

УДК 533.6.013.42

© 1998 г. А.А. ГРИШКО, А.В. ПЕТРОВСКИЙ, В.П. РАДИН

## О ВЛИЯНИИ ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПАНЕЛИ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА

Изучено влияние отношения коэффициентов внутреннего и внешнего вязкого трения на устойчивость равновесия сжатой удлиненной панели в сверхзвуковом потоке газа. Наряду с плоскими формами равновесия рассмотрены выпученные формы, достигнутые в результате дивергенции. Изучена структура областей неустойчивости в пространстве параметров. Выполнен частотный анализ решений на границах областей неустойчивости. В рамках континуальной модели подтверждено, что изменение коэффициента внутреннего трения может привести к появлению вторичного флаттера в области дивергенции.

1. Устойчивость упругих пластин, оболочек и их панелей в сверхзвуковом потоке газа изучалась многими авторами, начиная с 1956 года [1–5]. В отличие от многих других задач аэроупругости, в частности, задачи об изгибно-крутильном флаттере крыла, послекритическое поведение упругих панелей, деформация которых стеснена, представляет определенный практический интерес. Панельный флаттер в нелинейной постановке изучался рядом авторов [1, 5–7]. Обзор последних результатов приведен в [8]. В последние годы интерес к задачам о нелинейном флаттере возрос, в частности, в связи с тем, что они составляют определенный класс задач динамики для существенно неконсервативных, негамильтоновых систем. Вторичная и последующие бифуркации различных типов, переход от установившихся колебаний к хаосу и обратно изучался в работах [4, 9]. Однако в этих работах система с распределенными параметрами сводилась к системе с конечным числом степеней свободы, поведение которой и подвергалось анализу. Одна из целей данной статьи состоит в том, чтобы изучить некоторые аспекты задачи о панельном флаттере, рассматривая панель как континуальную систему.

Известно [1, 10–13], что устойчивость непотенциальных систем существенно зависит от распределения демпфирующих сил по степеням свободы. В частности, неравномерность распределения парциального демпфирования может приводить к появлению вторичных бифуркаций в областях первичной неустойчивости, что было впервые обнаружено в работе [7]. Внутреннее трение в среде демпфирует маломасштабные формы колебаний существенно сильнее, чем крупномасштабные, поэтому оно может быть дестабилизирующим фактором.

Рассмотрим плоскую панель в сверхзвуковом потоке газа, удлиненную в направлении, ортогональном потоку, и сжатую усилием вдоль потока. Избыточное давление на панель в самом общем случае можно представить через "переходные" функции (в виде интегралов свертки по времени) [4]. При скоростях обтекания, типичных для панельного флаттера, достаточно хорошо работает "поршневая" модель [5, 14]. Далее будем использовать одну из известных формул "поршневой" теории

$$\Delta p = -\frac{\rho_{\infty} U}{\sqrt{M^2 - 1}} \left( U \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{M^2 - 2}{M^2 - 1} \frac{\partial w}{\partial t} \right)$$

Здесь  $\rho_\infty$  и  $U$  – соответственно плотность и скорость невозмущенного потока,  $M$  – число Маха; изгиб панели предполагается цилиндрическим с функцией прогиба  $w(x, t)$ . Будем считать, что кромки панели неподвижно закреплены в направлении потока, поэтому при изгибе появляется дополнительное усилие растяжения. Примем для него среднее по длине панели значение:

$$N(t) = \frac{Eh}{2a(1-\nu^2)} \int_0^a \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx$$

Уравнение колебаний изотропной упругой панели в потоке запишем в безразмерной форме ( $0 \leq x \leq 1$ ):

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \varepsilon_e \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{\pi^4} \left( 1 + \varepsilon_i \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{A(t) - \alpha}{\pi^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (1.1)$$

где координата отнесена к длине панели  $a$ , прогиб – к толщине  $h$ . Кроме того, введено безразмерное время  $t \rightarrow \omega_0 t$ ,  $\omega_0 = (\pi^2/a^2)(D/\rho h)^{1/2}$  – основная частота панели с шарнирно закрепленными кромками,  $D$  – цилиндрическая жесткость,  $\rho$  – плотность панели. Другие безразмерные параметры в уравнении (1.1) введены по формулам

$$\alpha = -\frac{N_0}{N_*}, \quad N_* = \frac{\pi^2 D}{a^2}, \quad \mu = \frac{2\rho_\infty U^2}{\rho h a \omega_0^2 \sqrt{M^2 - 1}}$$

$$\varepsilon_e = \frac{1}{\rho h \omega_0} \left[ \frac{\rho_\infty U (M^2 - 2)}{(M^2 - 1)^{3/2}} + b_e \right], \quad \varepsilon_i = \frac{b_i}{\rho h \omega_0}$$

в которых  $N_0$  – начальное,  $N_*$  – эйлерово критическое усилия. Коэффициент  $\varepsilon_e$  учитывает внешнее трение, включающее в себя аэродинамическую составляющую  $\rho_\infty U (M^2 - 2)/(M^2 - 1)^{3/2}$  и вязкое сопротивление внешней среды  $b_e$ . Внутреннее трение в материале панели описывается моделью Фойхта с параметром  $b_i$ . Функция  $A(t)$  в уравнении (1.1) есть приведенное к безразмерной форме дополнительное усилие, определенное выше:

$$A(t) = \frac{N(t)}{N_*} = \frac{6}{\pi^2} \int_0^1 \left[ \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right]^2 dx \quad (1.2)$$

На кромках панели примем условия шарнирного закрепления  $w = 0$ ,  $\partial^2 w / \partial x^2 = 0$  ( $x = 0, 1$ ). В числе решений поставленной краевой задачи имеются статические (нетривиальные формы равновесия). Уравнение (1.1) псевдолинейно, поэтому на первом этапе его анализ проводим аналогично тому, как это делается в линейной теории панельного флаттера (см., например, [2]). Решения уравнения (1.1) ищем в виде  $w(x) = C e^{rx}$ . Характеристическое уравнение имеет один нулевой корень  $r_4 = 0$ , остальные три – это корни кубического уравнения

$$r^3 + \pi^2 \alpha_1 r + \pi^4 \mu / 2 = 0, \quad \alpha_1 = \alpha - A \quad (1.3)$$

При любом  $\alpha_1 \geq 0$  дискриминант  $Q = (\pi^2 \alpha_1 / 3)^3 + (\pi^4 \mu / 4)^2$  положителен, и уравнение (1.3) имеет один действительный и два комплексно сопряженных корня:

$$r_{1,2} = u \pm iv, \quad r_3 = -2u$$

$$u = -\frac{1}{2}(s_1 + s_2), \quad v = (\sqrt{3}/2)(s_1 - s_2) \quad (1.4)$$

$$s_{1,2} = \pi \left\{ -\pi \mu / 4 \pm \left[ (\pi \mu / 4)^2 + (\alpha_1 / 3)^3 \right]^{1/2} \right\}^{1/3}$$

Здесь  $u$  и  $v$  действительны и положительны. Удовлетворяя общее решение граничным условиям, из условия нетривиальности решения получим уравнение

$$[(u^2 + v^2)^2 - 4u^2(u^2 - v^2)] \operatorname{sh} u \operatorname{sin} v + 8u^3 v (\operatorname{ch} 2u - \operatorname{ch} u \operatorname{cos} v) = 0 \quad (1.5)$$

Исключая  $v$  при помощи соотношения  $v = (3u^2 + \pi^2 \alpha_1)^{1/2}$ , ищем действительные положительные корни  $u$  уравнения (1.5). Эти корни существуют лишь при определенных значениях параметра  $\alpha_1$ . В самом деле, при любых действительных  $u, v > 0$  второе слагаемое в уравнении (1.5) неотрицательно, и уравнение может быть удовлетворено лишь при  $\operatorname{sin} v \leq 0$ , т.е. на отрезках  $1 \leq \alpha_1 \leq 4, 9 \leq \alpha_1 \leq 16, \dots$ . Граничные значения  $\alpha_1$  равны эйлеровым (бифуркационным) значениям  $\alpha$  при отсутствии потока. Единственный положительный корень  $u$  в каждом интервале находится методом дихотомии, после чего вычисляется параметр скорости потока  $\mu$  по формуле  $\mu = (4/\pi^4)u(u^2 + v^2)$ . Наименьшее собственное значение  $\alpha_*$  из интервала  $[1, 4]$  является критическим.

Функция  $\mu(\alpha_*)$  (фиг. 1) в интервале  $1 \leq \alpha_* \leq 4$  имеет экстремум  $\alpha_* = \alpha_0 = 2,5891$ ;  $\mu = \mu_0 = 2,3449$ . Таким образом, квазистатическая форма потери устойчивости (дивергенция) возможна лишь при значениях параметра скорости потока  $\mu < \mu_0$ . Ей отвечает ветвь  $AB$  кривой  $ABC$  на фиг. 1. Область дивергенции  $ABD$  (т.е. область существования нетривиального статического решения краевой задачи) ограничена этой ветвью и горизонтальной прямой  $\mu = \mu_0, \alpha \geq \alpha_0$ . Введем также обратную функцию  $\alpha_*(\mu) = (\pi^2 \mu / 4u_*) - (4/\pi^2)u_*^2$ , где  $u_*$  – корень уравнения (1.5), отвечающий ветви  $AB$  кривой на фиг. 1.

Нетривиальные формы равновесия панели  $w_0(x)$  существуют лишь при собственных значениях параметра  $\alpha_1 = \alpha - A = \alpha_*(\mu)$ . Они определяются как соответствующие собственные функции с точностью до постоянного множителя. Последний находится из уравнения (1.2). Окончательно получаем

$$w_0(x) = \pm \pi \left[ \frac{\alpha - \alpha_*(\mu)}{6F(u_*, v_*)} \right]^{1/2} f(x, \mu), \quad \alpha > \alpha_*(\mu), \quad \mu < \mu_0$$

$$f(x, \mu) = \gamma_1(u_*, v_*) (e^{u_* x} \operatorname{cos} v_* x - 1) + \gamma_2(u_*, v_*) e^{u_* x} \operatorname{sin} v_* x + \gamma_3(u_*, v_*) (e^{-2u_* x} - 1)$$

$$F(u_*, v_*) = \int_0^1 [\gamma_1(u_*, v_*) e^{u_* x} (u_* \operatorname{cos} v_* x - v_* \operatorname{sin} v_* x) + \gamma_2(u_*, v_*) e^{u_* x} (u_* \operatorname{sin} v_* x + v_* \operatorname{cos} v_* x) - 2\gamma_3(u_*, v_*) u_* e^{-2u_* x}]^2 dx \quad (1.6)$$

$$\gamma_1(u_*, v_*) = 4u_*^2 [-(u_*^2 - v_*^2) \operatorname{sin} v_* + 2u_* v_* (e^{-3u_*} - \operatorname{cos} v_*)]$$

$$\gamma_2(u_*, v_*) = -4u_*^2 [(u_*^2 - v_*^2) (e^{-3u_*} - \operatorname{cos} v_*) + 2u_* v_* \operatorname{sin} v_*]$$

$$\gamma_3(u_*, v_*) = (u_*^2 + v_*^2)^2 \operatorname{sin} v_*$$

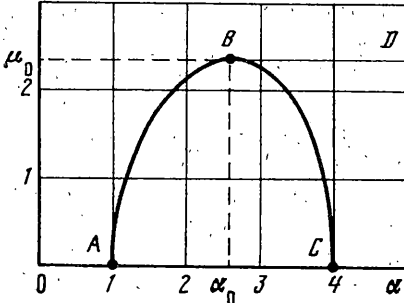
2. Относительно малого возмущения  $y(x, t)$  статического решения  $w_0(x)$ , заданного в форме (1.6), имеем уравнение

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \varepsilon_e \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{1}{\pi^4} \left( 1 + \varepsilon_i \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\beta}{\pi^2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\mu}{2} \frac{\partial y}{\partial x} = -z(t, \alpha, \mu) g(x, \mu) \quad (2.1)$$

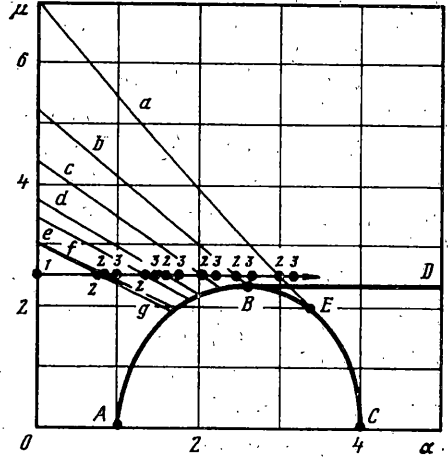
где  $\beta = \alpha$ ,  $g(x, \mu) = 0$  при  $\mu > \mu_0$  или  $\alpha \leq \alpha_*(\mu), \mu < \mu_0$ . При  $\mu < \mu_0, \alpha > \alpha_*(\mu)$  имеем  $\beta = \alpha_*(\mu)$

$$g(x, \mu) = e^{u_* x} \operatorname{sin}[v_*(x-1)] - e^{u_*(x-3)} \operatorname{sin} v_* x + e^{-2u_* x} \operatorname{sin} v_* \quad (2.2)$$

$$z(t, \alpha, \mu) = \frac{\pi^{16} \mu^2}{32F(u_*, v_*)} [\alpha - \alpha_*(\mu)] \int_0^1 g(x, \mu) y(x, t) dx$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Решение уравнения (2.1) представим в виде  $y(x, t) = Y(x, \lambda)e^{\lambda t}$ . При этом  $z(t, \alpha, \mu) = Z(\lambda, \alpha, \mu)e^{\lambda t}$ , где

$$Z(\lambda, \alpha, \mu) = \frac{\pi^{16} \mu^2}{32 F(u_*, v_*)} [\alpha - \alpha_*(\mu)] \int_0^1 g(x, \mu) Y(x, \lambda) dx \quad (2.3)$$

а формы потери устойчивости  $Y(x, \lambda)$  удовлетворяют обыкновенному дифференциальному уравнению

$$Y^{IV} + \frac{\pi^4}{1 + \varepsilon_i \lambda} \left[ \frac{\beta}{\pi^2} Y'' + \frac{\mu}{2} Y' + \lambda(\lambda + \varepsilon_e) Y \right] = - \frac{\pi^4 Z(\lambda, \alpha, \mu)}{1 + \varepsilon_i \lambda} g(x, \mu) \quad (2.4)$$

Характеристическое уравнение, соответствующее уравнению (2.4), имеет вид

$$r^4 + \frac{\pi^4}{1 + \varepsilon_i \lambda} \left[ \frac{\beta}{\pi^2} r^2 + \frac{\mu}{2} r + \lambda(\lambda + \varepsilon_e) \right] = 0 \quad (2.5)$$

и его коэффициенты комплексны, так как  $\lambda$  — комплексный либо чисто мнимый параметр. Поэтому корни уравнения (2.5) не будут комплексно сопряженными. Для любого заданного  $\lambda$  четыре корня уравнения можно выразить через один комплексный параметр. Корни удовлетворяют условию  $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 0$ . Тогда  $r_1 + r_2 = -(r_3 + r_4) = 2p$ . Разлагая левую часть уравнения (2.5) на квадратичные множители  $(r^2 - 2pr + q_1)(r^2 + 2pr + q_2)$  и сравнивая коэффициенты исходного и преобразованного уравнений, получим

$$q_{1,2} = 2p^2 + (4\pi^2 \beta p \pm \pi^4 \mu) / [8p(1 + \varepsilon_i \lambda)]$$

$$p^2 \left\{ \left[ \frac{\beta}{2} + \frac{2(1 + \varepsilon_i \lambda)p^2}{\pi^2} \right]^2 - \lambda(\lambda + \varepsilon_e)(1 + \varepsilon_i \lambda) \right\} - \left( \frac{\pi^2 \mu}{8} \right)^2 = 0 \quad (2.6)$$

Корни уравнения (2.5) принимают вид

$$r_{1,2} = p \pm iR(p, \lambda), \quad r_{3,4} = -p \pm iR(-p, \lambda)$$

$$R^2(p, \lambda) = p^2 + \frac{4\pi^2 \beta + \pi^4 \mu / p}{8(1 + \varepsilon_i \lambda)}$$

Введем вектор  $\mathbf{y}^T(x, \lambda) = [Y(x, \lambda), Y'(x, \lambda), Y''(x, \lambda), Y'''(x, \lambda)]$  и выберем фундаментальную систему решений однородного уравнения (2.4):

$$\mathbf{y}_j^T(x, \lambda) = [y_{1j}(x, \lambda), \dots, y_{4j}(x, \lambda)] = [y_{1j}(x, \lambda), y'_{1j}(x, \lambda), y''_{1j}(x, \lambda), y'''_{1j}(x, \lambda)]$$

$$\left. \begin{matrix} y_{11}(x, \lambda), y_{13}(x, \lambda) \\ y_{12}(x, \lambda), y_{14}(x, \lambda) \end{matrix} \right\} = e^{\pm px} \begin{cases} \cos[R(\pm p, \lambda)x] \\ \sin[R(\pm p, \lambda)x] \end{cases}$$

В последней формуле первому и второму значениям слева соответствуют знаки плюс и минус справа. Образует матрицу Коши  $\mathbf{K}(x, \lambda) = \mathbf{Y}(x, \lambda)\mathbf{Y}^{-1}(0, \lambda)$ , где  $\mathbf{Y} = [y_1 \dots y_4]$ .

Общее решение неоднородного уравнения (2.4) запишется в виде

$$\mathbf{y}(x, \lambda) = \mathbf{K}(x, \lambda)\mathbf{y}(0, \lambda) - \frac{\pi^4 Z(\lambda, \alpha, \mu)}{1 + \varepsilon_i \lambda} \int_0^x \mathbf{k}_4(x - \xi, \lambda) g(\xi, \mu) d\xi$$

где  $\mathbf{k}_j$  —  $j$ -й вектор-столбец матрицы Коши  $\mathbf{K}$  и в соответствии с граничными условиями  $y_1(0, \lambda) = y_3(0, \lambda) = 0$ . Удовлетворяя решение этим условиям при  $x = 1$  и подставляя его в соотношение (2.3), получим однородную систему трех линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $y_2(0, \lambda), y_4(0, \lambda), Z(\lambda, \alpha, \mu)$ . Эту систему можно записать в матричной форме  $\mathbf{A}\mathbf{c} = 0$ , где:

$$\mathbf{c}^T = [c_1, c_2, c_3] = \left[ y_2(0, \lambda), y_4(0, \lambda), -\frac{\pi^4}{1 + \varepsilon_i \lambda} Z(\lambda, \alpha, \mu) \right], \quad \mathbf{A} = [a_{jk}]$$

$$a_{11} = k_{12}(1, \lambda), \quad a_{12} = k_{14}(1, \lambda), \quad a_{21} = k_{32}(1, \lambda), \quad a_{12} = k_{34}(1, \lambda)$$

$$a_{31} = \int_0^1 k_{12}(x, \lambda) g(x, \mu) dx, \quad a_{32} = \int_0^1 k_{14}(x, \lambda) g(x, \mu) dx \quad (2.7)$$

$$a_{13} = \int_0^1 k_{12}(x, \lambda) g(1-x, \mu) dx, \quad a_{23} = \int_0^1 k_{14}(x, \lambda) g(1-x, \mu) dx$$

$$a_{33} = \frac{32(1 + \varepsilon_i \lambda) F(u_*, v_*)}{\pi^{20} \mu^2 (\alpha - \beta)} \int_0^1 \int_0^1 k_{14}(x - \xi, \lambda) g(x, \mu) g(\xi, \mu) d\xi dx + 1, \quad \alpha > \beta$$

Известно решение задачи об устойчивости плоской формы равновесия пластины без учета внутреннего трения и при исчезающе малом внешнем трении [2]. Уравнения (2.7) позволяют исследовать устойчивость как плоской, так и выпущенной форм равновесия без всяких ограничений.

3. Вне области  $ABD$  на фиг. 1 имеем тривиальную форму равновесия  $w_0(x) \equiv 0$ . При этом в уравнениях (2.7) нужно положить  $Z(\lambda, \alpha, \mu) = 0$  ( $c_3 = 0$ ) и исключить третью строку и третий столбец в матрице  $\mathbf{A}$ . Приравнявая нулю определитель системы, получим уравнение

$$2p^2 R(p, \lambda) R(-p, \lambda) \{ \text{ch } 2p - \cos[R(p, \lambda) - R(-p, \lambda)] \} +$$

$$+ \left\{ p^2 [R(p, \lambda) + R(-p, \lambda)]^2 + \frac{\pi^8 \mu^2}{64(1 + \varepsilon_i \lambda)^2 p^2} \right\} \sin R(p, \lambda) \sin R(-p, \lambda) = 0 \quad (3.1)$$

Уравнение (3.1) решаем совместно с уравнением (2.6) относительно  $\lambda$  и  $p$ . Если при некоторых значениях параметров аэроупругой системы  $\alpha$  и  $\mu$  все комплексные корни  $\lambda$  лежат в левой полуплоскости, то состояние равновесия системы устойчиво. При изменении параметров устойчивость равновесия нарушается, как только хотя бы один из корней переходит в правую полуплоскость. Уравнения (2.6) и (3.1) не перестают

выполняться, если заменить  $\lambda$  на комплексно сопряженное значение. Таким образом, все характеристические показатели  $\lambda$  образуют комплексно сопряженные пары. Границе области флаттера на плоскости параметров  $\alpha$  и  $\mu$  отвечает первый выход одной из комплексных пар  $\lambda$  на мнимую ось.

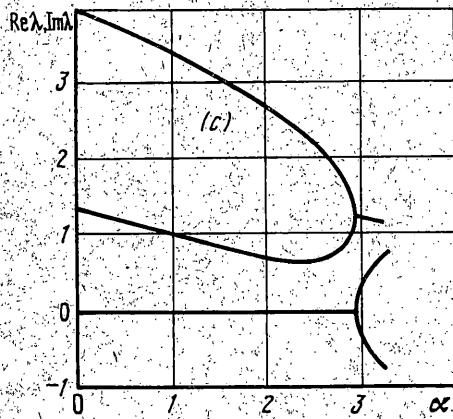
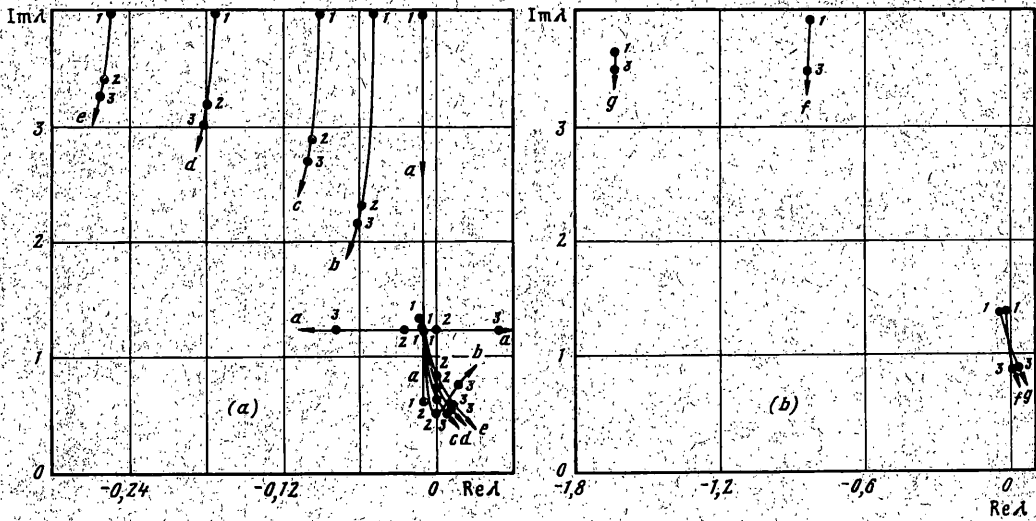
Для нахождения границы положим в уравнениях (2.6) и (3.1)  $\lambda = i\omega$  ( $\omega > 0$ ). Бикубическое уравнение (2.6) имеет три пары корней  $\pm r$ . Замена  $r$  на  $-r$  не изменяет уравнения (3.1), так что используем лишь три корня уравнения (2.6), различающихся по величине. В результате получим комплексное уравнение, и нужно, чтобы были равны нулю как его действительная, так и мнимая часть. Этого можно добиться выбором значений  $\alpha$  и  $\mu$ .

Комплексное выражение обращается в нуль тогда и только тогда, когда равен нулю его модуль. Но модуль комплексного числа не может быть отрицательным. Таким образом, любой корень  $\lambda$  уравнения (3.1) является одновременно и точкой абсолютного локального (ввиду дискретности множества корней) минимума модуля левой части уравнения. Задача поиска абсолютного минимума функции любого числа переменных стандартно решается модифицированным симплекс-методом (методом Нелдера–Мида). Для его реализации имеются весьма эффективные компьютерные программы. При вычислениях фиксировались значения  $\alpha$  с определенным шагом и отыскивались значения  $\mu$  и  $\omega$ , обеспечивающие минимум целевой функции, равной модулю левой части уравнения (3.1). Стартовые значения  $\mu$  и  $\omega$  на первом шаге (при  $\alpha = 0$ ) определялись из приближенного решения, основанного на разложении  $w(x, t)$  по формам собственных колебаний панели. На последующих шагах по параметру  $\alpha$  в качестве стартовых значений  $\mu$  и  $\omega$  принимались значения, найденные на предыдущем шаге. На каждом шаге метода Нелдера–Мида из трех корней  $r$  уравнения (2.6) отбирался корень, дающий наименьшее значение целевой функции.

Границы области флаттера при  $\epsilon_e = 0,02$  и различных значениях отношения коэффициентов внутреннего и внешнего трения  $\eta = \epsilon_i/\epsilon_e$  представлены на фиг. 2. Здесь же изображена полученная выше граница области дивергенции. Графики указывают на дестабилизирующее влияние внутреннего трения на устойчивость панели: с увеличением  $\epsilon_i$  уменьшается критическая скорость флаттера. Границы  $a-g$  областей флаттера на фиг. 2 соответствуют увеличивающимся значениям коэффициента внутреннего трения ( $\eta = 0; 0,2434; 0,5; 1; 1,5; 5; 10$ ). Аналогичная дестабилизация была обнаружена в более простой аэроупругой системе (с двумя степенями свободы) при увеличении демпфирования по второй моде [7]. Граница  $a$  ( $\eta = 0$ ) является предельной. Она касается кривой  $BC$ , вдоль которой  $\lambda = 0$ , в точке  $E$ . Существенно, что здесь имеет место сосуществование двух (с учетом направления дивергенции – трех) состояний равновесия, что отмечено Коунадисом [15]. При увеличении параметра внутреннего трения положение границы области флаттера также стремится к некоторому предельному. Так, границы  $f$  и  $g$ , соответствующие значениям  $\eta = 5$  и  $\eta = 10$ , весьма близки одна к другой. Значение  $\eta = 0,2434$  отвечает случаю, когда граница области флаттера (кривая  $b$ ) сливается с границей области дивергенции в точке  $B$  ( $\alpha_0, \mu_0$ ). При  $\eta > 0,2434$  в области дивергенции вблизи ее границы появляется подобласть вторичного флаттера [7] (см. ниже).

Как известно, явление флаттера связано с наличием в системе непотенциальных (псевдогироскопических) сил – сил взаимодействия между различными формами колебаний. Основную роль играет взаимодействие первых двух форм и поведение соответствующих им (основных) характеристических показателей [1]. Собственные значения  $\lambda$  находились из уравнений (2.6) и (3.1) методом Нелдера–Мида, как описано выше. Управляющими параметрами для целевой функции на этот раз были действительная и мнимая часть  $\lambda$ . В качестве стартовых значений принимались  $\text{Re}\lambda = \epsilon_e/2$ , для мнимой части  $\lambda$  – значения двух первых собственных частот соответствующей консервативной системы, т.е. панели, сжатой усилием, в отсутствие потока.

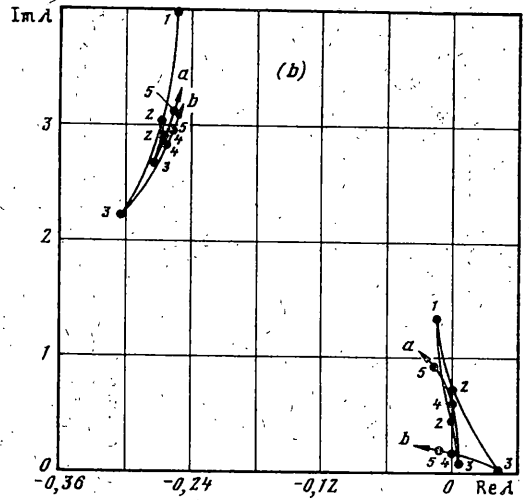
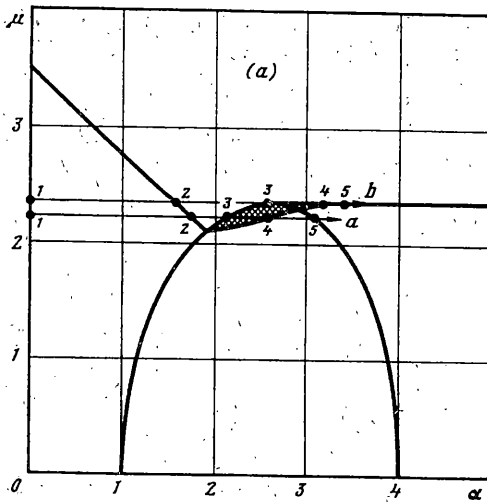
Исследовалось изменение двух основных характеристических показателей при



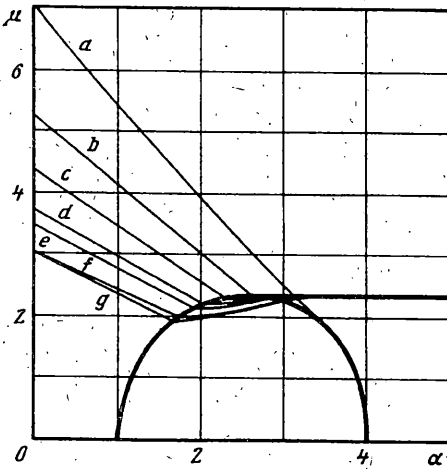
Фиг. 3

фиксированной скорости потока  $\mu = 2,5$  и изменяющемся безразмерном сжимающем усилии  $\alpha$ . Путь изменения параметров обозначен на фиг. 2 горизонтальной прямой со стрелкой. Начало пути — в точке 1 ( $\alpha = 0$ ), в точках 2 наблюдается пересечение границ  $a-g$  областей флаттера для разных значений коэффициента внутреннего трения, точки 3 в области флаттера означают конец пути для каждого из вариантов.

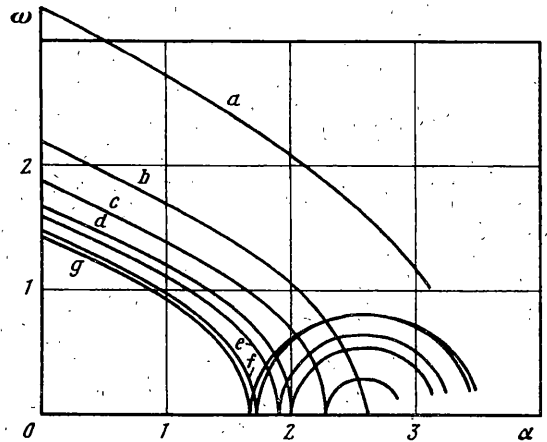
Движение характеристических показателей на комплексной плоскости показано на фиг. 3,  $a, b$ . При отсутствии внутреннего трения (фиг. 3,  $a$ , вариант  $a$ ) первый и второй характеристические показатели движутся по вертикальной прямой  $\text{Re } \lambda = -0,01$  навстречу друг другу до слияния, после чего удаляются друг от друга по горизонтальной прямой  $\text{Im } \lambda = \omega_f = 1,238$ , где  $\omega_f$  — частота флаттера. Как уже отмечалось ранее [1], эта частота близка к значению  $[(\omega_1^2 + \omega_2^2) / 2]^{1/2}$ , где  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — первые две собственные частоты панели в отсутствие потока при значений  $\alpha = 2,940$ , соответствующем точке 2 на границе  $a$  (фиг. 2). Изменение действительных и мнимых частей характеристических показателей с увеличением параметра  $\alpha$  при  $\eta = 0$  иллюстрирует фиг. 3,  $c$ . При наличии внутреннего трения мнимые части обоих характеристических показателей убывают при приближении к границе флаттера из области устойчивости.



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

4. Явление вторичного флаттера, впервые описанное в [7], существует в тех случаях, когда граница области первичного флаттера пересекает границу области дивергенции ниже точки максимума  $(\alpha_0, \mu_0)$ . В области дивергенции параметры решения удовлетворяют системе уравнений (2.7). Условие существования нетривиального решения  $\det A = 0$  этой системы решается совместно с уравнением (2.6) так же, как и в случае первичного флаттера, относительно параметров  $\mu$  и  $\omega$ .

На фиг. 4, *a* представлена полная картина областей неустойчивости на плоскости параметров  $(\alpha, \mu)$  для панели с отношением параметров внутреннего и внешнего трения  $\eta = 1,5$  при параметре внешнего трения  $\epsilon_e = 0,02$ . Область вторичного флаттера затенена. Было исследовано изменение основных характеристических показателей при изменении параметров системы по путям *a* и *b*, пересекающим область вторичного флаттера. Путь *b* проходит по верхней границе области дивергенции с внутренней стороны области. Пути начинаются в точке 1 ( $\alpha = 0$ ), пересекают границу области первичного флаттера в точке 2, границу области дивергенции – в точке 3, покидают область вторичного флаттера в точке 4 и заканчиваются в точке 5. Пути пере-



мещения характеристических показателей на комплексной плоскости показаны на фиг. 4, *b*. В точках границы области дивергенции (точки *З*) мнимые части показателей минимальны, а абсолютные величины действительных частей – максимальны.

Полная картина областей неустойчивости (с учетом вторичного флаттера) для различных значений отношения параметров внутреннего и внешнего трения представлена на фиг. 5. Она получена дополнением фиг. 2 областями вторичного флаттера. На фиг. 6 показаны зависимости частоты флаттера от безразмерного сжимающего усилия  $\alpha$ . В точках слияния границ первичного, вторичного флаттера и дивергенции частота флаттера обращается в нуль.

Некоторые из качественных выводов данной статьи были получены ранее [1, 4, 7] путем сведения исходной краевой задачи к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом вычисления проводились с учетом конечного числа членов ряда в разложении для функции  $w(x, t)$ . Анализ задачи в континуальном пространстве, выполненный в данной статье, позволил обнаружить дополнительные эффекты в частотной области, а также явно учесть влияние соотношения между параметрами внешнего трения и внутреннего трения по модели Фойхта.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 97-01-00283) и Международного фонда INTAS (грант 433.i96).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Болотин В.В.* Колебания и устойчивость упругой цилиндрической оболочки в потоке сжимаемой жидкости // Инж. сб. 1956. Вып. 24. С. 3–16.
2. *Мовчан А.А.* О колебаниях пластинки, движущейся в газе // ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 2. С. 211–222.
3. *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
4. *Dowell E.H.* Aeroelastic stability of plates and shells: an innocent's guide to the literature // Instability of Continuous Systems. Proc. IUTAM Symp. Berlin: Springer Verlag, 1971. P. 65–77.
5. *Dowell E.H.* Aeroelasticity of Plates and Shells. Leyden: Nordhoff, 1975. 139 p.
6. *Болотин В.В.* Нелинейный флаттер пластин и оболочек // Инж. сб. 1960. Вып. 28. С. 55–75.
7. *Bolotin V.V., Petrovsky A.V., Grishko A.A.* Secondary bifurcations and global instability of an aeroelastic nonlinear system in the divergence domain // J. Sound Vibr. 1996. V. 191. № 3. P. 413–451.
8. *Баничук Н.В.* Устойчивость аэро- и гидроупругих систем / Машиностроение. Энциклопедия. Т. 1–3. Кн. 1. С. 516–524.
9. *Bolotin V.V.* Postcritical dynamics of nonconservative systems // Proc. of the 3rd European Conf. on Struct. Dynamics: EURO DYN'96 Conf. G. Augusti, C. Borri, and P. Spinelli, eds. Rotterdam: Balkema, 1996. P. 357–362.
10. *Bolotin V.V.* Stabilization and destabilization effects in mechanics of deformable systems // Proc. 6th Canad. Congr. Appl. Mech. Vancouver, 1977. V. 1. P. 1–10.
11. *Bolotin V.V., Zhinzher N.I.* Effects of damping on stability of elastic systems subjected to nonconservative forces // Intern. J. Solid Struct. 1969. V. 5. № 9. P. 965–989.
12. *Жинжер Н.И.* Влияние диссипативных сил с неполной диссипацией на устойчивость упругих систем // Изв. РАН. МТТ, 1994. № 1. С. 149–156.
13. *Болотин В.В., Гришко А.А., Петровский А.В.* О влиянии демпфирующих сил на после-критическое поведение существенно непотенциальных систем // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 2. С. 158–167.
14. *Ильюшин А.А., Кийко И.А.* Закон плоских сечений в сверхзвуковой аэродинамике и проблемы панельного флаттера // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 6. С. 138–142.
15. *Kounadis A.N.* On the failure of static stability analyses of nonconservative systems in regions of divergence instability // Intern. J. Solid Struct. 1994. V. 31. № 15. P. 2099–2120.