$D_* = 2^{\nu+1} \{ H^\nu 3^{1/2(1+\nu)} [B_1^{(2)}]^\nu \}^{-1}$$

Заметим, что при $\nu = 1$ и с заменой $B_1^{(2)}$ на E^{-1} выражение D_* совпадает с коэффициентом пропорциональности между нагрузкой и перемещением верхней грани слоя, лежащего без трения на жестком основании, для упругого несжимаемого материала [2].

2. Поскольку в (1.10) $\sigma_1 = 0$ при $x_1 \neq 0$, а $\sigma_2 = \sigma_{22}$, где σ_{22} определяется формулами (1.12), придем к следующему основному уравнению задачи:

$$D^* (|v|^{\mu-1} v'')'' + D_* |v|^{v-1} v = 0 \quad (2.1)$$

Граничные условия в силу симметрии задачи относительно оси x_2 сформулируем при $x_1 \geq 0$. Они имеют вид

$$v' = 0, \quad D^* (|v|^{\mu-1} v'')' = 1/2 P \quad (x_1 = 0) \quad (2.2)$$

$$v = 0, \quad v' = 0 \quad (x_1 = \infty)$$

Обезразмерим уравнение (2.1) и граничные условия (2.2) таким образом

$$v = M\tilde{v}, \quad x_1 = N\tilde{x}; \quad \frac{M^{\mu-\nu} D^*}{N^{2\mu+2} D_*} = 1, \quad \frac{2M^\mu D^*}{PN^{2\mu+1}} = 1 \quad (2.3)$$

Тогда окончательно получим следующую математическую формулировку задачи:

$$(|v|^{\mu-1} v'')'' + |v|^{v-1} v = 0 \quad (x \geq 0) \quad (2.4)$$

$$v' = 0, \quad (|v|^{\mu-1} v'')' = 1 \quad (x = 0)$$

$$v = 0, \quad v' = 0 \quad (x = \infty)$$

в которой в качестве параметров остались лишь показатели нелинейности μ и ν материалов плиты и грунта. В (2.4) и далее волны над v и x опускаем. После решения задачи (2.4) безразмерный погонный изгибающий момент в плите в соответствии с (1.9) найдем по формуле

$$Q(x) = M(x_1) N^{2\mu} (D^* M^\mu)^{-1} = |v|^{\mu-1} v'' \quad (x \geq 0) \quad (2.5)$$

При $\mu = \nu = 1$ решение задачи (2.4) находится просто [3]:

$$v = \beta e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) \quad (\beta = 2^{-1/2}) \quad (2.6)$$

$$Q = \beta e^{-\beta x} (\sin \beta x - \cos \beta x)$$

Далее главное внимание уделим случаю, когда μ и ν отличны от 1. Положим в уравнении (2.4):

$$v = \eta_0, \quad \eta_0' = \eta_1, \quad |\eta_1|^{\mu-1} \eta_1' = \eta_2, \quad \eta_2' = \eta_3 \quad (2.7)$$

тогда очевидно

$$\eta_1' = |\eta_2|^{m-1} \eta_2, \quad \eta_3' = -|\eta_0|^{v-1} \eta_0 \quad (2.8)$$

На основании (2.7) и (2.8) составим выражение

$$\eta_3 \eta_1' + \eta_3' \eta_1 = (\eta_3 \eta_1)' = \frac{(|\eta_2|^{m+1})'}{m+1} - \frac{(|\eta_0|^{v+1})'}{v+1} \quad (2.9)$$

Отсюда имеем первый интеграл уравнения (2.4):

$$(|v''|^{m-1} v'')' v' = \mu(\mu+1)^{-1} |v''|^{m+1} - (v+1)^{-1} |v'|^{v+1} \quad (2.10)$$

причем постоянная интегрирования в силу двух последних условий (2.4) равна нулю.

3. Решим задачу (2.4) численно методом пристрелки. Для этого введем переменные

$$v = \xi_0, \quad \xi_0' = \xi_1, \quad \xi_1' = \xi_2, \quad \xi_2' = \mu^{-1} |\xi_2|^{1-\mu} \xi_3 \quad (3.1)$$

использование которых приводит к меньшим погрешностям при вычислениях, чем использование переменных (2.7), удобных для вывода первого интеграла (2.10).

В переменных (3.1) задача (2.4) примет вид

$$\begin{aligned} \xi_3' &= -\xi_0^v \\ \xi_1 &= 0, \quad \xi_3 = 1 \quad (x=0); \quad \xi_0 = \xi_1 = 0 \quad (x=\infty) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Далее, согласно методу пристрелки:

(1) решалась численно задача Коши для системы дифференциальных уравнений, определяемой последними тремя соотношениями (3.1) и первым соотношением (3.2), при условиях (3.2) на ξ_1, ξ_3' и выбранных произвольным образом значениях ξ_0, ξ_3' при $x=0$;

(2) при некоторой, достаточно удаленной от нуля координате x проверялась согласно двум последним граничным условиям (3.2) степень близости к нулю функционала $F = \xi_0^2 + \xi_1^2$;

(3) если указанная степень близости оказывалась неудовлетворительной, то выбирались новые значения переменных ξ_0, ξ_3' при $x=0$ и возвращались к исполнению пункта (1).

Вычисления проводились методом Рунге–Кутты четвертого порядка с автоматическим подбором шага. Контрольный член брался в форме Ингланда [4].

При минимизации функционала F оказалось, что он имеет локальные минимумы на решениях системы, описанной в пункте (1), близких к искомому. Это обстоятельство сделало крайне проблематичной возможность применения стандартных градиентных методов, что вело к необходимости прямого перебора всех возможных пар ξ_0, ξ_3' .

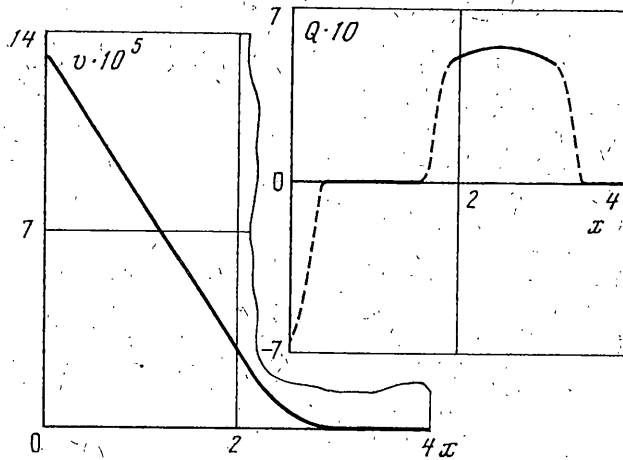
В этой ситуации сыграло роль знание первого интеграла (2.10), позволившего выразить при $x=0$ значение ξ_2 через ξ_0 , именно

$$\xi_2 = -[(\mu^{-1}+1)/(1+v)]^{1/(1+\mu)} \xi_0^{(1+v)/(1+\mu)} \quad (3.3)$$

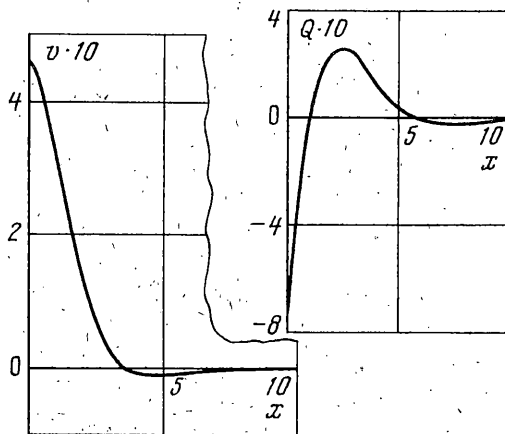
причем знак здесь выбирался с учетом того, что $v'' < 0$ при $x=0$. Соотношение (3.3) сделало возможным производить прямой перебор только по значениям переменной ξ_0 .

В рассмотренных численных примерах используются данные исследований, приведенные в [5].

В первом примере относительно материала плиты предполагалось, что это – слой глины бат-байосса, замороженной до температуры -10° . При данном температурном



Фиг. 2



Фиг. 3

режиме показатель нелинейности для нее $m = 15,81$. В качестве грунта бралась келловейская супесь, также замороженная до температуры -10° . Соответственно показатель нелинейности $n = 10,77$. Численные значения для показателей нелинейности получены в результате обработки экспериментальных данных ([5], таблица 7) по скорости установившегося течения замороженных грунтов в зависимости от напряжения (одноосное сжатие).

Во втором примере рассмотрен случай, когда слой льда с показателем нелинейности $m = 1,72$ лежит на более "старом" льду с показателем нелинейности $n = 1,5$.

На фиг. 2, 3 представлены графики для безразмерной скорости прогиба $v(x)$ нейтральной плоскости плиты и для безразмерного погонного изгибающего момента $Q(x)$. Для пунктирных частей кривой на фиг. 2 график $Q(x)$ носит качественный характер в связи с накоплением ошибки при возведении v' в малую степень n .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 94-01-00181-а) и Международного научного фонда и Российского Правительства (J1B100).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Качанов Л.М. Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960. 455 с.
2. Александров В.М. О приближенном решении одного типа интегральных уравнений // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 5. С. 934–943.
3. Тимошенко С.П. Сопротивление материалов. Т. 2. М.: Наука, 1965. 480 с.
4. Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на Фортране. М.: Изд-во МГУ, 1990. 336 с.
5. Вялов С.С., Гмошинский В.Г., Городецкий С.Э. и др. Прочность и ползучесть мерзлых грунтов и расчеты ледогрунтовых ограждений. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 254 с.

Москва

Поступила в редакцию
14.XII.1995