

УДК 539.374

© 1998 г. Ю.Г. БАСАЛОВ, В.Н. КУЗНЕЦОВ

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ МАЛЫХ ВЯЗКОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

Предложены определяющие соотношения для описания вязкоупругопластических процессов при малых деформациях, основанные на концепции "перманентной" памяти. Продемонстрировано хорошее совпадение с данными экспериментов.

Большинство исследований, посвященных нелинейной вязкоупругости (или вязкоупругопластичности), обзоры которых имеются, например, в работах [2, 4, 7–10] используют "гипотезу затухающей памяти", аналогично тому, как это принято в теории линейной вязкоупругости, основанной на операторе Вольтерры, который можно записать в виде

$$w(t) = u(t) + \int_0^t K(t, \tau) u(\tau) d\tau \quad (1)$$

Здесь функция $u = u(t)$ – "воздействие" на образец, $w = w(t)$ – "отклик", $K(t, \tau)$ – ядро оператора (функция влияния), t – время. Если при фиксированном τ

$$\lim_{t \rightarrow \infty} K(t, \tau) = 0 \quad (2)$$

то говорят, что выполнено условие затухающей памяти, требуя дополнительно, чтобы ядро с возрастанием t стремилось к нулю монотонно.

Гораздо менее разработан другой подход, основанный на гипотезе "перманентной" памяти, суть которого состоит в том, что вместо интегральных операторов вида (1) с ядром, затухающим в смысле (2) используются интегральные операторы, не содержащие ядра (т.е., явной функции времени), и удовлетворяющие общему условию затухающей памяти [2, 6].

По-видимому, впервые подобная идея была высказана в работе [1]; автор [12] предложил, со ссылкой на идею [11], в качестве оператора с перманентной памятью использовать для одномерного случая и при условии, что деформация $\varepsilon(t)$ не убывает, отношение текущей деформации $\varepsilon(t)$ к ее обобщенной норме Лебега $\|\varepsilon(t)\|_p$ порядка p :

$$\sigma(t) = A_0 \left(\frac{|\varepsilon(t)|}{\|\varepsilon(t)\|_p} \right)^n \varepsilon(t) \quad (3)$$

$$\|f(t)\|_p = \left[\int_0^t |f(\tau)|^p d\tau \right]^{1/p}, \quad p > 1 \quad (4)$$

(норма (4) является обобщенной, так как верхний предел интегрирования переменный).

Если $\varepsilon(t)$ убывает (аналог разгрузки), то зависимость (3) дополняется следующим образом

$$\sigma(t) = A_0 (|\varepsilon(t)|/|\varepsilon(t)|_p)^n \varepsilon(t) + A_1 [1 - |\varepsilon(t)|/\varepsilon_{\max}]^k \int_0^t (t - \tau)^m \varepsilon(\tau) d\tau$$

$$\varepsilon_{\max} = |\varepsilon(t)|_{\max}, \quad A_1, m, k = \text{const} \quad (5)$$

Отметим, что при неубывающей по модулю деформации $\varepsilon(t)$ текущее значение ее по модулю совпадает с ее максимумом модуля ε_{\max} , и поэтому квадратная скобка в (5) обращается в нуль; при убывании $\varepsilon(t)$ имеем $|\varepsilon(t)| < \varepsilon_{\max}$ скобка становится отличной от нуля и, тем самым, включает второй член в (5), равный произведению скобки-выключателя на обычный линейный функционал типа Вольтерры со степенным ядром $(t - \tau)^m, m < 0$.

Приведенное в работе [12] сравнение результатов экспериментов и расчетов по формуле (5), показало хорошее совпадение, за исключением начальных стадий процесса. Можно показать, что в этом последнем случае, согласно модели (5), при деформировании с любой постоянной скоростью кривая деформирования $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ имеет бесконечный модуль упругости $d\sigma/d\varepsilon|_{\varepsilon=0}$, что противоречит физическому смыслу и делает невозможным описание малых колебаний и других подобных процессов. Кроме того, кривые релаксации напряжений, соответствующие ступенчатой деформации вида

$$\varepsilon = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0 \\ \varepsilon_0 = \text{const} & \text{при } t \geq 0 \end{cases}$$

уходят в бесконечность при $t = 0$.

В публикуемой работе построены определяющие соотношения, обобщающие (5), которые позволяют физически корректно описать деформирование реальных материалов: Предлагаемые соотношения имеют следующий вид:

$$\sigma = F(\gamma) + A_1 [1 - |\varepsilon|/\varepsilon_{\max}]^k \int_0^t (t - \tau)^m \varepsilon(\tau) d\tau \quad (6)$$

Здесь A_1, m, k – константы материала; F – экспериментальная функция, которая находится из опыта на деформирование с постоянной скоростью; оператор γ определен на функциях, непрерывных на отрезке $[0, t]$ и имеющих ограниченную производную, следующим образом

$$\gamma = [|\varepsilon|/|\varepsilon|_p]^\mu |\varepsilon|^{\alpha-1} \varepsilon$$

где p, μ, α – константы материала. Заметим, что (5) получается из (6) при $F(\gamma) = A_0 \gamma, \mu = n, \alpha = 1$.

Рассмотрим поведение соотношений (6) на основных характерных процессах.

Деформирование с постоянной скоростью: $\varepsilon = at, a = \text{const}$. В этом случае γ определяется выражением $\gamma = (p + 1)^{\mu/p} a^\alpha t^{\alpha - \mu/p}$. Будем считать, что введенная выше функция $F(\gamma)$ может быть разложена в ряд при $\gamma = 0$. Учитывая, что $F(0) = 0$, имеем:

$$F(\gamma) = \left. \frac{dF}{d\gamma} \right|_{\gamma=0} \gamma + \left. \frac{1}{2} \frac{d^2 F}{d\gamma^2} \right|_{\gamma=0} \gamma^2 + \dots$$

Рассмотрим два характерных случая:

1. Если $dF/d\gamma|_{\gamma=0} = H \neq 0$ при малых γ имеем

$$F(\gamma) \approx H\gamma = (p+1)^{\mu/p} H a^\alpha t^{\alpha-\mu/p}$$

2. Если $dF/d\gamma|_{\gamma=0} = 0$, $d^2F/d\gamma^2|_{\gamma=0} = G \neq 0$, имеем

$$F(\gamma) \approx \frac{1}{2} G \gamma^2 = \frac{1}{2} G (p+1)^{2\mu/p} a^{2\alpha} t^{2(\alpha-\mu/p)}$$

Требование того, что при малых $\varepsilon = at$ из (6) должен следовать закон Гука, дает условия:

в случае (1): $\alpha - \mu/p = 1$, откуда $\alpha = (\mu + p)/p$;

в случае (2): $2(\alpha - \mu/p) = 1$, откуда $\alpha = \frac{1}{2}(p + 2\mu) / p$.

В первом случае приемлемой может оказаться аппроксимация $F = A'\gamma / (1 + C'\gamma)$,

$$A', C' = \text{const}; \text{ во втором } - F = \frac{A\gamma^2}{1 + C\gamma}, \quad A, C = \text{const}.$$

В этом случае определяющие соотношения (6) с условием $\varepsilon(t) = \varepsilon_{\max}$ запишутся в виде

$$\sigma = \frac{A\gamma^2}{1 + C\gamma}; \quad \dot{\gamma} = Q\sqrt{t}, \quad Q = (p+1)^{\mu/p} a^\alpha, \quad \alpha = \frac{2\mu + p}{2p}$$

При растяжении с постоянной скоростью имеем

$$\sigma = \frac{AQ\sqrt{t}}{1 + CQ\sqrt{t}} \sqrt{t} = \frac{AQ t}{1 + CQ\sqrt{t}}$$

Зависимость "напряжение - деформация" при этом имеет вид

$$\sigma = \frac{AQ\varepsilon / a}{1 + CQ\sqrt{\varepsilon/a}}$$

При достаточно малых ε знаменатель близок к 1 и $\sigma \cong E(a)\varepsilon$, $E(a) = A(p+1)^{\mu/p} a^{\mu/p-1/2}$, т.е. получаем закон Гука с модулем упругости, зависящим от скорости деформации a .

Релаксация. В этом случае реальный процесс состоит из деформирования (например, с постоянной скоростью $\dot{\varepsilon} = a$), до деформации $\varepsilon = at_0$, которая затем поддерживается постоянной, то есть

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} at & \text{при } t < t_0 \\ at_0 = \text{const} & \text{при } t \geq t_0 \end{cases}$$

Процесс по напряжениям в этом случае при $t > t_0$ имеет вид

$$\sigma = \frac{A\varepsilon_0^\alpha}{(\bar{t}^{\mu/p} - C\varepsilon_0^\alpha)\bar{t}^{\mu/p}}, \quad \bar{t} = t - t_0 \frac{p}{p+1} \quad (7)$$

При достаточно большом времени t соотношение (7) упрощается $\sigma = A\varepsilon_0^\alpha / t^{2\mu/p}$. Из последнего выражения видно, что кривая релаксации имеет нулевую асимптоту.

Полезным свойством предлагаемой модели является то, что при неубывающей по модулю деформации определяющие соотношения (6) и, вообще говоря, любые соотношения, которые могут быть записаны в виде

$$\Phi(\sigma) = \varepsilon^\beta / \left(\int_0^t |\varepsilon|^p dt \right)^q, \quad \Phi(x) = F^{-1}(x) \text{ при } \varepsilon(t) \geq 0 \quad (8)$$

(где $\Phi = \Phi(\sigma)$ – неубывающая функция от $\sigma(t)$), допускают точное обращение. Подчеркнем, что в этом смысле $\Phi = \Phi(\sigma)$ считается известной функцией времени, а $\varepsilon = \varepsilon(t)$ подлежит определению. Действительно, дифференцируя (8), получаем

$$\varepsilon^p = \frac{d}{dt} \left(\frac{\varepsilon^{\beta\omega}}{\Phi^\omega} \right), \quad \omega = \frac{1}{q} \quad (9)$$

Так как

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\varepsilon^{\beta\omega}}{\Phi^\omega} \right) = \varepsilon^{\beta\omega} \Phi^{-\omega} \left(\frac{\beta\dot{\varepsilon}}{q\varepsilon} - \frac{\dot{\Phi}}{q\Phi} \right) \quad (10)$$

то, подставляя (10) в (9), получаем дифференциальное уравнение относительно $\varepsilon(t)$:

$$\dot{\varepsilon} + f(t)\varepsilon^\psi + g(t)\dot{\varepsilon} = 0 \quad (11)$$

$$\psi = p - \frac{\beta}{q} + 1, \quad f(t) \equiv -\frac{\beta}{q} \Phi^\omega, \quad g(t) \equiv -\frac{\dot{\Phi}}{\beta\Phi}$$

Уравнение (11) известно [5] и его решение имеет вид

$$\varepsilon^{1-\psi} = \frac{1-\psi}{\beta\omega} H(t) \int \frac{\Phi^\omega}{H(t)} dt, \quad H(t) = \exp[(\psi-1) \int g(t) dt]$$

Входящая в решение функция $H(t)$ может быть вычислена в общем виде. Так как

$$H(t) = \exp[(\psi-1) \int g(t) dt] = \exp \left[\int \frac{1-\psi}{\beta} \frac{\dot{\Phi}}{\Phi} dt \right]$$

то имеем (C_1 – константа интегрирования):

$$H(t) = \exp \left[\int \frac{1-\psi}{\beta} \frac{dF}{F} \right] = \exp \left[\frac{1-\psi}{\beta} \ln(C_1 F) \right] = C_1 \Phi^{(1-\psi)/\beta}$$

Окончательно выражение деформации $\varepsilon(t)$ через напряжения $\sigma(t)$ получаем в виде:

$$\varepsilon(t) = B \Phi^\eta \left(\int_0^t \Phi^\chi dt \right)^\lambda \quad (12)$$

$$B = \left(\frac{\beta - pq}{\beta} \right)^\lambda, \quad \eta = \frac{1}{\beta}, \quad \chi = \frac{p}{\beta}, \quad \lambda = \frac{q}{\beta - pq}$$

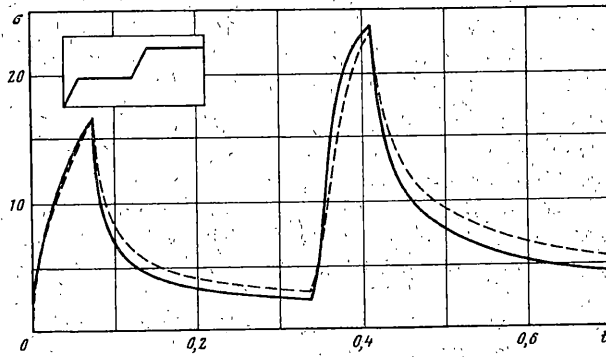
Аналогичный результат имеем и при $\varepsilon(t) \leq 0$.

С помощью соотношения (12) можно непосредственно получить *кривые ползучести* для модели (6), подставив в (12) процесс вида

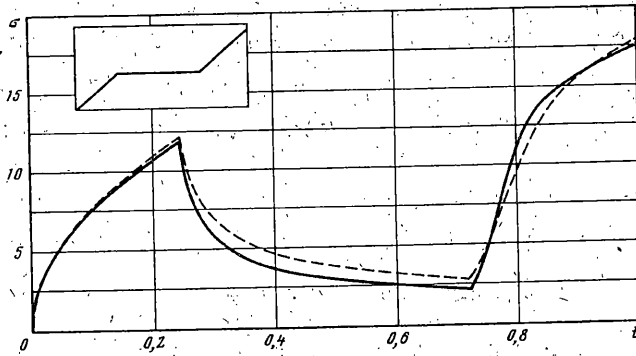
$$\sigma(t) = \begin{cases} bt & \text{при } t < t_0 \\ bt_0 = \sigma_0 = \text{const} & \text{при } t \geq t_0 \end{cases} \quad (13)$$

При достаточно больших по сравнению с t_0 значениях t зависимость $\varepsilon(t)$ близка к степенной $\varepsilon = B \Phi^{\eta + \chi \lambda t^\lambda}$ (здесь $\Phi_0 = \Phi(\sigma_0) = \text{const}$). Этот же результат получается, если в (13) принять $t_0 = 0$, т.е. просто положить $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$ в (13).

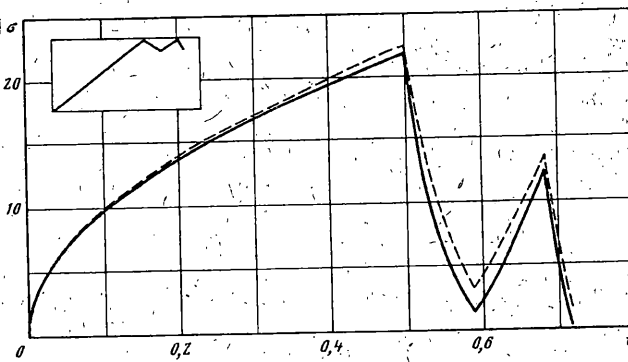
Определяющие соотношения (5) были разработаны для описания деформирования твердого топлива и асфальтобетона. В [18] описаны опыты на сжатие цилиндрических образцов асфальто-песчаного конгломерата (асфальтобетона) при 88% песка



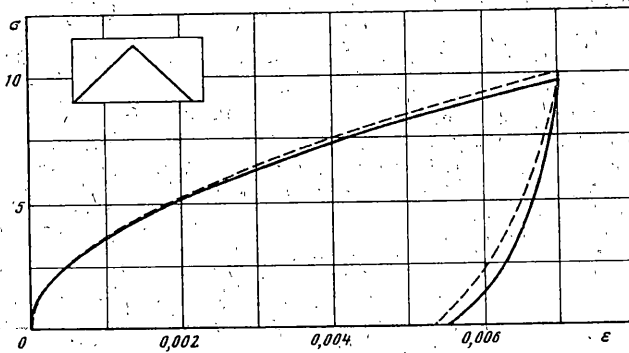
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

по весу. Данная в публикуемой работе обобщенная модель (6) была использована для описания системы опытов [12]. При этом были определены следующие значения для констант модели (6): $A = 78000$, $C = 320$, $A_1 = -A/C$, $p = 13$, $q = 0,5$.

На фиг. 1–4 приведено сравнение кривых, взятых из опытов [12] (сплошная линия) с рассчитанными по соотношениям (6) (пунктир). В опытах на сжатие [12] задавалась программа по деформациям, показанная в левом верхнем углу рисунков. Видно, что совокупность опытов, приведенных в статье [12], включающая в себя как простые опыты на релаксацию и деформирование с постоянной скоростью, так и опыты со ступенчатым процессом деформирования, включающим разгрузку, описывается с хорошей точностью.

Отметим, что частный случай модели (6) был предложен авторами для описания механических свойств остывающего металла¹.

Тензорные определяющие соотношения для рассматриваемой среды удобно записать в виде, аналогичном уравнениям теории малых упругопластических деформаций [3], введя, наряду с тензорами напряжений σ_{ij} и малых деформаций ϵ_{ij} , соответствующие девиаторы s_{ij} и e_{ij} и "интенсивности" $\sigma_u = (\frac{2}{3}s_{ij}s_{ij})^{1/2}$, $\epsilon_u = (\frac{2}{3}e_{ij}e_{ij})^{1/2}$, обозначив, кроме того, $\gamma_u = \gamma(e_u) = [e_u / \|e_u\|_p]^p e_u^\alpha$. Тогда определяющие соотношения запишутся

$$\begin{cases} s_{ij} = \frac{2\sigma_u}{3e_u} e_{ij}, & \sigma_u = F(\gamma_u) \\ \theta = 0, & \theta = \epsilon_{ij}\delta_{ij} \end{cases}$$

Авторы благодарны С.А. Шестерикову за творческое обсуждение и внимание к работе и В.М. Морозову за полезные замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 97-01-00991).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Беляев Н.М.* Применение теории пластических деформаций к расчетам на ползучесть деталей при высоких температурах // Изв. АН СССР. ОТН. 1943. № 7. С. 22–33.
2. *Дэй У.А.* Термодинамика простых сред с памятью. М.: Мир, 1974. 192 с.
3. *Ильюшин А.А.* Пластичность. М.: Гостехиздат, 1948. 376 с.
4. *Ильюшин А.А.; Победря Б.Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
5. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматгиз, 1961. 704 с.
6. *Клюшников В.Д.* Физико-математические основы прочности и пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1994. 190 с.
7. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
8. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 384 с.
9. Расчеты на прочность в машиностроении / Под ред. С.Д. Пономарева. Т. 1, 2. М.: МАШГИЗ, 1958. 974 с.
10. *Розовский М.И.* Механика упругонаследственных сред // Итоги науки. Упругость и пластичность. М.: ВИНТИ, 1967. С. 165–250.
11. *Coleman B.D., Noll W.* An approximation theorem for functionals with applications in continuum mechanics // Arch. Rat. Mech. Anal. 1960. V. 6. № 5. P. 355–364.
12. *Fitzgerald J.E., Vakili J.* Nonlinear characterization of sand-asphalt concrete by means of permanent-memory norms // Exper. Mech. 1973. V. 13. № 12. P. 504–510.

Москва

Поступила в редакцию
8.X.1997

¹ *Басалов Ю.Г., Кузнецов В.Н., Миркин Л.И.* К определению механических свойств и напряжений в поверхностном слое, возникающем при импульсном облучении // Тез. докл. XIV Междунар. конф. "Физика прочности и пластичности материалов". Самара: СГТУ, 1995. С. 35–36.