

УДК 539.3:534.1

© 1998 г. А.В. НЕТРЕБКО, С.В. НОВОТНЫЙ, Ю.А. СОЗОНЕНКО

# **О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК МЕТОДОМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ**

Задачам динамики тонкостенных оболочек и конструкций посвящено достаточно много работ, обзор которых содержится в [1, 2]. В качестве уравнений, описывающих распространение волн в оболочке, в данной работе выбраны уравнения типа Тимошенко [3], которые неоднократно решались численно различными разностными методами (см., например [4]). Указанные методы имеют ряд недостатков ("размазывание" фронта волны, накопление ошибок при распространении волны на большие расстояния). В данной работе с помощью преобразования Лапласа по времени находится точное аналитическое решение в изображениях, а оригинал вычисляется путем численного интегрирования интеграла обращения на комплексной плоскости.

1. Рассматривается система уравнений типа Тимошенко для круговой цилиндрической оболочки в случае осевой симметрии и отсутствия внешних сил на боковых поверхностях [3]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\mu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad c_p = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\mu^2)}} \quad (1.1)$$

$$k^2 \frac{1-\mu}{2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\mu}{R} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{w}{R^2} = \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - 6k^2 \frac{1-\mu}{h^2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \psi \right) = \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (1.3)$$

Здесь  $u$  – продольное перемещение,  $w$  – прогиб,  $\psi$  – угол поворота нормали к срединной поверхности,  $x$  – координата в направлении оси оболочки,  $t$  – время ( $t \geq 0$ ),  $R$  – радиус срединной поверхности,  $h$  – толщина оболочки,  $\mu$  – коэффициент Пуассона,  $c_p$  – скорость распространения продольных волн в оболочке,  $E$  – модуль Юнга,  $\rho$  – плотность материала оболочки,  $k^2$  – поправочный коэффициент для волн сдвига.

Начальные условия для неизвестных функций и их первых производных по времени выбирались нулевыми. Варианты граничных условий будут обсуждены в дальнейшем изложении.

Применяя к уравнениям (1.1)–(1.3) преобразование Лапласа по времени

$$f^*(x, s) = \int_0^\infty e^{-st} f(x, t) dt$$

получим

$$\frac{d^2 u^*}{dx^2} - \frac{\mu}{R} \frac{dw^*}{dx} = \frac{s^2}{c_p^2} u^* \quad (1.4)$$

$$k^2 \frac{1-\mu}{2} \left( \frac{d^2 w^*}{dx^2} + \frac{d\psi^*}{dx} \right) + \frac{\mu}{R} \frac{du^*}{dx} - \frac{w^*}{R^2} = \frac{s^2}{c_p^2} w^* \quad (1.5)$$

$$\frac{d^2 \psi^*}{dx^2} - 6k^2 \frac{1-\mu}{h^2} \left( \frac{dw^*}{dx} + \psi^* \right) = \frac{s^2}{c_p^2} \psi^* \quad (1.6)$$

Соотношения (1.4)–(1.6) являются системой обыкновенных дифференциальных уравнений, которая кроме вещественных коэффициентов содержит комплексный параметр  $s$ . Частное решение этой системы ищем в виде:  $u^* = Ae^{\lambda x}$ ,  $w^* = Be^{\lambda x}$ ,  $\psi^* = De^{\lambda x}$ .

После сокращения на  $e^{\lambda x}$  получаем алгебраическую систему для коэффициентов  $A, B, D$ :

$$\lambda^2 A - \frac{\mu}{R} \lambda B = \frac{s^2}{c_p^2} A \quad (1.7)$$

$$k^2 \frac{1-\mu}{2} (\lambda^2 B + \lambda D) + \frac{\mu}{R} \lambda A - \frac{1}{R^2} B = \frac{s^2}{c_p^2} B \quad (1.8)$$

$$\lambda^2 D - 6k^2 \frac{1-\mu}{h^2} (\lambda B + D) = \frac{s^2}{c_p^2} D \quad (1.9)$$

Для существования нетривиального решения системы однородных уравнений (1.7)–(1.9) необходимо равенство нулю ее определителя

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 - \frac{s^2}{c_p^2} & -\frac{\mu}{R} \lambda & 0 \\ \frac{\mu}{R} \lambda & k^2 \frac{1-\mu}{2} \lambda^2 - \frac{1}{R^2} - \frac{s^2}{c_p^2} & k^2 \frac{1-\mu}{2} \lambda \\ 0 & -6k^2 \frac{1-\mu}{h^2} \lambda & \lambda^2 - 6k^2 \frac{1-\mu}{h^2} - \frac{s^2}{c_p^2} \end{vmatrix} = 0 \quad (1.10)$$

При выполнении соотношения (1.10) из уравнений (1.7) и (1.9) коэффициенты  $B$  и  $D$  можно выразить через  $A$ :

$$B = \frac{\lambda^2 - s^2 / c_p^2}{\mu \lambda / R} A, \quad D = \frac{6k^2 (1-\mu) / h^2}{\lambda^2 - 6k^2 (1-\mu) / h^2 - s^2 / c_p^2} \frac{\lambda^2 - s^2 / c_p^2}{\mu / R} A \quad (1.11)$$

Определитель, стоящий в левой части уравнения (1.10), в развернутом виде явля-

ется многочленом шестой степени относительно  $\lambda$ ,  $s$ :

$$k^2 \frac{1-\mu}{2} \lambda^6 - \left[ \left( 2k^2 \frac{1-\mu}{2} + 1 \right) \left( \frac{s}{c_p} \right)^2 + \frac{1-\mu^2}{R^2} \right] \lambda^4 + \\ + \left[ \left( 2 + k^2 \frac{1-\mu}{2} \right) \left( \frac{s}{c_p} \right)^4 + \left( 6k^2 \frac{1-\mu}{h^2} + \frac{2-\mu^2}{R^2} \right) \left( \frac{s}{c_p} \right)^2 + 6k^2 \frac{1-\mu}{h^2} \frac{1-\mu^2}{R^2} \right] \lambda^2 - \\ - \left( \frac{s}{c_p} \right)^6 - \left( \frac{1}{R^2} + 6k^2 \frac{1-\mu}{h^2} \right) \left( \frac{s}{c_p} \right)^4 - 6k^2 \frac{1-\mu}{h^2} \frac{1}{R^2} \left( \frac{s}{c_p} \right)^2 = 0 \quad (1.12)$$

Таким образом, уравнение (1.12) определяет шесть функций  $\lambda_n(s)$  ( $n = 1, 2, \dots, 6$ ), при помощи которых строится общее решение системы (1.4)–(1.6):

$$u^* = \sum_{n=1}^6 A_n e^{\lambda_n x}, \quad w^* = \sum_{n=1}^6 B_n e^{\lambda_n x}, \quad \psi^* = \sum_{n=1}^6 D_n e^{\lambda_n x} \quad (1.13)$$

Здесь коэффициенты  $B_n$  и  $D_n$  выражаются через  $A_n$  по формулам (1.11) при  $\lambda = \lambda_n$ , а коэффициенты  $A_n$  подлежат определению из граничных условий.

Заметим, что функции  $\lambda_n(s)$  можно рассматривать как различные ветви многозначной функции  $\lambda(s)$ , удовлетворяющей (1.12).

2. Проведем исследование уравнения (1.12) и определяемых им функций  $\lambda_n(s)$ . Определитель из соотношения (1.10) был получен при исследовании гармонических волн в бесконечно длинной цилиндрической оболочке [4] и исследован в [5]. Заметим, что в обозначениях данной работы анализ, проведенный в [5], соответствует чисто мнимым значениям  $\lambda$  и  $s$ .

Путем простых алгебраических преобразований уравнение (1.12) приводится к виду:

$$k^2 \bar{\mu} (\omega - z)^3 - (1 - k^2 \bar{\mu}) (\omega - z)^2 z - (1 - \mu^2) (\omega - z)^2 + (\mu^2 + 12k^2 \bar{\mu} R^2 / h^2) (\omega - z) z + \\ + 12k^2 \bar{\mu} (1 - \mu^2) (R^2 / h^2) (\omega - z) - 12k^2 \bar{\mu} (R^2 / h^2) \mu^2 z = 0 \quad (2.1)$$

$$\omega = (\lambda R)^2, \quad z = (Rs / c_p)^2, \quad \bar{\mu} = (1 - \mu) / 2$$

Заметим, что в частном случае  $\mu = 0$  уравнение (2.1) имеет корень  $\omega = z$ , а два других корня определяются из квадратного уравнения. В общем случае сделаем замену переменных

$$\omega = a \operatorname{ch}^2 \alpha, \quad z = a \operatorname{sh}^2 \alpha \quad (2.2)$$

С учетом равенства  $\omega - z = a$  получаем решение уравнения (2.1) в параметрической форме:

$$\omega = a \frac{a^2 - (1 + 12k^2 \bar{\mu} R^2 / h^2) a + 12k^2 \bar{\mu} R^2 / h^2}{(1 - k^2 \bar{\mu}) a^2 - (\mu^2 + 12k^2 \bar{\mu} R^2 / h^2) a + 12k^2 \bar{\mu} (R^2 / h^2) \mu^2} \quad (2.3)$$

$$z = a \frac{k^2 \bar{\mu} a^2 - (1 - \mu^2) a + 12k^2 \bar{\mu} (1 - \mu^2) R^2 / h^2}{(1 - k^2 \bar{\mu}) a^2 - (\mu^2 + 12k^2 \bar{\mu} R^2 / h^2) a + 12k^2 \bar{\mu} (R^2 / h^2) \mu^2} \quad (2.4)$$

Здесь  $a$  — произвольный комплексный параметр. Формулы (2.3), (2.4) удобны для исследования поведения функции  $\omega(z)$  в окрестностях некоторых характерных точек  $z$ . В силу того, что  $\omega(z)$  удовлетворяет кубичному уравнению (2.1), в каждой рас-

смаатриваемой окрестности должно быть три ветви функции  $\omega(z)$ , а при переходе к старым переменным – шесть ветвей  $\lambda_n(s)$ . Например, анализ поведения функции  $\omega(z)$  при  $z \rightarrow \infty$  сводится к нахождению асимптотики правых частей формул (2.3), (2.4) при  $a \rightarrow \infty$ ,  $a \rightarrow a_1$  и  $a \rightarrow a_2$ , где  $a_1, a_2$  – корни общего знаменателя в этих формулах. Не останавливаясь на выкладках, приведем результаты, которые получаются после исключения параметра  $a$  в указанных трех случаях:

$$\omega \sim z / (k^2 \bar{\mu}), \quad \omega \sim z + a_1, \quad \omega \sim z + a_2 \quad (2.5)$$

Заметим, что по основному предположению теории оболочек  $h / R \ll 1$ . При  $h/R \rightarrow 0$ :

$$a_1 \sim \frac{12k^2 \bar{\mu} R^2 / h^2}{1 - k^2 \bar{\mu}}, \quad a_2 \sim \mu^2 \quad (2.6)$$

Переходя в формулах (2.5) к старым переменным получаем асимптотические формулы для шести ветвей  $\lambda_n(s)$  при  $s \rightarrow \infty$

$$\lambda \sim \pm \frac{s}{c_p \sqrt{k^2 \bar{\mu}}}, \quad \lambda \sim \pm \sqrt{\frac{s^2}{c_p^2} + \frac{a_{1,2}}{R^2}} \quad (2.7)$$

Отметим, что согласно уравнению (1.2)  $c_s = c_p \sqrt{k^2 \bar{\mu}}$  есть скорость распространения изгибных волн.

Аналогичным образом находим, что значение  $z = 0$  достигается при  $a \rightarrow 0$ ,  $a \rightarrow a_3$ ,  $a \rightarrow a_4$ , где  $a_3, a_4$  – корни квадратного уравнения:

$$k^2 \bar{\mu} a^2 - (1 - \mu^2)a + 12k^2 \bar{\mu}(1 - \mu^2)R^2 / h^2 = 0 \quad (2.8)$$

При  $h/R \rightarrow 0$  получаем  $a_{3,4} \sim \pm \sqrt{12(1 - \mu^2)}(R/h)i$ , где  $i$  – мнимая единица. При  $s \rightarrow 0$  из формул (2.3), (2.4) имеем асимптотические оценки:

$$\lambda \sim \pm \frac{s}{c}, \quad \lambda \sim \pm \sqrt{\left(\frac{s}{c_p}\right)^2 + \frac{a_{3,4}}{R^2}} \quad (2.9)$$

Здесь  $c = \sqrt{E/\rho}$  – скорость распространения продольных волн в стержнях.

Из формулы (2.4) величина  $z = -1$  соответствует значениям  $a = 1$ ,  $a \sim \pm 2\sqrt{3}\bar{\mu}R/h$ . С учетом формулы (2.3) в окрестности точки  $z = -1$  оценки функции  $\omega$  соответственно имеют вид

$$\omega \sim z + 1, \quad \omega \sim z \pm 2\sqrt{3}\bar{\mu}R/h \quad (2.10)$$

После перехода к старым переменным в окрестности  $s = \pm(c_p/R)i$ :

$$\lambda \sim \pm \sqrt{\frac{s^2}{c_p^2} + \frac{1}{R^2}}, \quad \lambda \sim \pm \sqrt{\frac{s^2}{c_p^2} \pm \frac{2\sqrt{3}}{Rh}} \quad (2.11)$$

В первой формуле (2.11) при  $s = \pm(c_p/R)i$  обращается в нуль подкоренное выражение. Следовательно, эти точки являются точками ветвления для двух ветвей функции  $\lambda(s)$ . При этом остальные четыре ветви в данных точках аналитичны. Аналогичным образом можно установить, что точки  $s = \pm\sqrt{12k^2 \bar{\mu}}(c_p/h)i$  также являются точками ветвления для двух ветвей  $\lambda(s)$ .

Из формулы (2.3) видно, что точек ветвления, связанных с обращением  $\omega(z)$  в нуль, больше нет (при  $a = 0$  по формуле (2.9) функция  $\lambda(s)$  аналитична).

Точки ветвления другого рода могут возникать в случае кратных корней уравнения (2.1). Каждый кратный корень уравнения (2.1) одновременно является корнем уравнения, получающегося при дифференцировании уравнения (2.1) по  $\omega$ :

$$3k^2\bar{\mu}(\omega - z)^2 - 2(1 - k^2\bar{\mu})(\omega - z)z - 2(1 - \mu^2)(\omega - z) + (\mu^2 + 12k^2\bar{\mu}R^2/h^2)z + 12k^2\bar{\mu}(1 - \mu^2)R^2/h^2 = 0 \quad (2.12)$$

Решая уравнение (2.1) совместно с уравнением (2.12) с помощью замены переменных (2.2) получаем уравнение четвертой степени для параметра  $a$ :

$$k^2\bar{\mu}(1 - k^2\bar{\mu})a^4 - 2k^2\bar{\mu}(\mu^2 + 12k^2\bar{\mu}R^2/h^2)a^3 + [\mu^2(1 - \mu^2) + 24(k^2\bar{\mu})^2\mu^2R^2/h^2 + 12(k^2\bar{\mu})^2R^2/h^2]a^2 - 24k^2\bar{\mu}\mu^2(1 - \mu^2)(R^2/h^2)a + (12k^2\bar{\mu})^2\mu^2(1 - \mu^2)R^4/h^4 = 0 \quad (2.13)$$

Таким образом многозначная функция  $\lambda(s)$  в общем случае имеет 12 точек ветвления. При  $s \neq \infty$  особых точек других видов нет, что легко установить записав формулы Кардано непосредственно для корней уравнения (1.12). Поэтому при реализации общего решения (1.13) необходимо выделить однозначные ветви  $\lambda_n(s)$  путем проведения на плоскости  $s$  соответствующих разрезов. Не останавливаясь на этом вопросе, дадим оценки положения точек ветвления, определяемых уравнением (2.13).

Первые члены асимптотических разложений при  $h/R \rightarrow 0$  для корней уравнения (2.13) имеют вид

$$a_5 = 24 \frac{k^2\bar{\mu}}{1 - k^2\bar{\mu}} \frac{R^2}{h^2}, \quad a_6 = \sqrt[3]{6\mu^2(1 - \mu^2)} \frac{R^2}{h^2}, \quad a_{7,8} = \left(-\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \sqrt[3]{6\mu^2(1 - \mu^2)} \frac{R^2}{h^2} \quad (2.14)$$

В случае  $a = a_5$  соответствующая оценка для координаты точки ветвления:

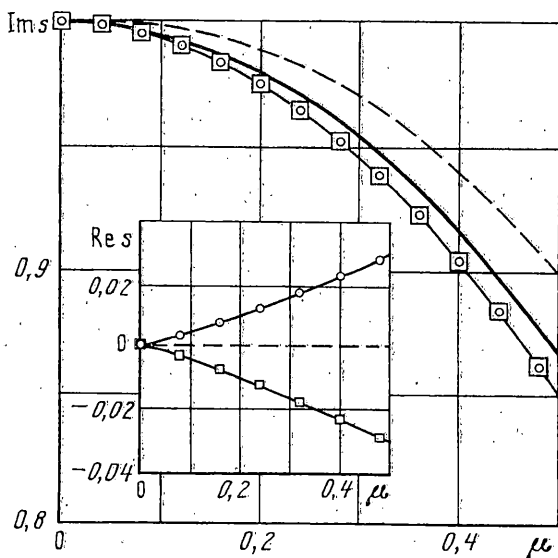
$$s = \pm 4\sqrt{3} \frac{k^2\bar{\mu}}{1 - k^2\bar{\mu}} \frac{c_p}{h} \quad (2.15)$$

Для корней  $a_6, a_7, a_8$  первые члены асимптотических разложений совпадают (в обозначениях п. 4):

$$s = \pm i\sqrt{1 - \mu^2} \quad (2.16)$$

Для уточнения положения соответствующих точек ветвления были непосредственно вычислены корни дискриминанта бикубического уравнения (1.12) во всем реальном диапазоне изменения  $\mu$  и  $h/R$ . На фиг. 1 приведены графики координат особых точек в окрестности  $s = i\sqrt{1 - \mu^2}$  при  $h/R = 0,1$  и  $h/R = 10^{-6}$  в зависимости от  $\mu$ . При  $h/R = 10^{-6}$  все три особые точки в пределах точности вычислений определяются формулой (2.16) ( $\text{Im } s = \sqrt{1 - \mu^2}$  — сплошная кривая,  $\text{Re } s = 0$  — штриховая кривая). При  $h/R = 0,1$  для двух особых точек значения  $\text{Im } s$  совпадают, а значения  $\text{Re } s$  имеют противоположные знаки (кривые с маркерами). Третья особая точка лежит на мнимой оси (пунктирные линии).

3. В качестве примера решения системы уравнений (1.1)–(1.3) при конкретных граничных условиях рассмотрим задачу о нормальном ударе торца цилиндрической оболочки по полупространству, заполненному сжимаемой жидкостью с акустическим за-



Фиг. 1

коном сжимаемости. Предполагалось, что торец оболочки закрыт жестким диском, массой которого для простоты пренебрегалось. Таким образом, гидродинамические силы, действующие на торец оболочки в данной постановке можно определить из известной задачи об ударе диска о поверхность сжимаемой жидкости [6]. В первом приближении торможение торцевого диска в процессе удара не учитывалось, а давление на диске бралось по приближенной формуле

$$p(t) = \rho_0 c_0 v_0 \left( 1 - \frac{c_0 t}{R} \right) \left[ \eta(t) - \eta \left( t - \frac{R}{c_0} \right) \right] \quad (3.1)$$

Здесь  $\rho_0$  — плотность жидкости,  $c_0$  — скорость звука в жидкости,  $v_0$  — скорость удара торца по поверхности жидкости,  $\eta$  — единичная функция Хевисайда. Формула (3.1) соответствует начальной стадии удара. С помощью формулы для осевой силы в оболочке [3]  $N_x = \rho c_p^2 h (\partial u / \partial x - \mu w / R)$  получаем граничное условие на торце оболочки

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \mu \frac{w}{R} = - \frac{R}{2 \rho c_p^2 h} p(t) \quad (x=0) \quad (3.2)$$

Остальные граничные условия определяются характером соединения торцевого диска и оболочки. Рассмотрим условия

$$w = \psi = 0 \quad (x=0) \quad (3.3)$$

В результате требуется решить уравнения (1.1)–(1.3) для  $x > 0$  при нулевых начальных и граничных условиях (3.2), (3.3).

После преобразования Лапласа граничные условия имеют вид

$$\frac{du^*}{dx} - \mu \frac{w^*}{R} = - \frac{R}{2 \rho c_p^2 h} p^*(s) \quad (x=0) \quad (3.4)$$

Здесь в соответствии с формулой (3.1)

$$p^*(s) = \rho_0 c_0 \nu_0 \left[ \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} \frac{c_0}{R} (1 - e^{-sR/c_0}) \right] \quad (3.5)$$

$$w^* = \psi^* = 0 \quad (x=0)$$

Из проведенного выше анализа следует, что можно выбрать такие три ветви функций  $\lambda_n(s)$  ( $n = 1, 2, 3$ ), что  $\operatorname{Re} \lambda_n(s) < 0$  при  $\operatorname{Re} s > 0$ . Оставляя в общем решении (1.13) только члены соответствующие этим ветвям, из формул (1.11), (3.4), (3.5) получим

$$\sum_{n=1}^3 \lambda_n A_n = -\frac{R}{2\rho c_p^2 h} p^*, \quad \sum_{n=1}^3 \frac{\lambda_n^2 - s^2 / c_p^2}{\lambda_n} A_n = 0, \quad \sum_{n=1}^3 \frac{\lambda_n^2 - s^2 / c_p^2}{\lambda_n^2 - 6k^2(1-\mu)/h^2 - s^2 / c_p^2} A_n = 0$$

Решая систему (3.6) и используя общее решение (1.13), получаем решение поставленной задачи в изображениях

$$u^* = -\frac{R p^*}{2\rho c_p^2 h} \frac{\det \beta_{mn}}{\det \alpha_{mn}}, \quad w^* = -\frac{R^2 p^*}{2\rho c_p^2 h \mu} \frac{\det \gamma_{mn}}{\det \alpha_{mn}} \quad (3.7)$$

$$\psi^* = -\frac{6k^2(1-\mu)R^2 p^* / h^2}{2\rho c_p^2 h \mu} \frac{\det \delta_{mn}}{\det \alpha_{mn}} \quad (m, n = 1, 2, 3)$$

$$\alpha_{1n} = \lambda_n, \quad \alpha_{2n} = \frac{\lambda_n^2 - s^2 / c_p^2}{\lambda_n}, \quad \alpha_{3n} = \frac{\lambda_n^2 - s^2 / c_p^2}{\lambda_n^2 - 6k^2(1-\mu)/h^2 - s^2 / c_p^2},$$

$$\beta_{1n} = e^{\lambda_n x}, \quad \beta_{2n} = \alpha_{2n}, \quad \beta_{3n} = \alpha_{3n},$$

$$\gamma_{1n} = \alpha_{2n} e^{\lambda_n x}, \quad \gamma_{2n} = \alpha_{2n}, \quad \gamma_{3n} = \alpha_{3n},$$

$$\delta_{1n} = \alpha_{3n} e^{\lambda_n x}, \quad \delta_{2n} = \alpha_{2n}, \quad \delta_{3n} = \alpha_{3n}$$

Заменим граничное условие (3.3) на условие

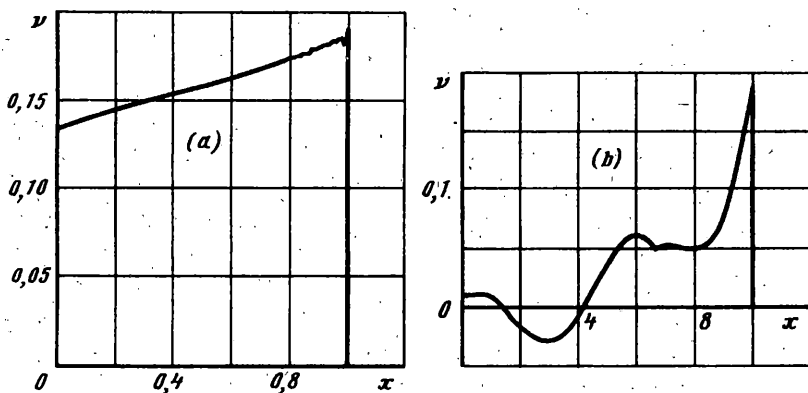
$$w = \partial w / \partial x = 0 \quad (x=0) \quad (3.8)$$

При постановке такого условия для уравнений типа Тимошенко возникает вопрос о корректности задачи, так как на функцию  $\psi$  на границе нет условия. По этой причине при счете разностными методами подобные условия не ставились. При решении методом интегральных преобразований для определения функций  $A_n$  в данном случае достаточно любых трех независимых граничных условий. Разумеется полученные при этом изображения могут и не иметь оригиналов, т.е. в дальнейшем требуется соответствующая проверка.

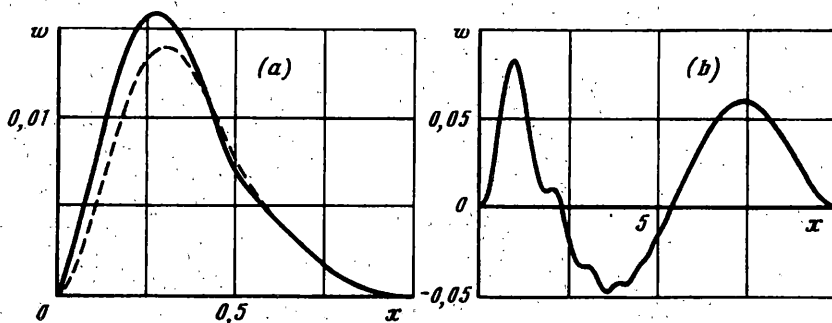
В случае граничного условия (3.8) в формулах (3.7):

$$\alpha_{3n} = \lambda_n^2 - \frac{s^2}{c_p^2}, \quad \delta_{1n} = \frac{\lambda_n^2 - s^2 / c_p^2}{\lambda_n^2 - 6k^2(1-\mu)/h^2 - s^2 / c_p^2} e^{\lambda_n x} \quad (3.9)$$

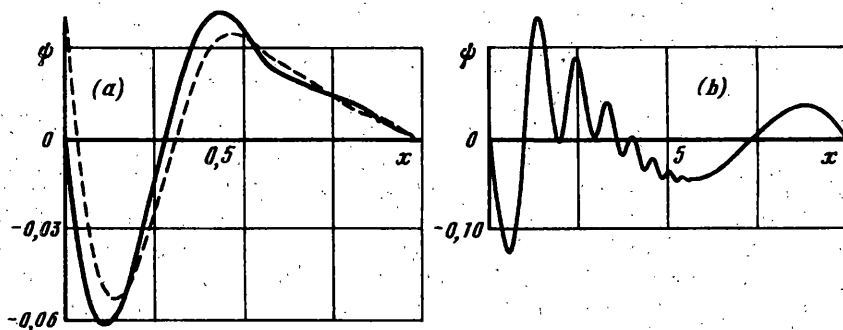
Изображения (3.7), (3.9) не меняются при перестановке функций  $\lambda_n(s)$ . Поэтому для этих решений при обходе особых точек  $\lambda(s)$ , определяемых уравнением (2.13), не происходит перехода с одной ветви на другую. Неопределенность типа 0/0 устраняется предельным переходом. Особыми точками для полученных изображений являются, рассмотренные выше, точки  $s = \pm(c_p/R)i$  и  $s = \pm\sqrt{12k^2\mu}(c_p/h)i$ , при обходе которых нарушается условие  $\operatorname{Re} s < 0$ . Таким образом, решения (3.7), (3.9) аналитичны при  $\operatorname{Re} s > 0$ .



Фиг. 2



Фиг. 3



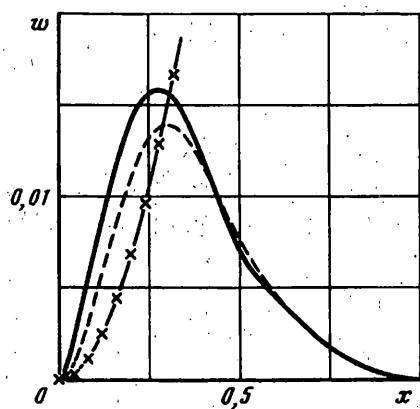
Фиг. 4

Пользуясь асимптотическими оценками (2.7) при  $s \rightarrow \infty$ , имеем:

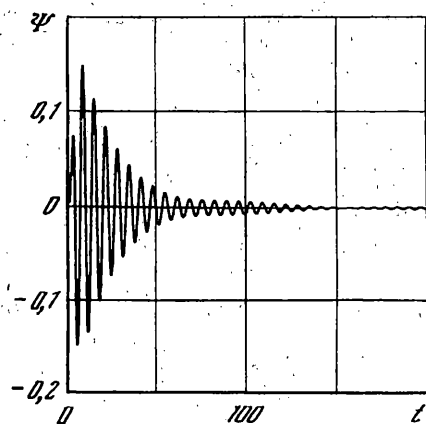
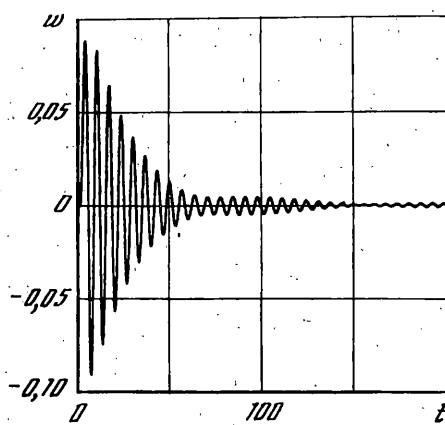
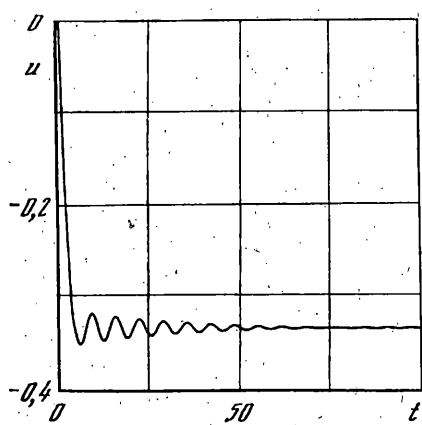
$$u^* \sim \frac{Rp^*}{2\rho c_p h s} \exp(-sx / c_p) \quad (3.10)$$

Оценка справедлива для обоих вариантов граничных условий (3.3) и (3.8). Формула (3.10) показывает, что полученные изображения имеют оригиналы и дает оценку оригинала при малых значениях  $t - x / c_p \geq 0$ :

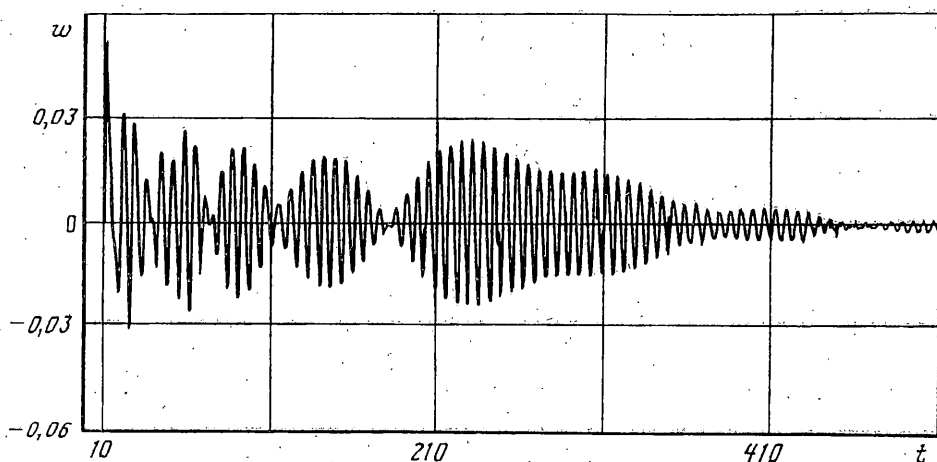
$$\frac{\partial u}{\partial t} \sim \frac{R}{2\rho c_p h} p \left( t - \frac{x}{c_p} \right) \quad (3.11)$$



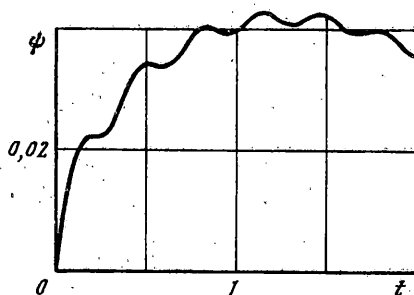
Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 8

(стержневое решение, но с оболочечной скоростью распространения продольных волн).

Аналогичным образом с помощью оценок (2.9) для  $p(t)$  из соотношения (3.1) находим пределы

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = \lim_{s \rightarrow 0} su^* = \frac{1}{4} \frac{\rho_0 \nu_0}{\rho c} \frac{R^2}{h} \quad (3.12)$$

Здесь не доказано существование первого предела. Легко установить, что формула (3.12) совпадает с результатами стержневой теории.

4. Оригиналы искомых функций вычислялись путем численного интегрирования методом Филона [7, 8] интеграла обращения преобразования Лапласа по прямой  $\text{Re } s = s_0$ , где согласно предыдущему анализу особых точек  $s_0 > 0$ .

Процесс интегрирования состоял в следующем. Сначала вычислялась частичная интегральная сумма на отрезке  $[0, b]$  (в расчетах принималось  $b = 1$ ). Затем на отрезке  $[b, b + 2b]$  и т.д. Процесс останавливался при выполнении одного из двух условий: значение интеграла на текущем отрезке становилось меньше заданного  $\epsilon$  (в расчетах  $\epsilon = 10^{-7}$ ); относительное приращение становилось меньше  $\epsilon$ . Значение произвольной константы  $s_0$  выбиралось из условия  $s_0 t = 1$ .

Бикубическое уравнение (1.12) решалось по формулам Кардано. Значение числовых параметров:  $\mu = 1/3$ ;  $k^2 = 0,87$ ;  $h/R = 0,1$ ;  $c_p/c_0 = 10/3$ ;  $\rho_0 c_0 \nu_0 / (2\rho c_p^2 h / R) = 0,1875$ . Расчеты велись в безразмерных переменных:  $\bar{t} = c_p t / R$ ,  $\bar{x} = x / R$ ,  $\bar{s} = R s / c_p$ ,

$\bar{\lambda} = \lambda R$ ,  $\bar{u} = u / R$ ,  $\bar{w} = w / R$ ,  $\bar{N}_x = N_x (\rho c_p^2 h)$  (черточки в дальнейшем опущены). На фиг. 2–4 изображены графики величин  $u = du/dx$ ,  $w$ ,  $\psi$  в зависимости от  $x$  при  $t = 1$  и  $t = 10$  для граничных условий (3.3) – сплошная линия и (3.8) – штриховая линия. На фронте волны  $u = 0,1875$  (фиг. 2), что соответствует формуле (3.11) в выбранных безразмерных переменных. На фиг. 2 сплошные и штриховые линии совпадают сразу, а на фиг. 3, 4 совпадение начинается с некоторого момента времени. На фиг. 5 совмещены графики при  $t = 1$  (сплошная и штриховая линии, соответственно для условий (3.3) и (3.8)) и  $t = 10$ , когда эти графики совпали (кривая с маркерами). Из фиг. 4, 5 видно, что начиная с некоторого  $t$  при  $x = 0$  для обоих граничных условий  $w = dw/dx = \psi = 0$ . На фиг. 6 приведены графики величин  $u$ ,  $w$ ,  $\psi$  в зависимости от  $t$  при  $x = 1$ . Предельное значение смещения  $u$  соответствует формуле (3.12). Колебательный характер графиков связан с наличием особых точек  $s = \pm(c_p / R)i$  (см. (2.11)). В данных безразмерных переменных период этих колебаний равен  $2\pi$ . На фиг. 7 приведен график прогибов  $w$  при  $x = 10$ , который показывает, что характер колебаний существенно зависит от  $x$ . На фиг. 8 ( $x = 0$ ) видны колебания, соответствующие особым точкам  $s = \pm\sqrt{12k^2\mu}(c_p / h)i$ .

Авторы выражают благодарность Л.Е. Пекуровскому, программа которого использована при численном обращении преобразования Лапласа.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 95-01-00281).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вестяк А.В., Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Нестационарное взаимодействие деформируемых тел с окружающей средой. Итоги науки и техники. сер. Механика деформируемого твердого тела. М.: ВИНТИ, 1983. Т. 5. С. 69–148.
2. Гузь А.Н., Кубенко В.Д. Теория нестационарной аэрогидроупругости оболочек. Киев: Наукова думка, 1982. 399 с. (Методы расчета оболочек. Т. 5).
3. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
4. Чжоу Бей-чжи. Расчет осесимметричных движений цилиндрических оболочек по методу характеристик. // Ракетн. техн. и космонавтика. 1968. Т. 6. № 8. С. 64–69.
5. Herrmann G., Mirsky I. Three-dimensional and shell-theory analysis of axially symmetric motions of cylinders // J. Appl. Mech. 1956. V. 23. № 4. P. 563–568.
6. Поручиков В.Б. Удар диска по поверхности идеальной сжимаемой жидкости // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 4. С. 797–800.
7. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Наука, 1987. 598 с.
8. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулдер К. Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1980. 279 с.

Москва

Поступила в редакцию  
19.XII.1996