МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1998

УДК 539.374

© 1998 г. Д.Л. БЫКОВ

ОБ УЧЕТЕ ПОВРЕЖДЕНИЙ В НАПОЛНЕННЫХ ПОЛИМЕРНЫХ МАТЕРИАЛАХ

Излагается теория накопления повреждений в высоконаполненных полимерных материалах. В качестве критерия эквивалентности повреждений предлагается использовать величину удельной рассеянной энергии нелинейно вязкоупругих материалов. Указываются эксперименты для определения материальных функций, входящих в уравнения состояния.

Приводится вариант эндохронно нелинейной теории вязкоупругости, в которой приведенное время зависит от параметра поврежденности, эквивалентных деформаций или напряжений, а также функций, позволяющих различать процессы активного нагружения и разгрузки. В качестве эквивалентных деформаций или напряжений применяются некоторые комбинации первых и вторых инвариантов соответствующих тензоров. Учет трещиновидных дефектов в конструкциях производится с помощью специальных эквивалентных напряжений, зависящих от главных растягивающих напряжений и характеристик материала.

Этот вариант теории позволил качественно правильно описать результаты экспериментов, проводившихся с наполненными полимерными материалами при ползучести, растяжении с постоянными скоростями нагружения и при ползучести до разрушения с меняющейся последовательностью приложения нагрузок разных амплитуд.

1. Введение. Прогнозирование остаточной прочности конструкций при длительной эксплуатации связано с учетом накопления повреждений в их материалах из-за действия нагрузок. Одним из путей, ведущих к обоснованному прогнозу, является экспериментальное определение стандартных механических характеристик, используемых в расчетах прочности, на образцах, имеющих уровень повреждений, соответствующий натурным условиям эксплуатации конструкции. Проблема сводится к предварительной имитации процесса накопления повреждений в ходе ускоренных форсированных испытаний образцов в лабораторных условиях.

В основе имитации лежит предположение о существовании критерия эквивалентности, позволяющего сравнивать разные уровни поврежденности материала. Два состояния материала считаются эквивалентными по принятому критерию накопления повреждений, если в них реализовано одно и то же значение критериальной величины после двух разных процессов нагружения исходного материала.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением высоконаполненных мелкодисперсных полимерных материалов при однородных стационарных температурных полях.

2. Критерий эквивалентности повреждений в форме удельной рассеянной энергии. Считая процессы повреждения вязкоупругих материалов необратимыми и не рассматривая явления массо- и теплообмена, примем в качестве критерия эквивалентности повреждений величину удельной рассеянной энергии. Запись этой величины определяется уравнениями состояния. Последние должны учитывать процессы накопления повреждений и, следовательно, содержать параметры поврежденности.

При выборе уравнений состояния допустим выполнимость одного из двух условий: либо кривые релаксации, определенные при разных деформациях, могут быть получены одни из других путем соответствующего изменения масштаба оси времени, либо аналогичными свойствами обладают кривые ползучести, определенные при разных уровнях напряжений.

Указанные свойства материалов можно описать эндохронно нелинейной теорией вязкоупругости с приведенными временами, функционально зависящими в первом случае от деформаций, а во втором – от напряжений. Согласно этой теории представим зависимость между напряжениями и деформациями в виде

$$\sigma_{ij}(t) = \int_0^t R_1(t_1^* - \tau_1^*)d\text{э}_{ij}(\tau) + \delta_{ij}\int_0^t R_2(t_2^* - \tau_2^*)d\theta(\tau), \quad (i,j = 1,2,3) \tag{2.1}$$

$$\text{э}_{ij} = \varepsilon_{ij} - \tfrac{1}{3}\theta\delta_{ij}, \quad \theta = \varepsilon_{ij}\delta_{ij}$$

где $R_1(t)$, $R_2(t)$ – ядра сдвиговой и объемной релаксации; σ_{ij}, ε_{ij} – компоненты тензоров напряжений и деформаций; δ_{ij} – символ Кронекера; t и τ – актуальное и текущее время; t_k^*, τ_k^* – приведенные времена, по повторяющимся индексам i, j здесь и в дальнейшем ведется суммирование от 1 до 3.

Если ядра $R_1(t)$ и $R_2(t)$ представимы суммами экспоненциальных функций, то мощность W_* удельной рассеянной энергии A_* можно записать в виде

$$W_*(t) = \frac{dA_*(t)}{dt} = -\frac{dt_1^*}{dt}\int_0^t\int_0^t R_1'(2t_1^* - \tau_1^*(\tau_1) - \tau_1^*(\tau_2))d\text{э}_{ij}(\tau_1)d\text{э}_{ij}(\tau_2) - \tag{2.2}$$

$$-\frac{dt_2^*}{dt}\int_0^t\int_0^t R_2'(2t_2^* - \tau_2^*(\tau_1) - \tau_2^*(\tau_2))d\theta(\tau_1)d\theta(\tau_2)$$

$$R_k'(t) \equiv \frac{dR_k(t)}{dt}, \quad t_k^* \equiv \int_0^t \frac{dx}{g_k(x)}, \quad \tau_k^* \equiv \int_0^\tau \frac{dx}{g_k(x)} \quad (k = 1,2)$$

$$g_k(x) = \{f_k(x) \text{ или } \varphi_k(x)\}, \quad f_k \equiv f_k(e_k, \eta_k, A_*), \quad \varphi_k \equiv \varphi_k(\sigma_k, \xi_k, A_*)$$

где e_k, σ_k – эквивалентные сдвиговые (k = 1) и объемные (k = 2) деформации и напряжения соответственно, η_k, ξ_k – параметры, позволяющие различать процессы нагружения и разгрузки.

В этих формулах используются функции f_k или φ_k в зависимости от упомянутых свойств кривых релаксации или ползучести. При $g_k(t) \equiv 1$ из (2.2) следует известное представление $W_*(t)$ в линейной теории вязкоупругости [1], а из (2.1) – аналогичное представление для уравнений состояния. Для упрощения экспериментального определения f_k и φ_k допустим, что их можно представить в виде

$$f_k(x) = f_{1k}(e_k(x))f_{2k}(\eta_k(x))f_{3k}(A_*(x)), \quad \varphi_k(x) = \varphi_{1k}(\sigma_k(x))\varphi_{2k}(\xi_k(x))\varphi_{3k}(A_*(x)) \tag{2.3}$$

Опыты показывают, что при малых деформациях и напряжениях и активных процессах нагружения операторы (2.1) являются линейными, т.е. $t_k^* \equiv t$, $\tau_k^* \equiv \tau$. Поэтому f_{ik} и φ_{ik} можно принять равными единице при определенных условиях нагружения и областях изменения соответствующих аргументов.

В качестве параметров η_k и ξ_k примем следующие выражения:

$$\eta_1(t) = \frac{e_1(t)}{\max e_1(s_1)}, \quad \xi_1(t) = \frac{\sigma_1(t)}{\max \sigma_1(s_2)}$$

$$\eta_2(t) = \frac{E + e_2(t)}{E + \max e_2(s_3)}, \quad \xi_2(t) = \frac{\Sigma + \sigma_2(t)}{\Sigma + \max \sigma_2(s_4)} \tag{2.4}$$

$$t \geqslant s_p \geqslant t - h_p, \quad p = 1 \div 4,$$

где h_p – интервалы "памяти" о максимальных сдвиговых и объемных эквивалентных деформациях и напряжениях; E, Σ – положительные константы, определяемые из опытов.

Параметры h_p позволяют учитывать частичную "залечиваемость" материала. Они могут зависеть от деформаций и напряжений, уменьшаясь при сжимающих объемных деформациях и напряжениях. При $t \geqslant s_p \geqslant 0$ "залечиваемости" не происходит, а при $s_p = t$ "память" о ранее достигнутых максимальных эквивалентных деформациях и напряжениях исчезает полностью.

Константы E и Σ введены для положительности параметров η_2 и ξ_2 и в тех случаях, когда $e_2(t)$ и $\sigma_2(t)$ станут отрицательными.

Полагая f_{2k} и φ_{2k} равными единице при активных процессах нагружения, когда $\eta_k(t) \equiv 1$, $\xi_k(t) \equiv 1$, представим их в виде

$$f_{2k} = \gamma_k + (1-\gamma_k)\eta_k^{m_k}, \quad \varphi_{2k} = \beta_k + (1-\beta_k)\xi_k^{p_k} \tag{2.5}$$

где положительные константы γ_k, β_k, m_k, p_k определяются из экспериментов. При $0 < \gamma_k < 1$, $0 < \beta_k < 1$ и фиксированных значениях f_{1k}, f_{3k}, φ_{1k}, φ_{3k} функции f_{2k} и φ_{2k} увеличивают аргументы $t_k^* - \tau_k^*(\tau)$, что уменьшает ядра релаксации. Следовательно, при разгрузке жесткость материала уменьшается тем больше, чем больше были максимальные значения e_k и σ_k до начала разгрузки.

Таким образом, в уравнениях (1.1) поврежденность учитывается не только параметром A_*, но и параметрами η_k и ξ_k. Однако, если A_* учитывает необратимые процессы накопления повреждений, то η_k и ξ_k проявляются лишь при разгрузках и допускают частичную "залечиваемость" материала.

3. Определение материальных функций. Функции f_{ik}, φ_{ik} предполагаются универсальными, поэтому находить их можно из любых опытов. Укажем способы определения f_{ik}, а φ_{ik} будут находиться аналогично.

Для упрощения задачи рассмотрим одномерный случай, когда единственными компонентами напряжений и деформаций будут $\sigma(t)$ и $\varepsilon(t)$. Тогда из (2.1)–(2.5) получим

$$\sigma(t) = \int_0^t R(t^* - \tau^*)d\varepsilon(\tau), \quad t^* = \int_0^t \frac{dx}{f(x)}, \quad \tau^* = \int_0^\tau \frac{dx}{f(x)}$$

$$\frac{dt^*}{dt} = \frac{1}{f(t)} = \frac{1}{f_1(\varepsilon(t))f_2(\eta(t))f_3(A_*(t))} \tag{3.1}$$

$$\frac{dA_*}{dt} = -\frac{dt^*}{dt}\int_0^t\int_0^t R'(2t^* - \tau^*(\tau_1) - \tau^*(\tau_2))d\varepsilon(\tau_1)d\varepsilon(\tau_2)$$

$$f_2(\eta) = \gamma + (1-\gamma)\eta^m, \quad \eta(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\max \varepsilon(s)}, \quad t \geqslant s \geqslant t - h$$

где h – примем постоянной величиной.

Неизвестными являются материальные функции $R(t), f_1(\varepsilon), f_2(\eta), f_3(A_*)$ и константа h. Предположим, что при малых деформациях и малой поврежденности, когда $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_s$, $0 \leqslant A_* \leqslant A_s$, выполняются равенства $f_1(\varepsilon) \equiv 1, f_3(A_*) \equiv 1$. При этих условиях искомые функции можно найти, осуществляя указываемые ниже эксперименты.

Пусть $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 h(t)$, где ε_0 – положительная константа, $h(t)$ – функция Хевисайда. Тогда из (2.1) при $t > 0$ получим

$$R(t^*) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0}, \quad A_*(t) = \frac{\varepsilon_0^2}{2}[R(0) - R(2t^*)] \tag{3.2}$$

$$\frac{dt^*}{dt} = \frac{1}{f_1(\varepsilon_0)f_3(A_*(t))}, \quad \eta(t) \equiv 1, \quad f_2(\eta(t)) \equiv 1$$

При малых значениях ε_0 и t выполняется условие $t^* = t$, поэтому, замеряя соответствующее напряжение $\sigma^0(t)$, из (3.2) найдем

$$R(t)=\frac{\sigma^0(t)}{\varepsilon_0}, \quad A_*(t)=\frac{\varepsilon_0^2}{2}[R(0)-R(2t)] \tag{3.3}$$

Отсюда определяется ядро релаксации $R(t)$. Используя монотонность этой функции, можно найти ей обратную функцию, такую что $R^{-1}[R(t)]\equiv t$. Например, если $R(t) = C\exp(-Ct/\mu)$, то $R^{-1}(x) = (\mu/C)\ln(C/x)$.

Меняя ε_0 и t, опытным путем убеждаемся в неизменности ядра $R(t)$ в некоторой области: $0 \leqslant \varepsilon_0 \leqslant \varepsilon_s$, $0 \leqslant t \leqslant t_s$. Из физических соображений можно ожидать, что большим значениям ε_s соответствуют малые значения t_s и наоборот. Зная ε_s и t_s, можно найти оценку величины A_s с помощью (3.3):

$$A_s=\frac{\varepsilon_s^2}{2}[R(0)-R(2t_s)] \tag{3.4}$$

Таким образом находятся границы линейности оператора, связывающего $\sigma(t)$ и $\varepsilon(t)$, в пространстве $\{0\leqslant\varepsilon_0\leqslant\varepsilon_s,\ 0\leqslant A_*\leqslant A_s\}$.

Согласно (3.3), уменьшая ε_0, можно увеличить t, не нарушая условия $A_* < A_s$. Это позволяет находить ядро $R(t)$ в нужном интервале времени.

Принимая $\varepsilon(t) = \varepsilon_1 h(t)$ при $\varepsilon_1 > \varepsilon_s$ и замеряя соответствующее напряжение $\sigma_1(t)$, из (3.2) получим

$$t_1^*=R^{-1}[\sigma_1(t)/\varepsilon_1] \tag{3.5}$$

Здесь t_1^* – приведенное время в указанном режиме релаксации. Предполагая, что увеличение поврежденности и положительных деформаций ведет к снижению жесткостных характеристик материала, заключаем, что $0<f_1(\varepsilon)\leqslant 1,\ 0<f_3(A_*)\leqslant 1$. Поэтому $t^*\geqslant t$. Однако при отрицательных эквивалентных деформациях функция $f_1(\varepsilon)$ может превышать единицу и тогда соотношение между t^* и t будет более сложным.

При $\varepsilon_1 > \varepsilon_s$ и малых временах t, когда $A_* < A_s$, получим

$$f_1(\varepsilon_1)=t/t_1^* \tag{3.6}$$

Кривые зависимости $t^* = t^*(t)$, определенные для разных значений деформаций, имеют начальные участки в виде отрезков прямых, длина которых уменьшается при росте деформаций. Для определения $f_1(\varepsilon)$ достаточно замерить при малых временах тангенсы углов наклона dt/dt^*.

Увеличивая при $\varepsilon_1 > \varepsilon_s$ время испытаний t до значений, при которых $A_*(t) > A_s$, определим функцию $f_3(A_*)$, исключая t из двух уравнений, следующих из (3.2) и (3.5):

$$f_3(A_*(t))=\frac{1}{f_1(\varepsilon_1)}\frac{dt}{dt_1^*}, \quad A_*(t)=\frac{\varepsilon_1^2}{2}[R(0)-R(2t_1^*)] \tag{3.7}$$

Чтобы определить функцию $f_2(\eta)$, воспользуемся результатами эксперимента, в котором

$$\varepsilon(t)=\varepsilon_0[h(t)-h(t-t_1)]+\varepsilon_1^0[h(t-t_1)-h(t-t_2)] \tag{3.8}$$

$$\varepsilon_s>\varepsilon_0>\varepsilon_1^0>0, \quad t_s>t_2>t_1>0$$

Тогда напряжение примет вид

$$\sigma(t)=\varepsilon_0[R(t^*)h(t)-R(t^*-t_1^*)h(t-t_1)]+\varepsilon_1^0[R(t^*-t_1^*)h(t-t_1)-R(t^*-t_2^*)h(t-t_2)] \tag{3.9}$$

Будем варьировать величину t_2. Полагая вначале $t = t_2 < t_1 + h < t_s$, из (3.9) получим

$$\sigma(t_2) = \varepsilon_0 R(t_1 + x) - (\varepsilon_0 - \varepsilon_1^0) R(x), \quad x \equiv \frac{t_2 - t_1}{\gamma + (1-\gamma)(\varepsilon_1^0 / \varepsilon_0)^m} \tag{3.10}$$

Из этого уравнения, зная из опыта $\sigma(t_2)$, можно найти x и выражение $\gamma + (1-\gamma)(\varepsilon_1^0 / \varepsilon_0)^m$. Последнее не должно зависеть от выбора t_2 в указанном интервале. Увеличивая разность $t_2 - t_1$, находим значение $t_2 = t_{2_0}$, при котором впервые изменится это выражение. Таким образом определим $h = t_{2_0} - t_1$. Найденное значение h в общем случае может зависеть от ε_0. Если эта зависимость окажется существенной, то при ее нахождении необходимо будет учитывать изменение функции $f_1(\varepsilon)$.

Далее возьмем $t = t_3$, где $t_2 < t_3 < t_1 + h < t_s$. Тогда из (3.9) получим

$$\sigma(t_3) = \varepsilon_0 R(t_1 + x + y) - (\varepsilon_0 - \varepsilon_1^0) R(x + y) - \varepsilon_1^0 R(y), \quad y \equiv (t_3 - t_1) / \gamma \tag{3.11}$$

Решая уравнение (3.11), найдем y и γ. После этого величину m вычислим по формуле

$$m = \frac{1}{\ln(\varepsilon_1^0 / \varepsilon_0)} \ln\left[\frac{1}{1-\gamma}\left(\frac{t_2 - t_1}{x} - y\right)\right] \tag{3.12}$$

Таким образом находятся все искомые материальные функции, входящие в уравнения состояния.

4. Выбор эквивалентных деформаций и напряжений. В качестве эквивалентных деформаций и напряжений можно выбирать некоторые комбинации инвариантов соответствующих тензоров. Их выбор должен отражать экспериментальные зависимости между инвариантами, полученные при разных условиях нагружения.

В мелкодисперсных наполненных полимерных материалах гидростатическое давление влияет на сдвиговые характеристики, а сдвиговые напряжения способствуют разрыхлению материала, то есть влияют на его объемные характеристики. Эти свойства описываются с помощью зависимостей между первыми и вторыми инвариантами тензоров напряжений и деформаций

$$\sigma_u = \frac{\Phi(e_u)}{1 + a\exp(b\sigma)}, \quad \sigma = \frac{\Psi(\theta)}{1 + ce_u} \tag{4.1}$$

$$\sigma = \tfrac{1}{3}\sigma_{ij}\delta_{ij}, \quad \theta = \varepsilon_{ij}\delta_{ij}, \quad \sigma_u = \sqrt{\tfrac{3}{2} S_{ij} S_{ij}}, \quad e_u = \sqrt{\tfrac{2}{3} э_{ij} э_{ij}}$$

Функции Φ, Ψ и константы a, b, c находятся из экспериментов, в которых независимым образом осуществляется растяжение или сжатие образцов в камере с давлением, а скорости нагружения осредненно соответствуют реальным условиям эксплуатации конструкций.

Предполагая функции $\Phi(e_u)$ и $\Psi(\theta)$ монотонными и определяя обратные им функции $\Phi^{-1}[]$ и $\Psi^{-1}[]$, из (3.1) можно выразить e_u и θ через σ_u и σ:

$$e_u = \Phi^{-1}[\sigma_u(1 + a\exp(b\sigma))], \quad \theta = \Psi^{-1}[\sigma(1 + ce_u)] \tag{4.2}$$

Учитывая, что функции σ_u и e_u влияют на сдвиговые, а σ и θ – на объемные характеристики материалов, примем в качестве эквивалентных деформаций и напряжений выражения

$$e_1 = \frac{1}{G}\sigma_u(e_u, \theta), \quad e_2 = \frac{1}{K}\sigma(\theta, e_u), \quad \sigma_1 = Ge_u(\sigma_u, \sigma), \quad \sigma_2 = K\theta(\sigma, \sigma_u) \tag{4.3}$$

следующие из формул (4.1) и (4.2), где G и K – константы, имеющие размерность напряжений.

При практических расчетах полученные выражения эквивалентных деформаций и напряжений можно упрощать с учетом реальных свойств материала и условий эксплуатации конструкций. Например, если влиянием гидростатического давления на сдвиговые свойства, а сдвиговых напряжений на объемные свойства можно пренебречь, то, положив в (4.1) и (4.2) $a = c = 0$, получим

$$e_1 = e_u, \quad e_2 = \theta, \quad \sigma_1 = \sigma_u, \quad \sigma_2 = \sigma \tag{4.4}$$

Приведенные в (4.3), (4.4) выражения e_k и σ_k выбирались без учета влияния градиентов деформаций и напряжений на вид уравнений состояния и предельные характеристики материалов. Однако, при трещиновидных дефектах и в иных случаях появления высоких градиентов деформаций и напряжений следует учитывать соответствующие поправки. Покажем, как это можно делать, на примере высокой концентрации максимального главного растягивающего напряжения σ_m.

Эксперименты показывают, что локальная прочность хрупких и вязкоупругих материалов σ_e превосходит стандартное значение предела прочности σ_b, определенное при однородном напряженном состоянии [2–4]. Если представить связь σ_e и σ_b в виде

$$\sigma_e = \sigma_b \Phi(g_1), \quad g_1 \equiv \frac{|\operatorname{grad} \sigma_m|}{\max \sigma_m}, \quad \Phi(g_1) \geqslant 1 \tag{4.5}$$

то можно выявить резервы прочности материала, если в качестве эквивалентного напряжения принять выражение

$$\sigma_{1e} \equiv \sigma_m(t) / \Phi(g_1(t)) \tag{4.6}$$

Здесь главное растягивающее напряжение σ_m уменьшено из-за возрастания локальной прочности материала.

В [3] получено следующее представление $\Phi(g_1)$:

$$\Phi(g_1) = 1 - \lambda + \sqrt{\lambda^2 + L_1 g_1}, \quad L_1 = (2/\pi) K_{IC}^2 / \sigma_b^2 \tag{4.7}$$

где λ – положительная экспериментально определяемая константа; K_{IC} – характеристика трещиностойкости материала – критический коэффициент интенсивности напряжений.

Формула (4.7) была экспериментально подтверждена на примерах плоских и осесимметричных пространственных задач о хрупких телах с эллиптическими и эллипсоидальными отверстиями, переходящими, в частности, в трещины соответствующих форм. Однако приближенно ее можно использовать и в расчетах вязкоупругих материалов при подборе соответствующих характеристик λ и L_1. В общем случае для произвольных материалов необходимо экспериментальное определение функций $\Phi(g_1)$.

Изложенный подход применим не только в отношении максимальных главных напряжений, но и при других представлениях эквивалентных напряжений. В работе [4] указаны методы экспериментального определения градиентов инварианта σ_u, позволяющие находить функции, аналогичные $\Phi(g_1)$.

5. Примеры применения критерия эквивалентности повреждений. Приведем обоснование возможности использования критерия эквивалентности повреждений в виде удельной рассеянной энергии, основываясь на анализе результатов экспериментов при одноосном напряженном состоянии.

Пример 1. В [5] описаны опыты на ползучесть до разрушения образцов твердого топлива при кусочно постоянных напряжениях разных амплитуд. При изменении порядка приложения больших и малых по амплитуде растягивающих напряжений суммарное время до разрушения менялось, а именно: во всех случаях раннее разрушение наступало, когда вначале были большие напряжения, а затем – малые.

Проанализируем два процесса одноосной ползучести, когда

(a): $\sigma^a(t) = \sigma_1 h(t) + (\sigma_0 - \sigma_1) h(t - t_1)$

(b): $\sigma^b(t) = \sigma_1 h(t) + (\sigma_0 - \sigma_1)[h(t) - h(t - t_2)]$

Считая $\sigma_0 > \sigma_1 > 0$, определим величину $A_*(t)$ для режимов (a) и (b) в момент $t = t_1 + t_2$, когда продолжительность действия напряжений σ_0 и σ_1 в обоих процессах будет одинаковой.

Из-за отсутствия в [5] сведений о ядре релаксации испытанного материала воспользуемся простейшей моделью Максвелла, в которой $R(t) = E\exp(-Et/\mu)$, E и μ – положительные константы. Тогда мощность удельной рассеянной энергии примет вид

$$W_*(t) = \sigma^2(t) / \mu \tag{5.1}$$

где $\sigma(t)$ – одноосное растягивающее напряжение.

Если с учетом (5.1) подсчитать $A_*(t_1 + t_2)$, то оба процесса приведут к одинаковому значению удельной рассеянной энергии. Однако разница в процессах по критерию A_* обнаружится, если в соответствии с рассматриваемой эндохронно нелинейной теорией вязкоупругости принять

$$\mu = \mu_0 \varphi_1(\sigma)\varphi_2(\xi)\varphi_3(A_*) = \mu_0 \varphi_1(\sigma)[\beta + (1-\beta)\xi^p](1 - A_* / A_m) \tag{5.2}$$

$$\xi = \sigma(t) / \max \sigma(s), \quad t \geqslant s \geqslant 0, \quad A_m > A_*(t)$$

Интегрируя $W_*(t)$ с учетом (5.1), (5.2), находим

$$A_*(t) = A_m[1 - \sqrt{1 - 2\Psi(t) / A_m}\,], \quad \Psi(t) \equiv \frac{1}{\mu_0}\int_0^t \frac{\sigma^2(\tau)d\tau}{\varphi_1(\sigma)\varphi_2(\xi(\tau))} \tag{5.3}$$

Из (5.3) следует дополнительное условие: $A_m \geqslant 2\Psi(t)$. Полагая для простоты вычислений $p = \infty$, получим для процессов (a) и (b) соответственно

$$\Psi^a(t_1 + t_2) = \frac{1}{\mu_0}\left[\frac{\sigma_1^2 t_1}{\varphi_1(\sigma_1)} + \frac{\sigma_0^2 t_2}{\varphi_1(\sigma_0)}\right], \quad \Psi^b(t_1 + t_2) = \frac{1}{\mu_0}\left[\frac{\sigma_0^2 t_2}{\varphi_1(\sigma_0)} + \frac{\sigma_1^2 t_1}{\varphi_1(\sigma_1)\beta}\right]$$

Отсюда видно, что при $0 < \beta < 1$ $\Psi^b(t_1 + t_2) > \Psi^a(t_1 + t_2)$, а тогда из (5.3) следует, что $A_*^b(t_1 + t_2) > A_*^a(t_1 + t_2)$. Тем самым показано, что уровень накопленных повреждений оказался выше, когда вначале действовало большее напряжение. Этим и можно объяснить указанные результаты [5]. Физически они соответствуют тому, что появляющиеся при больших напряжениях микротрещины могут развиваться в дальнейшем и при низких напряжениях, увеличивая суммарное повреждение. Если же вначале действуют малые напряжения, при которых микротрещины не возникают, то время нарастания повреждений сокращается.

Пример 2. В отличие от предыдущего примера, где A_* влияло на предельные характеристики материала, здесь рассмотрим влияние A_* на механические характеристики в процессах, не доходящих до разрушения.

В [6] описаны результаты опытов на ползучесть и растяжение с постоянной скоростью нагружения образцов из наполненных полимерных материалов. Ультразвуковым методом замерялось изменение скорости продольных волн в образцах с течением времени. Находилась функция

$$P(t) = C_0 / C_\sigma(t) - 1 \tag{5.4}$$

где C_0 – скорость звука в ненагруженном образце, а $C_\sigma(t)$ – скорость звука в образце при напряжении $\sigma(t)$.

Аппроксимация экспериментальных результатов позволила с погрешностью менее 8% записать $P(t)$ с помощью формулы

$$P(t) = A[e^{\lambda\sigma(t)} - 1]t^{\alpha} \tag{5.5}$$

Здесь A, λ, α – положительные константы, $\sigma(t)$ равнялось константе σ_0 в опытах на ползучесть и $\dot{\sigma}_0 t$ – в опытах с постоянной скоростью нагружения.

Экспериментальные данные о ядре релаксации в [6] не приведены, поэтому, как и в предыдущем примере, воспользуемся моделью Максвелла для качественного анализа полученных результатов. В этом случае $A_*(t)$ вычисляется по формуле (5.3), в которой $\varphi_2(\xi) \equiv 1$, так как оба процесса не содержат разгрузки.

Функция $P(t)$ не относится к числу стандартных характеристик материала. Предполагая, что она зависит от напряжений и поврежденности, представим ее в виде

$$P(t) = B(\sigma(t))\Phi(A_*(t)) \tag{5.6}$$

Идентифицируем функции B и Φ, исходя из результатов опытов на ползучесть

$$A[e^{\lambda\sigma_0} - 1]t^{\alpha} = B(\sigma_0)\Phi(A_*(t)) \tag{5.7}$$

Равенство (5.7) будет выполняться точно при $\sigma = \sigma_0$, если принять

$$B(\sigma) = A[e^{\lambda\sigma} - 1]\mu_0^{\alpha}\varphi_1^{\alpha}(\sigma)\sigma^{-2\alpha}, \quad \Phi(A_*) = \left\{\frac{A_m}{2}\left[1 - \left(1 - \frac{A_*}{A_m}\right)^2\right]\right\}^{\alpha} \tag{5.8}$$

Здесь использованы те же обозначения, как и в первом примере. Опираясь на зависимости (5.3), (5.6), (5.8), находим $P(t)$ при $\sigma(t) = \dot{\sigma}_0 t$:

$$P(t) = A[e^{\lambda\dot{\sigma}_0 t} - 1]t^{\alpha}D(t), \quad D(t) \equiv \left[\frac{\varphi_1(\dot{\sigma}_0 t)}{t^3}\int_0^t \frac{\tau^2 d\tau}{\varphi_1(\dot{\sigma}_0\tau)}\right]^{\alpha} \tag{5.9}$$

Для вычисления $D(t)$ зададимся некоторым видом функции $\varphi_1(\sigma)$. В соответствии с ее физическим смыслом можно принять

$$\varphi_1(\sigma) = 1 \quad (0 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_s), \qquad \varphi_1(\sigma) = \sigma_s / \sigma \quad (\sigma > \sigma_s) \tag{5.10}$$

где σ_s – предел линейности по напряжениям.

Вычисляя $D(t)$, получим теоретическое значение $P(t)$. При малых значениях времени, когда $t < t_s \equiv \sigma_s / \dot{\sigma}_0$, получим

$$P(t) = A[e^{\lambda\dot{\sigma}_0 t} - 1]t^{\alpha}3^{-\alpha} \tag{5.11}$$

Соответственно при больших временах, когда $t \gg t_s$, из (5.9) найдем

$$P(t) \cong A[e^{\lambda\dot{\sigma}_0 t} - 1]t^{\alpha}4^{-\alpha} \tag{5.12}$$

Формулы (5.11) и (5.12) отличаются от (5.5) множителями $3^{-\alpha}$ и $4^{-\alpha}$, дающими с учетом реальных значений α погрешности соответственно 24% и 29%. Меньшие расхождения достигаются при малых временах, что можно объяснить лучшей аппроксимацией в малом интервале времен реального ядра релаксации двухконстантной моделью Максвелла. Полученные расхождения при $\sigma(t) = \dot{\sigma}_0 t$ можно уменьшить, если не добиваться точного совпадения результатов в опыте на ползучесть. Вводя поправочные множители в теоретические формулы, можно сделать максимальные погрешности при $\sigma(t) \equiv \sigma_0$ и $\sigma(t) = \dot{\sigma}_0 t$ соответственно 13,6% и 17%.

Приведенные примеры свидетельствуют о возможности практического использования критерия эквивалентности повреждений в форме удельной рассеянной энергии. Они иллюстрируют корреляцию между введенным критерием и реальными свойствами наполненных полимерных материалов.

6. Заключение. К достоинствам изложенного варианта теории повреждений можно отнести то, что удельная рассеянная энергия отражает фундаментальные свойства вязкоупругих материалов и служит мерой необратимости различных процессов. Экспериментальное определение введенных материальных функций позволяет путем проверки их универсальности находить пределы применимости теории.

Частное предположение о некоторых свойствах материалов, например, о виде кривых релаксации и ползучести, сужает пределы ее применимости, но при необходимости соответствующие уточнения могут быть сделаны, не меняя общего хода рассуждений.

Критерий A_* является скалярным. Однако с его помощью можно приближенно учесть повреждения, имеющие векторный или тензорный характер. Для этого при выборе режима имитации повреждений необходимо сохранять ориентацию главных осей напряжений в рассматриваемой точке конструкции такой, какой она реализуется на заключительной стадии эксплуатации. Появление микротрещин из-за повреждений при имитации будет в этом случае самым неблагоприятным для процесса дальнейшего деформирования и разрушения образца. Такой подход является консервативным и обеспечивает оценку поврежденности материала в запас прочности.

На базе критерия A_* можно также строить приближенные критерии разрушения материала, если из экспериментов находить критические значения A_* в моменты разрушения при разных видах нагружения. Относя расчетные значения A_* при разных видах нагружения к соответствующим критическим значениям и принимая какое-либо условие, связывающее эти отношения, получим критерий разрушения. В линейном варианте, аналогичном критерию Майнера, сумма этих отношений приравнивается единице.

В заключение отметим, что проблеме накопления повреждений в наполненных полимерных материалах посвящено большое число публикаций. В качестве примеров укажем на работы [8, 9], в которых имеются обзоры по рассматриваемой тематике. Краткое указание о возможности использования A_*-критерия дано в [10]. Имеются и другие аналогичные работы, включая те, где содержатся экспериментальные результаты. Их сопоставление с изложенным здесь подходом могло бы представить практический интерес.

Автор выражает благодарность своему коллеге Васильеву А.М. за ценную помощь при выполнении данной работы. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 97-01-00629.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
2. *Быков Д.Л., Васильев А.М., Коновалов Д.Н.* К оценке прочности композитных конструкций в зонах локальной концентрации напряжений // Механика композитных материалов. № 2. 1984. С. 308–312.
3. *Леган М.А.* О взаимосвязи градиентных критериев локальной прочности в зоне концентрации напряжений с линейной механикой разрушения // ПМТФ. № 4. 1993. С. 146–154.
4. *Быков Д.Л., Васильев А.М., Дельцов В.С., Коновалов Д.Н.* О моделировании трехмерных напряженных состояний при испытаниях образцов // Изв. АН. МТТ. № 6. 1994. С. 155–161.

5. *Carden III J.P.* An Investigation of the Applicability of a Damage Failure Theory for Solid Rocket Propellants // AIAA. Paper 92-0132. 1992.
6. *Волков Н.И.* К теории повреждений композитов при сложных временных режимах // Механика композитных материалов. 1981. № 4. С. 602–607.
7. *Ильюшин А.А.* Функционалы и меры необратимости на множествах процессов в механике сплошной среды (МСС) // ДАН. 1994. Т. 337. № 1. С. 48–50.
8. *Ravichandran G., Liu C.T.* Modelling behavior of particulate composites undergoing damage // Intern. J. Solids and Struct. 1995. V. 32. № 6–7. P. 979–990.
9. *Bencher C.D., Danskardt R.H., Ritchie R.O.* Microstructural damage and fracture processes in a composite solid rocket propellant // J. Spacecraft and Rockets. 1995. V. 32. № 2. P. 325–334.
10. *Bykov D.L.* Some Basic Problems of Structural Integrity Assurance of Solid Propellant Grains. Propulsion in Space Transportation // 5th Symposium Internat. Actes Proceedings, 1996. P. 2.41–2.48.

Королев

Поступила в редакцию
26.VI.1997