

УДК 539.3 : 534.1

© 1998 г. М.Ю. РЯЗАНЦЕВА

О ДИСПЕРСИИ ВОЛН В БЕСКОНЕЧНОЙ УПРУГОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЕ

Известно, что распространение волн в упругом теле связано со смещением и деформацией его элементарного объема. Закономерности процесса распространения возмущений в идеально упругой среде описываются системой уравнений, отражающих связь между вектором смещения w , тензорами деформаций ϵ_{ij} и напряжений σ^{ij} , а также плотностью ρ . Однородная, изотропная бесконечно протяженная упругая среда в отличие от акустической и электромагнитной характеризуется двумя типами плоских волн – продольной (волна расширения) и поперечной (волна сдвига).

При наличии границ в линейно упругом твердом теле волновая картина значительно усложняется. Изучению распространения волн в телах простейших геометрических форм, объединенных понятием механического волновода, посвящены многочисленные теоретические и экспериментальные исследования, начало которым положено Рэлеем [1] и Лэмбом [2]. Специальный интерес представляет изучение распространения свободных волн в упругих телах. К настоящему времени задача о распространении свободных волн в бесконечных упругих однородных слоях и цилиндрах полностью изучена на основе трехмерной теории упругости (см., например, [3]). Теоретические исследования обнаружили наличие в упругих волноводах интересных особенностей, которые не имеют аналога для свободных волн в акустических и электромагнитных волноводах. Прежде всего эти особенности связаны с явлением геометрической дисперсии мод в упругих волноводах. Количественно это явление описывается дисперсионным уравнением, которое устанавливает связь между частотой и длиной волны.

Построение точных дисперсионных соотношений, численное их решение и анализ полученных результатов дают исчерпывающую информацию о процессе распространения волн в упругом слое и цилиндре. Кроме того, данная до конца изученная задача оказалась исключительно удобным тестом при построении приближенных теорий упругих пластин и оболочек, поскольку диапазон совпадения дисперсионных кривых, построенных по точной и приближенной теориям, указывает на близость интегральных характеристик, и, следовательно, на диапазон применимости теории.

Переход от однородных упругих волноводов к неоднородным по толщине слоям и цилиндрам связан с резким возрастанием трудностей при исследовании по трехмерной теории упругости. Вместе с тем, следует отметить, что круг практических вопросов, при рассмотрении которых в качестве модели среды используется неоднородное упругое тело, а в качестве модели процесса – гармоническая волна, чрезвычайно широк. Это прежде всего относится к задачам динамики слоистых композитов и к проблемам, изучаемым сейсмологией.

В данной работе на основе уравнений высокочастотных колебаний трехслойных пластин симметричной структуры по толщине решена задача о распространении свободных волн в бесконечной трехслойной пластине. В рамках данной теории описано явление геометрической дисперсии волн при изгибных и продольных свободных колебаниях бесконечной трехслойной пластины.

1. Постановка задачи. Рассмотрим бесконечную упругую пластину постоянной толщины h , отнесенную к декартовой системе координат x, x^α (греческие индексы пробегают значения 1, 2). Координата x направлена перпендикулярно лицевой поверхности пластины; срединная поверхность пластины расположена в плоскости $x=0$. Толщины внешних и внутреннего слоев обозначим h_1 и h_2 соответственно ($2h_1 + h_2 = h$). Материал каждого слоя предполагается однородным и изотропным. Упругие характе-

ристики λ , μ , а также плотность ρ являются четными функциями по x . Условия контакта слоев будем считать идеальными

$$[\sigma^{33}] = 0; [\sigma^{3\alpha}] = 0 \text{ при } x = \pm h/2$$

Движение упругой пластины описывается функциями $w_i(x, x_\alpha, t)$ – проекциями вектора перемещений на оси координат (латинские индексы пробегает значения 1, 2, 3). Функции w_i предполагаются непрерывными и кусочно-дифференцируемыми.

Ставится задача об исследовании свободных колебаний бесконечной упругой трехслойной пластины симметричной структуры по толщине.

В [4, 5] для упругих слоистых пластин симметричного строения по толщине построен уточненный вариант линейной динамической теории, основанный на учете взаимодействий низкочастотных форм колебаний с первыми высокочастотными формами. Известно, что динамическое поведение линейно-упругих пластин описывается двумя независимыми системами уравнений: теория продольных колебаний описывает движения симметричные относительно срединной поверхности, а теория изгибных колебаний описывает несимметричные по толщине моды колебаний¹.

2. Свободные изгибные колебания трехслойной упругой пластины. В рамках линейной теории высокочастотных изгибных колебаний (см. [4]) трехмерный вектор перемещений представляется в виде суммы двумерных перемещений, отвечающих первым двум взаимодействующим ветвям колебаний: низкочастотной или классической ветви, которую обозначим $F_{\perp}(0)$, и первой высокочастотной ветви, описывающей эффект поперечного сдвига ($F_{\parallel}(0)$).

Основные гипотезы теории высокочастотных изгибных колебаний заключаются в следующих формулах

$$w = u + \frac{1}{4} h^2 \Delta u y(\zeta). \quad (2.1)$$

$$w_\alpha = \frac{1}{2} h \chi_\alpha q(\zeta) - \frac{1}{2} h u_{,\alpha} \zeta \quad (\zeta = 2x/h, |\zeta| \leq 1)$$

где запятой в индексах обозначена операция дифференцирования.

Здесь функция u описывает прогиб срединной поверхности согласно классической теории, функции χ_α , имеющие смысл углов поворота поперечного волокна, описывают эффект поперечного сдвига в динамике. В [4] строятся аналитические выражения для кусочно-гладких функций $y(\zeta)$ и $q(\zeta)$. Функция $y(\zeta)$ описывает распределение перемещений по поперечной координате в соответствии с классической теорией, а функция $q(\zeta)$ представляет собой длинноволновую асимптотику собственной формы колебаний для сдвиговой ветви $F_{\parallel}(0)$.

Для определения функций $u(x^\beta, t)$, $\chi_\alpha(x^\beta, t)$ в [4] получены динамические уравнения, учитывающие эффект поперечного сдвига, которые в случае свободных колебаний принимают вид (по повторяющимся нижнему и верхнему индексам производится суммирование):

$$\begin{aligned} \bar{\rho} u_{,n} &= G(\chi_{,\alpha}^\alpha + \Delta u) \\ \frac{1}{4} m h^2 \chi_{\alpha, n} &= \frac{1}{4} h^2 (\bar{\eta} + 2\bar{\lambda}) \chi_{,\alpha\beta}^\beta + \frac{1}{4} h^2 \bar{\eta} \Delta \chi_\alpha - G(\chi_\alpha + u_{,\alpha}) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь осредненные коэффициенты уравнений вычисляются по формулам

$$\bar{\rho} = \langle \rho \rangle, \quad \bar{\eta} = \langle \mu \zeta^2 \rangle, \quad \bar{\lambda} = \langle \mu \sigma \zeta^2 \rangle, \quad \sigma = \lambda / (\lambda + 2\mu)$$

$$m = \frac{\langle \rho q^2 \rangle \langle \mu \zeta^2 \rangle^2}{\langle \mu q \zeta \rangle^2}$$

¹ См.: Горшков А.Г., Рязанцева М.Ю. Динамика слоистых пластин симметричного строения // Отчет НИИ Механики МГУ. 1987. № 3527. 137 с.

где символом $\langle \dots \rangle$ обозначен оператор осреднения

$$\langle \dots \rangle \equiv 1/h \int_{-h/2}^{h/2} \langle \dots \rangle dx = \int_0^1 \langle \dots \rangle d\xi$$

Динамический коэффициент поперечного сдвига G определяется формулой

$$G = \frac{\langle \mu q_{,\xi}^2 \rangle \langle \mu \xi^2 \rangle^2}{\langle \mu q \xi \rangle^2}$$

Перейдем к безразмерным координатам и времени по формулам $\xi^\alpha = 2x^\alpha / h$, $\tau = 2\bar{c} / h$, $\bar{c} = \sqrt{\bar{\mu} / \bar{\rho}}$, где $\bar{\mu}, \bar{\rho}$ имеют смысл средних значений по толщине модуля сдвига и плотности соответственно, \bar{c} – некоторая характерная скорость распространения возмущений в неоднородной упругой среде.

В безразмерном представлении уравнения (2.2) принимают вид

$$\begin{aligned} u_{,\tau\tau} &= \alpha\beta(\chi_{,\alpha}^\alpha + \Delta u) \\ \alpha\rho\chi_{\alpha,\tau\tau} &= -\alpha\beta(\chi_\alpha + u_{,\alpha}) + \kappa[(2\sigma + 1)\chi_{,\alpha\beta}^\beta + \Delta\chi_\alpha] \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь запятой в индексах обозначено частное дифференцирование по безразмерным координатам и времени. Коэффициенты уравнений вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \alpha &= \langle \mu \xi^2 \rangle^2 / \langle \mu q \xi \rangle^2, \quad \beta = \langle \mu q_{,\xi}^2 \rangle / \langle \mu \rangle, \quad \rho = \langle \rho q^2 \rangle / \langle \rho \rangle \\ \kappa &= \langle \mu \xi^2 \rangle / \langle \mu \rangle, \quad \sigma = \langle \mu \sigma \xi^2 \rangle / \langle \mu \xi^2 \rangle \end{aligned}$$

Рассмотрим монохроматическую волну, распространяющуюся вдоль пластины в направлении $\xi^1 = 2x^1/h$. Будем определять значение перемещений в виде

$$\begin{aligned} u &= A \exp[i(k\xi_1 - \theta\tau)], \quad \chi_1 = B \exp[i(k\xi_1 - \theta\tau)] \\ \chi_2 &= C \exp[i(k\xi_1 - \theta\tau)], \quad k = 2K/h, \quad \theta = \omega h / (2\bar{c}) \end{aligned} \quad (2.4)$$

где k – безразмерное волновое число, θ – безразмерная частота (K – волновое число).

Подставляем выражения (2.4) в уравнения (2.3). Условие нетривиальности решения приводит к двум дисперсионным соотношениям, устанавливающим связь между безразмерным волновым числом k и безразмерной частотой θ и отвечающим двум независимым волнам

$$\begin{aligned} AS(0): \chi_2 &= C \exp[i(k\xi_1 - \theta\tau)], \quad u = \chi_1 = 0 \\ F_\perp(0) + F_\parallel(0): (u, \chi_1) &= (A, B) \exp[i(k\xi_1 - \theta\tau)], \quad \chi_2 = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Дисперсионное уравнение для антисимметричной сдвиговой волны $AS(0)$ имеет вид $\rho\theta^2 = \beta + (\kappa/\alpha)k^2$.

При $k = 0$:

$$\theta^2 = \frac{\beta}{\rho} = \frac{\langle \mu q_{,\xi}^2 \rangle \langle \rho \rangle}{\langle \mu \rangle \langle \rho q^2 \rangle} \quad (2.6)$$

где $q = q(\xi)$ – собственная форма колебаний ветви $F_\parallel(0)$. Выражение (2.6) представляет собой математическую формулировку вариационного принципа Рэлея для низшей частоты колебаний. Следовательно, рассматриваемое дисперсионное соотношение двумерной теории правильно описывает собственную частоту колебаний при $k = 0$.

Изгибным волнам с учетом эффекта поперечного сдвига по двумерной теории соответствует дисперсионное уравнение вида

$$(\alpha\beta k^2 - \theta^2) \left[\kappa(2\sigma + 2)k^2 + \alpha\beta - \alpha\rho\theta^2 \right] - \alpha^2\beta^2 k^2 = 0 \quad (2.7)$$

Построим численное решение уравнения (2.7) в диапазоне изменения волновых чисел $0 \leq k < \infty$, рассматривая при этом также мнимые значения волновых чисел.

При $k = 0$ частота $\theta = \beta/\rho$. При $k \rightarrow \infty$ ветви дисперсионных кривых стремятся к следующим асимптотам:

$$\theta = \sqrt{\alpha\beta}k \quad \text{— для классической ветви } F_{\perp}(0);$$

$$\theta = \sqrt{2\kappa(\sigma + 1)/\alpha\rho}k \quad \text{— для ветви } F_{\parallel}(0).$$

Расчеты проводились для трехслойной упругой пластины толщиной $h = 0,02$ м. В первом варианте счета рассматривалась пластина, внешние слои которой изготовлены из алюминиевого сплава (Al_I), а внутренний слой — материала подобного пенополиуретану (ППУ) при толщине внешних слоев $h_1 = 0,1 h$. Во втором варианте рассматривалась пластина, изготовленная из двух алюминиевых сплавов Al_I, Al_{II} при соотношении толщин слоев $h_1 = h_2/2$. Механические характеристики материалов слоев приведены ниже

	λ [МПа]	μ [МПа]	ρ [кг/м ³]	ν
ППУ	15,7	3,92	50	0,4
Al_I	$4,76 \cdot 10^4$	$2,65 \cdot 10^4$	$2,65 \cdot 10^3$	0,32
Al_{II}	$1,67 \cdot 10^3$	$4,00 \cdot 10^3$	$0,50 \cdot 10^3$	0,32

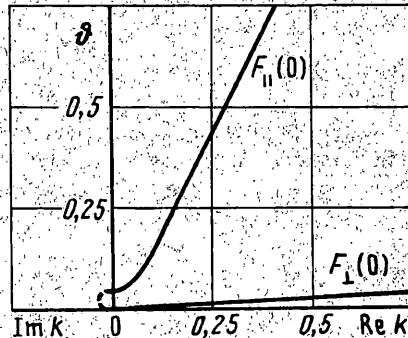
Результаты расчета представлены графически на фиг. 1 для первого случая ($\mu_* = 1,5 \cdot 10^{-4}$, $\mu_* = \mu_2/\mu_1$; $\rho_* = 1,9 \cdot 10^{-2}$, $\rho_* = \rho_2/\rho_1$) и для второго ($\mu_* = 0,15$, $\rho_* = 0,19$) — на фиг. 2.

3. Свободные продольные колебания трехслойной упругой пластины. Свободные продольные колебания бесконечной упругой пластины будем исследовать используя уравнения высокочастотных колебаний, описывающих взаимодействие первых трех ветвей колебаний: классической $L_{\parallel}(0)$ и двух первых высокочастотных ветвей — $L_{\perp}(0)$ и $L_{\parallel}(1)$ [5]. Согласно данной теории искомые перемещения w выражаются через пять двумерных функций, являющихся определяющими функциями модели, по формулам

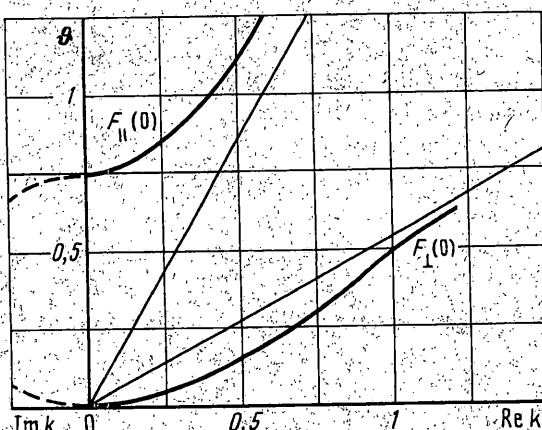
$$w_{\alpha} = u_{\alpha} + \nu_{\alpha} g(\zeta) + \frac{1}{2} h \psi_{,\alpha} \tilde{f}(\zeta) \quad (3.1)$$

$$w = \psi f(\zeta) + \frac{1}{2} h \left(u_{,\alpha}^{\alpha} \phi(\zeta) + \nu_{,\alpha}^{\alpha} \tilde{g}(\zeta) \right)$$

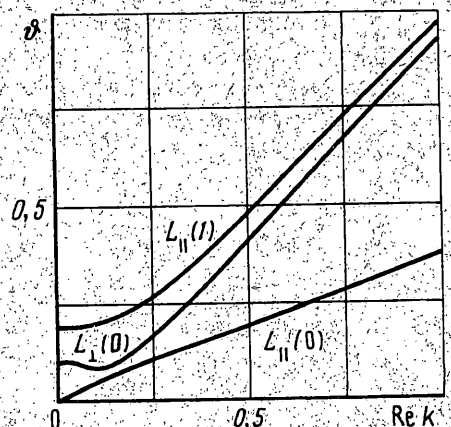
Здесь функции u_{α} имеют смысл средних перемещений поперечного волокна, отвечающих классическим продольным колебаниям ($L_{\parallel}(0)$), которые сопровождаются некоторым изменением длины волокна, определяемым функцией ϕ . Учет основного поперечного обжатия, описываемого функцией f , связан с введением в рассмотрение первой высокочастотной ветви — $L_{\perp}(0)$, для которой амплитуда колебаний определяется функцией ψ . Учет второй высокочастотной ветви колебаний — $L_{\parallel}(1)$ позволяет описать сложное тангенциальное движение, при котором срединная поверхность пластины перемещается в сторону противоположную смещению лицевых поверхностей. Амплитуда этого движения описывается функциями ν_{α} , а распределения перемещений по поперечной координате функциями g и \tilde{g} . Функции $f, \tilde{f}, g, \tilde{g}, \phi$ — суть длинноволновые приближения собственных форм колебаний поперечного волокна во взаимодействующих ветвях колебаний. В [5] приводится вывод аналитических выражений для $f, \tilde{f}, g, \tilde{g}, \phi$. Там же для определения искомых параметров модели



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

построены уравнения продольных высокочастотных колебаний. Применительно к исследованию свободных колебаний бесконечной трехслойной пластины данные уравнения в безразмерной форме принимают вид

$$\begin{aligned}
 u_{\alpha, \tau\tau} &= \Delta u_{\alpha} + (S_1 + 1)u_{\beta\alpha}^{\beta} + R_1 \psi_{\alpha} \\
 \psi_{\tau\tau} &= S_2 \Delta \psi - \bar{\alpha}^2 \psi - R_1 u_{\alpha}^{\alpha} + (R_3 - R_2) v_{\alpha}^{\alpha} \\
 v_{\alpha, \tau\tau} &= S_4 \Delta v_{\alpha} - \bar{\beta}^2 v_{\alpha} + (S_3 + S_4)u_{\beta\alpha}^{\beta} - (R_3 - R_2) \psi_{\alpha}
 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь частотные параметры ветвей колебаний $\bar{\alpha}^2$ и $\bar{\beta}^2$ связаны с собственными частотами ветвей ω_2 (ветвь $L_{\perp}(0)$) и ω_3 (ветвь $L_{\parallel}(1)$) соотношениями

$$\bar{\alpha}^2 = \omega_2^2 \frac{h^2 \bar{\rho}}{4\bar{\mu}}, \quad \bar{\beta}^2 = \omega_3^2 \frac{h^2 \bar{\rho}}{4\bar{\mu}}$$

Осредненные коэффициенты модели определяются формулами

$$\begin{aligned}
 R_1 &= \langle \lambda f_{\zeta} \rangle / \bar{\mu}, \quad R_2 = \langle \lambda f_{\zeta} q \rangle / \bar{\mu}, \quad R_3 = \langle \mu f g_{\zeta} \rangle / \bar{\mu} \\
 S_1 &= k_1 / \bar{\mu} + R_1^2 / \bar{\alpha}, \quad k_1 = \langle \lambda + \lambda \phi_{\zeta} \rangle
 \end{aligned}$$

$$S_2 = \frac{k_2}{\bar{\mu}} - \frac{R_1^2}{\bar{\alpha}} + \frac{(R_2 - R_3)^2}{\bar{\alpha}^2 - \bar{\beta}^2}, \quad k_2 = \langle \mu f^2 + \mu \bar{f}_{,\zeta} \bar{f} - \lambda f_{,\zeta} \bar{f} \rangle$$

$$S_3 = \frac{k_3}{\bar{\mu}} - \frac{(R_2 - R_3)^2}{\bar{\alpha}^2 - \bar{\beta}^2}, \quad k_3 = \langle \lambda g^2 + \lambda g \bar{g}_{,\zeta} - \mu g_{,\zeta} \bar{g} \rangle$$

$$S_4 = \langle \mu g^2 \rangle / \bar{\mu}$$

Дисперсионное уравнение для трех связанных продольных волн (u_1, ψ, v_1) согласно уравнениям (3.2) принимает вид

$$(S_1 k^2 - \theta^2)(S_2 k^2 - \theta^2 + \bar{\alpha}^2)(S_3 k^2 - \theta^2 + \bar{\beta}^2) - (S_3 k^2 - \theta^2 + \bar{\beta}^2) R_1^2 k^2 - (S_1 k^2 - \theta^2) R_{23}^2 k^2 = 0 \quad (3.3)$$

В случае длинноволновых процессов ($k = 0$) собственные частоты колебаний рассматриваемых первых трех ветвей имеют следующие значения:

$\theta = 0$ – классическая ветвь $L_{11}(0)$,

$\theta = \bar{\alpha}$ – первая высокочастотная ветвь $L_{11}(0)$,

$\theta = \bar{\beta}$ – вторая высокочастотная ветвь $L_{11}(1)$.

Таким образом, двумерная теория (3.2) правильно описывает собственные частоты трех первых ветвей колебаний при $(k = 0)$. При $k \rightarrow \infty$ три рассматриваемые ветви колебаний стремятся к прямым асимптотам, уравнения которых имеют вид:

$\theta = \sqrt{S_1} k$ – ветвь $L_{11}(0)$,

$\theta = \sqrt{S_2} k$ – ветвь $L_{11}(0)$,

$\theta = \sqrt{S_3} k$ – ветвь $L_{11}(1)$.

Уравнение (3.3) решалось численно для действительных значений волновых чисел. В качестве примера рассматривалась пластина, внешние слои которой изготовлены из алюминиевого сплава, а наполнитель – из пенополиуретана ($\mu_* = 1,5 \cdot 10^{-4}$, $\rho_* = 1,9 \cdot 10^{-2}$). Результаты счета представлены на фиг. 3.

Вычисления показывают, что вид первых ветвей дисперсионных кривых, построенных с использованием уравнений высокочастотных колебаний для трехслойной упругой пластины подобен дисперсионным кривым однородной упругой пластины, построенным по трехмерной теории упругости (см., например, [3]). В пределе (при $k \rightarrow \infty$) построенные дисперсионные кривые стремятся к прямым асимптотам, что характерно для уравнений гиперболического типа. При значении волнового числа $k = 0$ значения собственных частот колебаний равны значениям, определяемым по трехмерной теории упругости. В частности, данная теория точно предсказывает собственную частоту толщинных колебаний, которую иначе называют частотой среза и частоту колебаний, обусловленных эффектом поперечного сдвига. Данная информация приобретает особую актуальность при исследовании динамического поведения неоднородных по толщине объектов с резким перепадом упругих характеристик.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рэлей Дж. Теория звука. Т. 1. М.: Гостехиздат, 1955. 504 с.
2. Lamb H. On waves in an elastic plate // Proc. London Math. Soc. 1889/1890. V. 21. № 360. P. 70–90.
3. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. 283 с.
4. Рязанцева М.Ю. Изгибные колебания трехслойных пластин симметричного строения // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 3. С. 153–159.
5. Рязанцева М.Ю. Высокочастотные колебания трехслойных пластин симметричного строения // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 5. С. 175–181.

Москва

Поступила в редакцию
21.V.1997