МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1998

УДК 539.374

© 1998 г. И.Ю. ЦВЕЛОДУБ

ОБРАТНАЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

Рассматривается задача определения в упругопластическом теле зоны пластичности и внешних воздействий по известным остаточным перемещениям точек его поверхности после снятия этих воздействий. Исследуются случаи, когда решение такой задачи единственно. Предложен итерационный метод решения. Рассмотрены некоторые примеры.

Отличие данной задачи (в которой предполагается, что активное деформирование и разгрузка происходят мгновенно, что позволяет пренебречь вязкими деформациями) от подобных, изученных ранее [1–3], состоит в том, что в последних остаточные перемещения возникают в результате внешних воздействий в течение заданного (конечного) промежутка времени и мгновенной (упругой) или медленной (неупругой) разгрузки и что зона неупругого деформирования охватывает всю область, занятую вязкоупругопластическим телом.

Отметим также, что родственная обратная упругопластическая задача (контактная) о нахождении формы штампа, обеспечивающего заданный отпечаток на контактной поверхности после активного деформирования и упругой разгрузки, рассмотрена в [4].

1. Предположим, что в результате неизвестных внешних силовых воздействий и их последующего снятия, т. е. после упругой разгрузки, точки поверхности упругопластического тела получили перемещения $\tilde{u}_{k*}$, отсчитываемые от начального недеформированного состояния, в котором находилось тело до приложения этих воздействий. Возникает вопрос о возможности определения последних, а следовательно, и напряженно-деформированного состояния в процессе нагружения и разгрузки, а также пластической области. Очевидно, в общем случае дать однозначный ответ на этот вопрос нельзя, поскольку, например, решение прямых упругопластических задач в рамках известной теории течения зависит от истории нагружения тела внешними силами, которая в данной обратной задаче (ОЗ) является искомой при известных лишь начальной (недеформированной) и конечной (остаточной) конфигурациях тела. Однако при некоторых дополнительных предположениях о характере упомянутых воздействий или об определяющих уравнениях упругопластического деформирования решение ОЗ будет единственным. Рассмотрим эти случаи.

Пусть упругопластическое тело занимает область v с границей S. Его полные деформации ε_{kl} предполагаются малыми, поэтому [1]:

$$\varepsilon_{kl} = 0,5(u_{k,l} + u_{l,k}) \tag{1.1}$$

(u_k – компоненты вектора перемещений, индекс после запятой означает производную по соответствующей координате), причем

$$\varepsilon_{kl} = a_{klmn}\sigma_{mn} + \varepsilon_{kl}^{p} \tag{1.2}$$

где $a_{klmn}, \sigma_{kl}, \varepsilon_{kl}^{p}$ – компоненты тензоров упругих податливостей, напряжений и пластических деформаций; по повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до 3. В (1.1), (1.2) и всюду далее $k, l = 1, 2, 3$.

Для любого набора величин x_{kl}, одновременно не равных нулю, имеет место неравенство [1]:

$$a_{klmn}x_{kl}x_{mn} > 0, \quad x_{kl}x_{kl} \neq 0 \tag{1.3}$$

Считаем, что массовые силы отсутствуют, поэтому уравнения равновесия имеют вид

$$\sigma_{kl,l} = 0 \tag{1.4}$$

Предположим, что искомые внешние нагрузки (или перемещения точек S) в процессе активного деформирования (т. е. до разгрузки), изменялись пропорционально одному параметру, поэтому приближенно можно считать, что в теле реализуется нагружение, близкое к простому. Это дает основание применять деформационную теорию пластичности, согласно которой

$$\varepsilon_{kl}^{p} = \begin{cases} 0, & s < \sigma_T \\ \lambda \partial s / \partial \sigma_{kl}, & s \geqslant \sigma_T \end{cases} \tag{1.5}$$

где $s = s(\sigma_{kl})$ – однородная первой степени выпуклая функция, совпадающая при одноосном растяжении с напряжением σ [1], σ_T – предел текучести; $\lambda = \lambda(s) > 0$, $\lambda'(s) > 0$ – для упрочняющегося материала и $\lambda > 0$ – неопределенный множитель для идеально пластического материала (в этом случае второе неравенство в (1.5) заменяется равенством $s = \sigma_T$).

Из (1.5) и известного неравенства для выпуклых функций [1]:

$$s(\sigma_{kl}^{(1)}) - s(\sigma_{kl}^{(2)}) \geqslant \partial s / \partial \sigma_{kl}\Big|_{\sigma_{kl}=\sigma_{kl}^{(2)}} (\sigma_{kl}^{(1)} - \sigma_{kl}^{(2)}) \tag{1.6}$$

вытекает условие устойчивости пластического деформирования

$$\Delta\varepsilon_{kl}^{p}\Delta\sigma_{kl} \geqslant 0, \quad \Delta\varepsilon_{kl}^{p} = \varepsilon_{kl}^{p(1)} - \varepsilon_{kl}^{p(2)}, \quad \Delta\sigma_{kl} = \sigma_{kl}^{(1)} - \sigma_{kl}^{(2)} \tag{1.7}$$

справедливое для любых напряжений $\sigma_{kl}^{(1)}$ и $\sigma_{kl}^{(2)}$ как в пластической, так и в упругой областях.

Для дальнейшего необходимо заметить, что знак равенства в (1.7) для обоих упомянутых видов материалов при $\varepsilon_{kl}^{p(1)} \neq 0$ и $\varepsilon_{kl}^{p(2)} \neq 0$ возможен для пластически сжимаемой среды ($\partial s/\partial\sigma_{kk} \neq 0$) только при $\Delta\sigma_{kl} = 0$, а для несжимаемой ($\partial s/\partial\sigma_{kk} = 0$) – только при $\Delta\sigma_{kl} = \Delta p\delta_{kl}$ (δ_{kl} – компоненты единичного тензора), либо в случае $\varepsilon_{kl}^{p(1)} = \varepsilon_{kl}^{p(2)} = 0$, т. е. при $s_i < \sigma_T$ ($i = 1, 2$). Действительно, для идеально пластических материалов имеет место более сильное, чем (1.7), условие $\varepsilon_{kl}^{p(1)}\Delta\sigma_{kl} \geqslant 0$, $\sigma_{kl} = \sigma_{kl}^{(1)} - \sigma_{kl}^{(2)}$, причем знак равенства возможен только в ситуациях, указанных выше. Для упрочняющегося материала из (1.5) и (1.6) имеем: $\Delta\varepsilon_{kl}^{p}\Delta\sigma_{kl} \geqslant \Delta\lambda\Delta s = \lambda'(s_0)(\Delta s)^2 \geqslant 0$, где s_0 лежит между s_1 и s_2. Поэтому $\Delta\varepsilon_{kl}^{p}\Delta\sigma_{kl} = 0$ только при $\Delta s = 0$, когда $\Delta(\partial s/\partial\sigma_{kl})\Delta\sigma_{kl} = 0$, что в силу выпуклости поверхности $s = \text{const}$ возможно только в указанных выше случаях [1]. Отметим также, что ситуация, когда $\varepsilon_{kl}^{p(1)} \neq 0$, $\varepsilon_{kl}^{p(2)} = 0$ (т. е. $s_1 \geqslant \sigma_T$, $s_2 < \sigma_T$) и $\varepsilon_{kl}^{p(1)}\Delta\sigma_{kl} = 0$ невозможна, так как вследствие (1.6) будем иметь $0 = \partial s / \partial \sigma_{kl}\Big|_{\sigma_{kl}=\sigma_{kl}^{(1)}} \Delta\sigma_{kl} \geqslant s_1 - s_2$.

Перемещениям $\tilde{u}_k$ в v после упругой разгрузки соответствуют согласно (1.1) остаточные деформации $\tilde{\varepsilon}_{kl}$, причем

$$\tilde{\varepsilon}_{kl} = a_{klmn}\rho_{mn} + \varepsilon_{kl}^{p} \tag{1.8}$$

где ρ_{kl} – остаточные напряжения, возникающие в v после разгрузки. При этом [1, 2]:

$$\sigma_{kl} = \sigma_{kl}^{e} + \rho_{kl}, \tag{1.9}$$

где σ_{kl}^{e} – напряжения, соответствующие решению чисто упругой задачи с нагрузками p_k на S перед разгрузкой, так что напряжениям ρ_{kl} отвечают нулевые внешние нагрузки.

Рассматриваемая ОЗ сводится к нахождению поля напряжений σ_{kl} в v перед разгрузкой (которое определяет внешние нагрузки p_k на S и зону пластичности в v) по известным остаточным перемещениям

$$\tilde{u}_k = \tilde{u}_{k*} \quad \text{на} \quad S \tag{1.10}$$

Докажем, что при сделанных выше предположениях решение данной ОЗ будет единственным (при $\varepsilon_{kk}^{p} \neq 0$), либо определяется с точностью до произвольного постоянного гидростатического давления (при $\varepsilon_{kk}^{p} = 0$). Как и в [1, 2], основой при доказательстве является известное уравнение виртуальных работ

$$\int_v \varepsilon_{kl}\sigma_{kl}dv = \int_S u_k p_k dS \tag{1.11}$$

справедливое для не связанных между собой полей ε_{kl} и σ_{kl}, удовлетворяющих соотношениям (1.1) и (1.4) соответственно; $p_k = \sigma_{kl}n_l$, n_k – компоненты единичного вектора внешней к S нормали.

Предположим, что существуют два решения рассматриваемой ОЗ, удовлетворяющих уравнениям (1.1), (1.2), (1.4), (1.5), (1.8), (1.9) при ограничениях (1.3), (1.7) и граничным условиям (1.10). Тогда для разностей соответствующих величин, которые будем обозначать с помощью символа Δ, из (1.10), (1.11) получим

$$\int_v \Delta\tilde{\varepsilon}_{kl}\Delta\sigma_{kl}dv = 0$$

Отсюда вследствие (1.8), (1.9) и равенства [1, 2]:

$$\int_v a_{klmn}\Delta\sigma_{kl}^{e}\Delta\rho_{mn}dv = 0 \tag{1.12}$$

будем иметь

$$\int_v (a_{klmn}\Delta\rho_{kl}\Delta\rho_{mn} + \Delta\varepsilon_{kl}^{p}\Delta\sigma_{kl})dv = 0 \tag{1.13}$$

Предположим, что в v существуют две зоны пластичности, соответствующие двум возможным решениям: $v_1 \cup v_{12}$ и $v_2 \cup v_{12}$, которые пересекаются по области v_{12}, т. е. $\varepsilon_{kl}^{p(1)} = 0$ в v_2; $\varepsilon_{kl}^{p(2)} = 0$ в v_1; $\varepsilon_{kl}^{p(1)} \neq 0$ и $\varepsilon_{kl}^{p(2)} \neq 0$ в v_{12}. Тогда (1.13) примет вид

$$\int_v a_{klmn}\Delta\rho_{kl}\Delta\rho_{mn}dv + \int_{v_1} \varepsilon_{kl}^{p(1)}\Delta\sigma_{kl}dv - \int_{v_2} \varepsilon_{kl}^{p(2)}\Delta\sigma_{kl}dv + \int_{v_{12}} \Delta\varepsilon_{kl}^{p}\Delta\sigma_{kl}dv = 0$$

что вследствие (1.3), (1.7) и замечания о знаке равенства в (1.7) возможно только в том случае, если каждый из 4-х интегралов обращается в нуль. Отсюда $\Delta\rho_{kl} = 0$ в v; $\varepsilon_{kl}^{p(i)} = 0$ в v_i, т. е. $v_i = \varnothing$ $(i = 1, 2)$, $\Delta\,\varepsilon_{kl}^{p}\Delta\sigma_{kl} = 0$ в v_{12}. Таким образом, остаточные напряжения ρ_{kl} всюду в v и зона пластичности $v_p \equiv v_{12}$ определяются однозначно, а напряжения σ_{kl} в последней – либо однозначно (для пластически сжимаемой среды), либо с точностью до гидростатического давления Δp (для несжимаемой среды), которое, как следует из (1.4), является постоянным. На основании (1.9) аналогичным образом определяются в

v_p и упругие напряжения σ^e_{kl}, а их производные по координатам $\sigma^e_{kl,i}$ (i = 1, 2, 3) – однозначны в v_p. Следовательно, на упругопластической границе S_p известны σ^p_{kl} (в указанном выше смысле) и $\partial\sigma^e_{kl}/\partial n_p$ ($\mathbf{n}_p$ – внешняя к S_p нормаль). Тогда, как показано в [5], и в упругой области $v\backslash v_p$ компоненты напряжений σ^e_{kl} будут определяться однозначно (при $\varepsilon^p_{kk} \neq 0$), либо с точностью до произвольного постоянного давления Δp (при $\varepsilon^p_{kk} = 0$), хотя такая задача относится к условно корректным задачам теории упругости. Из (1.9) вытекает, что и напряжения σ_{kl} всюду в v и внешние нагрузки p_k определяются аналогичным образом. Утверждение доказано.

2. Рассмотрим некоторые простые примеры. *1*. Предположим, что балка постоянного сечения, имеющего две оси симметрии, в результате приложения монотонно возрастающего до неизвестной величины M изгибающего момента и последующего его снятия имеет остаточную кривизну $\tilde{\varkappa}_* > 0$. Считая материал идеально упругопластическим, необходимо определить M и ξ – расстояние от нейтральной плоскости балки до зоны пластичности.

Из гипотезы плоских сечений: $\varepsilon = \varkappa z$, $|z| \leqslant h/2$ (h – высота сечения) и ввиду применимости деформационной теории пластичности будем иметь [6]:

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_T z/\xi & \text{при } |z| \leqslant \xi \\ \sigma_T \operatorname{sign} z & \text{при } \xi \leqslant |z| \leqslant h/2 \end{cases}$$

откуда, учитывая, что момент напряжения σ равен изгибающему моменту, получим выражение для последнего как функцию ξ:

$$M/\sigma_T = J_e(\xi)/\xi + J_p(\xi) \tag{2.1}$$

$$J_e(\xi) = 2\int_0^{\xi} b_0(z) z^2 dz, \quad J_p(\xi) = 2\int_{\xi}^{h/2} b_0(z) z dz$$

где $b_0 = b_0(z)$ – ширина сечения.

Кривизна $\varkappa$ перед разгрузкой определяется как [6] $\varkappa = \sigma_T/(E\xi)$, где E – модуль Юнга; чисто упругая кривизна $\varkappa^e$, соответствующая моменту M: $\varkappa^e = M/(EJ)$, $J = J_e(h/2)$, тогда $\tilde{\varkappa}_* = \varkappa - \varkappa^e$ и вследствие (2.1) получим $\tilde{\varkappa}_*$ как функцию ξ:

$$\tilde{\varkappa}_* E/\sigma_T = [1 - J_e(\xi)/J]\xi^{-1} - J_p(\xi)/J \tag{2.2}$$

Из (2.1), (2.2) найдем

$$\tilde{\varkappa}_*' E/\sigma_T = -[1 - J_e(\xi)/J]\xi^{-2} < 0$$

т. е. функция $\tilde{\varkappa}_* = \tilde{\varkappa}_*(\xi)$, определенная в (2.2), является монотонно убывающей, поэтому существует однозначная обратная функция $\xi = \xi(\tilde{\varkappa}_*)$ (другими словами, (2.2) как уравнение относительно ξ имеет единственное решение), зная которую, из (2.1) получим $M = M(\tilde{\varkappa}_*)$.

Например, если b_0 = const, то (2.2) примет вид

$$x^3 - (2y+3)x + 2 = 0, \quad x = 2\xi/h \ (0 < x < 1), \quad y = h\tilde{\varkappa}_* E/(2\sigma_T)$$

Видно, что в интервале (0, 1) существует единственный корень x этого уравнения, причем $(y + 3/2)^{-1} < x < (y + 1)^{-1}$.

2. Рассмотрим трубу с внутренним и внешним радиусами a и b, находящуюся в условиях плоской деформации, материал которой является изотропным несжимаемым как в упругой, так и в пластической областях и подчиняется условию текучести

Мизеса или Треска, что в данном случае (с точностью до констант в этих условиях [7]) – одно и то же. Предположим, что в результате приложения и снятия внешнего и внутреннего давлений известны остаточные перемещения при $r = a$ и $r = b$ (которые в силу несжимаемости и условия плоской деформации должны быть связаны между собой). Необходимо определить радиус r_T пластической зоны и силы, действовавшие на внешнем и внутреннем контурах до упругой разгрузки.

Введем безразмерные радиус $\rho = r/a$ и радиальное перемещение u, также отнесенное к a; обозначим $\rho_* = r_T/a \geqslant 1$, $\beta = b/a > 1$. Напряжения σ_ρ и σ_θ, упругий модуль сдвига G и неизвестные внешние силы q_0 и q также будем считать безразмерными, отнесенными к σ_T. Тогда при граничных условиях

$$\sigma_\rho = -q_0 \text{ при } \rho = 1; \quad \sigma_\rho = -q \quad \text{при } \rho = \beta \tag{2.3}$$

запишем известное решение для напряжений и перемещений в пластической ($1 \leqslant \rho \leqslant \rho_*$) и упругой ($\rho_* \leqslant \rho \leqslant \beta$) областях [7]:

$$\sigma_\rho = -q_0 + 2\gamma \ln\rho, \quad \sigma_\theta = -q_0 + 2\gamma(1+\ln\rho)(1 \leqslant \rho \leqslant \rho_*) \tag{2.4}$$

$$\sigma_\rho = -q + \gamma\rho_*(\beta^{-2} - \rho^{-2}), \quad \sigma_\theta = -q + \gamma\rho_*(\beta^{-2} + \rho^{-2}) \quad (\rho_* \leqslant \rho \leqslant \beta)$$

$$u = \gamma\rho_*^2 / (2G\rho) \quad (1 \leqslant \rho \leqslant \beta), \quad \gamma = \operatorname{sign}(q_0 - q)$$

Уравнение для нахождения радиуса ρ_* пластической зоны имеет вид [7]:

$$(|q_0 - q| - \ln\rho_*^2 - 1)\beta^2 + \rho_*^2 = 0 \tag{2.5}$$

Чисто упругое решение для перемещений в случае несжимаемого тела при тех же граничных условиях (2.3) есть $u^e = |q_0 - q|B\rho^{-1}$; отсюда для остаточного перемещения $\tilde{u}$ получим

$$\tilde{u} = u - u^e = \tilde{c}\rho^{-1}, \quad \tilde{c} = \gamma\rho_*^2 / (2G) - B|q_0 - q| \tag{2.6}$$

$$B = \gamma\beta^2 / [2G(\beta^2 - 1)]$$

причем константа $\tilde{c}$ известна по условию задачи.

Подставляя выражение для $|q_0 - q|$ из (2.5) в (2.6), найдем

$$B(\rho_*^2 - \ln\rho_*^2 - 1) = \tilde{c} \tag{2.7}$$

Выражение в скобках в (2.7) при $\rho_* \geqslant 1$, как легко видеть, является положительной и монотонно возрастающей функцией ρ_*, поэтому $\operatorname{sign} B = \operatorname{sign}(q_0 - q) = \operatorname{sign} \tilde{c}$, и (2.7) как уравнение относительно $\rho_* > 1$ имеет единственное решение. По известным ρ_* и $\operatorname{sign}(q_0 - q)$ из (2.5) однозначно находится разность $(q_0 - q)$, т. е. внешние нагрузки и соответствующие им согласно (2.4) напряжения определяются с точностью до произвольного постоянного гидростатического давления, что и отмечалось в п. 1.

3. Рассматриваемую ОЗ в предположении применимости деформационной теории пластичности аналогично [2] можно свести к решению векторного уравнения для $\mathbf{u} = \{u_k\}$ на S перед разгрузкой

$$\mathbf{u} = \mathbf{F}(\mathbf{u}) \quad \text{на} \quad S, \quad \mathbf{F}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}^e(\mathbf{u}) + \tilde{\mathbf{u}}_* \tag{3.1}$$

($\mathbf{u}^e = \{u_k^e\}$, $\tilde{\mathbf{u}}_* = \{\tilde{u}_{k*}\}$ – векторы упругих, соответствующих разгрузке, и заданных остаточных перемещений) поскольку, если будет найдено решение уравнения (3.1), т. е. вектор $\mathbf{u}$ на S, то поле напряжений σ_{kl} в v, а следовательно, и искомые нагрузки p_k на S, будут определяться однозначно. Действительно, для разности двух возможных решений с учетом равенств $\Delta u_k = 0$ на S, из (1.2), (1.11) получим

$$\int_v \Delta\varepsilon_{kl}\Delta\sigma_{kl}dv = \int_v (a_{klmn}\Delta\sigma_{kl}\Delta\sigma_{mn} + \Delta\varepsilon^p_{kl}\Delta\sigma_{kl})dv = 0$$

что вследствие (1.3) и (1.7) возможно только при $\Delta\sigma_{kl} = 0$ всюду в v.

Для решения уравнения (3.1) может быть применен итерационный процесс, аналогичный описанному в [1, 2, 8]:

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{u}^n) = \mathbf{u}^e(\mathbf{u}^n) + \tilde{\mathbf{u}}_* \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{3.2}$$

а в качестве нулевого приближения можно, например, положить $\mathbf{u}^0 = \tilde{\mathbf{u}}_*$. Покажем, что последовательность (3.2) сходится к искомому вектору $\mathbf{u}$ на S, а соответствующая последовательность векторов остаточных перемещений $\tilde{\mathbf{u}}^n$ – к $\tilde{\mathbf{u}}_*$ на S, в том же смысле, что и в [8], т. е. если исключить жесткое смещение тела, то $\tilde{\mathbf{u}}^n \to \tilde{\mathbf{u}}_*$ ($\varepsilon^p_{kk} \neq 0$) и $\tilde{\mathbf{u}}^n \to \tilde{\mathbf{u}}_{**}$ ($\varepsilon^p_{kk} = 0$), где $\tilde{\mathbf{u}}_{**}$ отличается от $\tilde{\mathbf{u}}_*$ на вектор, соответствующий постоянному гидростатическому давлению. Для этого по аналогии с [8] достаточно установить, что

$$\left\|\Delta\mathbf{u}^e\right\|_S \leqslant \left\|\Delta\mathbf{u}\right\|_S \tag{3.3}$$

где норма $\|\ldots\|_S$ определена в [1, 2, 8], т. е. вектору $\mathbf{u}$ на S (если исключить жесткие смещения) соответствует норма

$$\|\mathbf{u}\|_S = \left(\int_v \frac{1}{2} a_{klmn}\overline{\sigma}^e_{kl}\overline{\sigma}^e_{mn}dv\right)^{1/2} = \left(\int_v \frac{1}{2} b_{klmn}\overline{\varepsilon}^e_{kl}\overline{\varepsilon}^e_{mn}dv\right)^{1/2}$$

где $\overline{\sigma}^e_{kl}$, $\overline{\varepsilon}^e_{kl}$ – решение соответствующей упругой задачи, b_{klmn} – компоненты тензора, обратного к a_{klmn}.

Для разностей величин двух возможных состояний из (1.2), (1.8), (1.9), (1.11), (1.12) с учетом (1.3), (1.7) будем иметь

$$\int_S \Delta u_k \Delta p_k dS = \int_v \Delta\varepsilon_{kl}\Delta\sigma_{kl}dv = \int_v (a_{klmn}\Delta\sigma_{kl}\Delta\sigma_{mn} + \Delta\varepsilon^p_{kl}\Delta\sigma_{kl})dv =$$

$$= \int_v (a_{klmn}\Delta\sigma^e_{kl}\Delta\sigma^e_{mn} + a_{klmn}\Delta\rho_{kl}\Delta\rho_{mn} + \Delta\varepsilon^p_{kl}\Delta\sigma_{kl})dv \geqslant 2\left\|\Delta\mathbf{u}^e\right\|^2_S$$

С другой стороны [2]:

$$\int_S \Delta u_k \Delta p_k dS = \int_v \Delta\overline{\varepsilon}^e_{kl}\Delta\sigma^e_{kl}dv =$$

$$= \int_v a_{klmn}\Delta\sigma^e_{mn}(b_{klij}\Delta\overline{\varepsilon}^e_{ij})dv \leqslant 2\left\|\Delta\mathbf{u}^e\right\|_S\left\|\Delta\mathbf{u}\right\|_S$$

Из двух последних неравенств вытекает (3.3).

В заключение этого пункта несколько слов о корректности ОЗ. Условие (1.7), обеспечивающее наряду с (1.3) единственность решения, в общем случае является недостаточным для непрерывной зависимости решения от данных задачи, что видно уже на примере пластически несжимаемой среды, когда внешние нагрузки, соответствующие одному и тому же граничному условию (1.10), могут отличаться на величину произвольного (сколь угодно большого) гидростатического давления. В подобной задаче в [2, задача 2] для вязкоупругопластического тела для неупругих деформаций ε^N_{kl}, подчиняющихся теориям течения, использовались более сильные аналоги (1.7), например, такой:

$$\Delta\dot{\varepsilon}^N_{kl}\Delta\sigma_{kl} \geqslant \lambda_0 a_{klmn}\Delta\sigma_{kl}\Delta\sigma_{mn}, \quad \lambda_0 > 0 \tag{3.4}$$

что обеспечивало корректность ОЗ, т. е. существование единственного обобщенного решения, непрерывно зависящего от данных задачи. Но даже если неравенство (1.7) усилить, придав ему вид (3.4), в котором $\dot{\varepsilon}_{kl}^N$ следует заменить на ε_{kl}^p, этого, по-видимому, будет недостаточно для корректности ОЗ, рассмотренной в п. 1. Дело в том, что в отличие от [2] пластическая зона v_p в общем случае не совпадает со всей областью v, занятой телом ($v_p \subset v$), что не позволяет получить более сильную, чем (3.3), оценку вида

$$\left\|\Delta\mathbf{u}^e\right\|_S \leqslant \alpha\left\|\Delta\dot{\mathbf{u}}\right\|_S, \quad \alpha = \text{const}, \quad 0 < \alpha < 1 \tag{3.5}$$

которая делала бы оператор **F** из (3.1) сжимающим и гарантировала бы, как нетрудно видеть, корректность ОЗ в том же смысле, что и в [2].

Однако здесь возможна естественная регуляризация, имеющая простой физический смысл. Реальный процесс деформирования упругопластического тела не может происходить мгновенно, т. е. время t_0 действия внешних нагрузок конечно (хотя и очень мало), что в условиях высоких напряжений, сравнимых с пределом текучести σ_T, будет обуславливать появление вязких деформаций ε_{kl}^c (деформаций ползучести). Последние (если оставаться в рамках деформационной теории неупругого деформирования) могут быть найдены согласно уравнениям теории старения $\varepsilon_{kl}^c = f(t)\varkappa_{kl}(\sigma_{mn})$, $f(t) > 0$, $\dot{f}(t) > 0$ при выполнении условия устойчивости вида (3.4):

$$\Delta\varkappa_{kl}\Delta\sigma_{kl} \geqslant \lambda_1 a_{klmn}\Delta\sigma_{kl}\Delta\sigma_{mn}, \quad \lambda_1 > 0$$

что, как легко видеть, приведет к оценке (3.5), в которой $\alpha = [1 + \lambda_1 f(t_0)]^{-1}$ и которая будет гарантировать корректность рассмотренной ОЗ.

4. Сформулированная выше ОЗ может быть рассмотрена в рамках теории течения идеально упругопластического тела при некоторых предположениях о характере внешних воздействий до их снятия. При этом все основные уравнения п. 1 остаются в силе, но вместо (1.5) будем иметь

$$\dot{\varepsilon}_{kl}^p = \begin{cases} 0, & s < \sigma_T \text{ или } s = \sigma_T \text{ и } \dot{s} < 0 \\ \lambda\partial s / \partial\sigma_{kl}, & s = \sigma_T \text{ и } \dot{s} = 0 \end{cases}$$

где $\lambda > 0$ – неопределенный множитель, точка означает дифференцирование по параметру нагружения τ ($0 \leqslant \tau \leqslant 1$). При этом имеет место известное неравенство

$$\dot{\varepsilon}_{kl}^{p(1)}\Delta\sigma_{kl} \geqslant 0 \tag{4.1}$$

где знак равенства при $\dot{\varepsilon}_{kl}^{p(1)} \neq 0$ для пластически сжимаемой среды возможен только при $\Delta\sigma_{kl} = 0$, а для несжимаемой – при $\Delta\sigma_{kl} = \Delta p\delta_{kl}$; либо при $\dot{\varepsilon}_{kl}^{p(1)} = 0$. Отметим также, что случай $\dot{\varepsilon}_{kl}^{p(1)} \neq 0$, $\dot{\varepsilon}_{kl}^{p(2)} = 0$ и $\dot{\varepsilon}_{kl}^{p(1)}\Delta\sigma_{kl} = 0$ невозможен.

Можно выделить, по крайней мере, два типа внешних воздействий, при которых исследуемая ОЗ будет иметь единственное решение (если оно существует), а именно: в процессе активного деформирования изменяются пропорционально параметру τ внешние нагрузки p_k или перемещения u_k на S. В связи с этим сформулируем две задачи, аналогичные рассмотренным в [2].

Задача 1. Необходимо определить величины p_{k0} такие, чтобы при внешних нагрузках $p_k = \tau p_{k0}$ и их последующем мгновенном снятии выполнилось условие (1.10).

Задача 2. Необходимо определить величины u_{k0} такие, чтобы при перемещениях $u_k = \tau u_{k0}$ на S и последующем снятии внешних нагрузок, соответствующих значению $\tau = 1$, выполнилось условие (1.10).

Покажем, что при сделанных предположениях решение каждой из этих задач будет единственным.

Задача 1. Как и в п. 1, для разностей двух возможных решений получим равенство (1.13), которое можно представить в виде

$$2V(1)+U(1)+W(1)=0, \quad V(\tau)=\frac{1}{2}\int_v a_{klmn}\Delta\rho_{kl}\Delta\rho_{mn}dv \tag{4.2}$$

$$U(\tau)=\int_v\int_0^\tau \Delta\varepsilon^p_{kl}\Delta\dot{\sigma}_{kl}d\tau dv, \quad W(\tau)=\int_v\int_0^\tau \Delta\dot{\varepsilon}^p_{kl}\Delta\sigma_{kl}d\tau dv$$

По аналогии с [2, задача 3] можно показать, что при данных внешних нагрузках будет иметь место неравенство

$$V(\tau)+U(\tau)\geqslant 0 \quad (0\leqslant\tau\leqslant 1) \tag{4.3}$$

в котором знак равенства возможен только при $V(\tau) = W(\tau) = 0$. Тогда из (4.2), (4.3) найдем

$$V(1)+W(1)\leqslant 0 \tag{4.4}$$

отсюда $V(\tau) = W(\tau) = 0$, а следовательно, и $\dot{W}(\tau) = 0$ $(0 \leqslant \tau \leqslant 1)$. Дальнейшие рассуждения, аналогичные приведенным в конце п. 1 и использующие условие (4.1) вместо (1.7), дают вывод о единственности решения в том же смысле, что и в п. 1.

Задача 2. Поскольку $\dot{u}_k = u_{k0} = u^e_{k0} + \tilde{u}_{k*}$ на S, будем иметь

$$\int_S \Delta\dot{u}_k\Delta p_k dS = \int_S \Delta u^e_{k0}\Delta p_k dS$$

отсюда из (1.11) с учетом (1.2) найдем

$$[I^2(\Delta\sigma_{kl})]^{\cdot}+\dot{W}=\int_v a_{klmn}\Delta\sigma^e_{kl0}\Delta\sigma_{mn}dv\leqslant$$
$$\leqslant 2I(\Delta\sigma^e_{kl0})\dot{I}(\Delta\sigma_{kl}), \quad I^2(x_{kl})=\int_v\frac{1}{2}a_{klmn}x_{kl}x_{mn}dv \tag{4.5}$$

Из (4.1), (4.5) получим неравенство

$$\dot{I}(\Delta\sigma_{kl})\leqslant I(\Delta\sigma^e_{kl0})$$

интегрирование которого по τ вследствие равенства $\Delta\sigma_{kl}|_{\tau=0} = 0$ дает $I(\Delta\sigma_{kl}) \leqslant \tau I(\Delta\sigma^e_{kl0})$. Подставляя это неравенство в правую часть (4.5) и интегрируя по τ, будем иметь

$$I^2(\Delta\sigma_{kl})+W(\tau)\leqslant\tau^2 I^2(\Delta\sigma^e_{kl0})$$

откуда при $\tau = 1$ с учетом (1.9) и (1.12), как и в задаче 1, получим условие (4.4), обеспечивающее единственность (в смысле п. 1) поля σ^e_{kl}, а следовательно, u^e_k (если исключить жесткие смещения тела) и $u_{k0} = u^e_{k0} + \tilde{u}_{k*}$ на S.

Утверждение доказано. Заметим, что в обеих задачах пластические зоны при любом τ $(0 < \tau \leqslant 1)$ определяются однозначно, что следует из равенства $\dot{W}(\tau) = \int_v \Delta\dot{\varepsilon}^p_{kl}\Delta\sigma_{kl}dv = 0$, аналогичного использовавшемуся в п. 1 при доказательстве этого факта.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96-01-01645).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Цвелодуб И.Ю.* Постулат устойчивости и его приложения в теории ползучести металлических материалов. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1991. 201 с.
2. *Цвелодуб И.Ю.* Обратные задач неупругого деформирования // Изв. АН. МТТ. 1995. № 2. С. 81–92.
3. *Цвелодуб И.Ю.* Обратные задачи формоизменения неупругих пластин // Изв. АН. МТТ. 1996. № 1. С. 96–106.
4. *Кузьменко В.И.* К обратным контактным задачам теории пластичности // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 3. С. 475–482.
5. *Шваб А.А.* Некорректные статические задачи теории упругости // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 6. С. 98–106.
6. *Качанов Л.М.* Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
7. *Ивлев Д.Д., Ершов Л.В.* Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978. 208 с.
8. *Сухоруков И.В., Цвелодуб И.Ю.* Итерационный метод решения релаксационных обратных задач // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 3. С. 93–101.

Новосибирск

Поступила в редакцию
15.VIII.1996