

УДК 539.3:534.1

© 1998 г. Ф.Н. ШКЛЯРЧУК

**К РАСЧЕТУ ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ  
И УСТОЙЧИВОСТИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ  
УПРУГИХ СИСТЕМ**

При расчете деформированного состояния и устойчивости геометрически нелинейных упругих систем обычно используются соотношения для конечных деформаций или для деформаций удлинений и сдвигов в квадратичном приближении относительно перемещений. Конечные деформации представляют половину приращения квадрата длины элемента тела и отличаются от деформаций удлинений и сдвигов; им соответствуют обобщенные напряжения и поэтому они строго несовместимы с законом Гука для истинных напряжений. Их основным достоинством является то, что они приближенно могут представлять малые деформации удлинений и сдвигов при любых углах поворота элементов тела. Соотношения для деформаций удлинений и сдвигов в квадратичном приближении относительно перемещений, отличающиеся от конечных деформаций некоторыми нелинейными членами, строго соответствуют истинным напряжениям, но справедливы только при умеренных углах поворота элементов тела.

В работе на простых примерах выполнены оценки точности тех и других нелинейных соотношений для деформаций при расчете деформированного состояния и устойчивости упругих систем.

**Введение.** Деформированное состояние упругих тел при больших перемещениях и углах поворота обычно характеризуется компонентами тензора конечных деформаций  $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{xy}, \epsilon_{yz}, \epsilon_{zx}$ , которые представляют половину приращения квадрата длины элемента тела и в декартовой системе координат  $Oxyz$  записываются в виде [1]:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \\ 2\epsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.1)$$

-----  
( $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x, \quad u \rightarrow v \rightarrow w \rightarrow u$ )

где  $u, v, w$  — перемещения в направлении осей  $x, y, z$ , соответственно.

Для геометрически нелинейных упругих систем из конструкционных материалов при малых деформациях удлинения и сдвига обычно используется закон Гука как в линейной теории упругости:

$$\sigma = C \epsilon$$

$$\epsilon = [\epsilon_{xx} \epsilon_{yy} \epsilon_{zz} 2\epsilon_{xy} 2\epsilon_{yz} 2\epsilon_{zx}]^T, \quad \sigma = [\sigma_x \sigma_y \sigma_z \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx}]^T \quad (1.2)$$

где  $C$  — симметричная матрица коэффициентов упругости;  $\sigma_x, \dots, \tau_{zx}$  — компоненты нормальных и касательных напряжений, отнесенных к единице площади до деформации.

Вариация удельной потенциальной энергии тела при конечных деформациях записывается в виде [1, 2]:

$$\delta W = \delta \epsilon^T \sigma^* \quad (1.3)$$

где  $\sigma^* = [\sigma_{xx}^* \sigma_{yy}^* \sigma_{zz}^* \sigma_{xy}^* \sigma_{yz}^* \sigma_{zx}^*]^T$  – вектор обобщенных напряжений, соответствующих вектору конечных деформаций  $\epsilon$ ;  $\sigma_{xx}^*, \dots, \sigma_{zx}^*$  отличаются от истинных нормальных и касательных напряжений  $\sigma_x, \dots, \tau_{zx}$ . При малых деформациях это различие является количественно несущественным. Тем не менее использование закона Гука (1.2) для связи истинных напряжений с конечными деформациями (1.1) и замена обобщенных напряжений истинными напряжениями вносят определенные неточности и приводят к тому, что уравнения, полученные из условий равновесия элемента деформированного тела и из принципа возможных перемещений, различаются между собой в части нелинейных членов. Истинным нормальным и касательным напряжениям  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$  в выражениях закона Гука (1.2) и вариаций энергии  $\delta W = \delta \epsilon^T \sigma$  соответствуют деформации удлинений и сдвигов  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ . Однако использование точных выражений для последних в общей геометрически нелинейной теории упругости является крайне неудобным; они находят применение только в определенных частных случаях (например, в нелинейных задачах осесимметричного деформирования оболочек вращения [3]) и в численных алгоритмах.

В геометрически нелинейных задачах теории стержней, пластин и оболочек при умеренных углах поворота элементов для малых деформаций удлинения и сдвига часто используются приближенные зависимости от перемещений [4]. При этом представляет интерес оценка их точности при различных углах поворота элементов тела в сравнении с конечными деформациями (1.1).

**2. Оценка точности различных выражений для нелинейных деформаций.** Деформация удлинения  $\epsilon_x$  волокна, первоначально параллельного оси  $x$ , и деформация сдвига  $\gamma_{xy}$  для волокон, первоначально параллельных осям  $x$  и  $y$ , выражаются через конечные деформации (1.1) как [1]:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \sqrt{1 + 2\epsilon_{xx}} - 1 \\ \sin \gamma_{xy} &= \frac{2\epsilon_{xy}}{\sqrt{(1 + 2\epsilon_{xx})(1 + 2\epsilon_{yy})}} \end{aligned} \quad (2.1)$$

При малых удлинениях и сдвигах ( $|\epsilon_x| \ll 1, |\gamma_{xy}| \ll 1, \dots$ ) и при любых углах поворота элементов из формул (2.1) следует, что

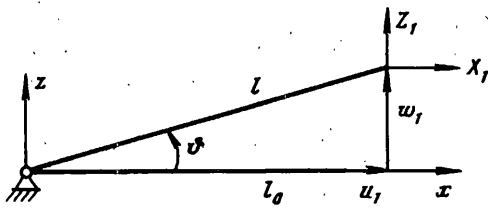
$$\epsilon_x \approx \epsilon_{xx}, \quad \gamma_{xy} \approx 2\epsilon_{xy}, \quad \dots \quad (2.2)$$

Для малых деформаций и умеренных углов поворота из (2.1) получим с точностью до квадратичных членов по перемещениям соотношения

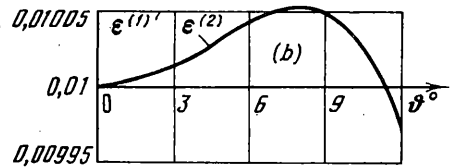
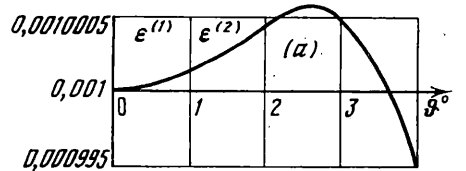
$$\begin{aligned} \epsilon_x &\approx \epsilon_{xx} - \frac{1}{2}\epsilon_{xx}^2 \approx \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \\ \gamma_{xy} &\approx \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Если считать

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \ll 1, \quad \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \ll 1, \quad \dots$$



Фиг. 1



Фиг. 2

то в выражениях (2.3) для  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{yz}$ ,  $\gamma_{zx}$  можно пренебречь последними двумя членами. Тогда

$$\gamma_{xy} \approx \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.4)$$

Для оценки точности различных выражений для нелинейных деформаций рассмотрим несколько простых примеров. Для элемента, показанного на фиг. 1, который в деформированном состоянии имеет относительное удлинение  $\epsilon$  и повернут на угол  $\theta$ , на фиг. 2 приведены зависимости деформации  $\epsilon_x$  от  $\theta$  при  $\epsilon = 0,001$  и  $\epsilon = 0,01$ , где  $\epsilon^{(1)}$  вычисляется по формуле (2.2), а  $\epsilon^{(2)}$  – по формуле (2.3).

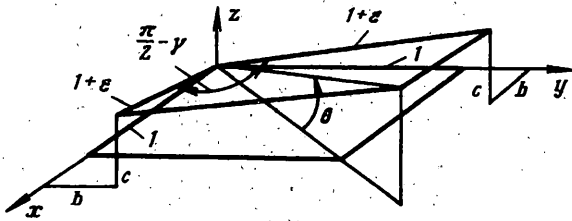
Для плоского квадратного элемента, показанного на фиг. 3, при заданной деформации удлинения его боковых граней  $\epsilon$  и заданной деформации сдвига  $\gamma$  в табл. 1 приведены некоторые значения деформаций сдвига  $\gamma_{xy} \cdot 10^3$ , вычисленных при различных углах поворота элемента  $\theta$ :  $n = 1$  – по формуле (2.2);  $n = 2$  – по формуле (2.3);  $n = 3$  – по формуле (2.4). Заданные деформации элемента: для первых двух столбцов  $-\epsilon = 10^{-3}$ ,  $\gamma = 10^{-3}$ ; для третьего и четвертого столбцов  $-\epsilon = 10^{-2}$ ,  $\gamma = 10^{-2}$ ; для последних двух столбцов  $-\epsilon = 10^{-3}$ ,  $\gamma = 10^{-2}$ . При этом точность полученных значений  $\gamma_{xy}$  определяется их близостью к заданному значению  $\gamma$ .

Как видно из приведенных на фиг. 2 и в табл. 1 результатов, при достаточно малых углах поворота элементов тела формулы (2.3), (2.4) более точно представляют деформации удлинений и сдвигов, чем формулы для конечных деформаций (2.2). Заметим, что линейные зависимости для деформаций справедливы только для весьма малых углов поворота; при этом чем меньше деформаций, тем меньше должны быть углы поворота.

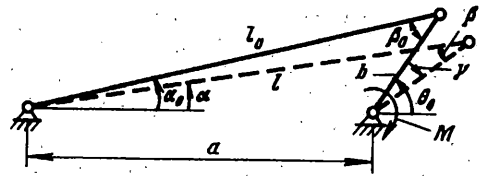
Рассмотрим двухзвенную систему, показанную на фиг. 4. Короткий стержень этой системы длиной  $b$  считается абсолютно жестким, а длинный стержень с исходной длиной  $l_0$  является упругим и имеет жесткость  $EF$ .

Таблица 1

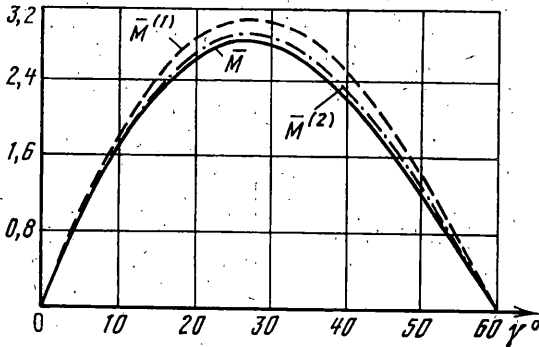
$n$	$\theta = 0,01$	$\theta = 0,025$	$\theta = 0,1$	$\theta = 0,2$	$\theta = 0,025$	$\theta = 0,05$
1	1,0020	1,0020	10,201	10,201	10,020	10,020
2	1,00015	1,0008	10,124	10,201	10,004	10,013
3	1,0011	1,0014	10,162	10,198	10,012	10,017



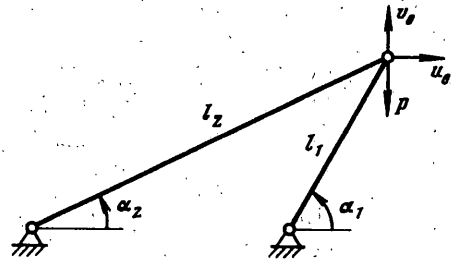
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

На фиг. 5 представлена силовая характеристика для момента  $M$ , приложенного к абсолютно жесткому стержню системы с параметрами  $ab = 4$ ,  $\theta_0 = 60^\circ$ ,  $(\alpha_0 = 10,9^\circ)$ . Безразмерный момент  $\bar{M} = M/EFa$  вычислен в зависимости от угла поворота  $\gamma$  при  $0 \leq \gamma \leq 60^\circ$  для случая, когда деформация удлинения стержня определяется точно по формуле (2.1) или как  $\epsilon = l/l_0 - 1$ . Безразмерные моменты  $\bar{M}^{(1)}$  и  $\bar{M}^{(2)}$  получены при определении деформации удлинения по формулам (2.2) и (2.3), соответственно. В данном случае, как видно из графика фиг. 5, формула (2.3) также дает более точное решение, чем формула (2.2).

**3. К расчету устойчивости.** При исследовании устойчивости системы необходимо рассматривать ее нелинейные деформации с линеаризацией для малых возмущений в окрестности заданной формы равновесия. Оценим точность различных формул для нелинейных деформаций при расчете устойчивости.

Перемещения тела в возмущенном состоянии представим в виде

$$u = u^0 + u^1, \quad v = v^0 + v^1, \quad w = w^0 + w^1 \quad (3.1)$$

где  $u^0, v^0, w^0$  – перемещения в невозмущенном состоянии;  $u^1, v^1, w^1$  – дополнительные малые перемещения (возмущения).

Принцип возможных перемещений для возмущений может быть представлен в виде [5]:

$$\delta\Pi^1 = \delta A^1 \quad (3.2)$$

где  $\delta A^1$  – вариация работы дополнительных сил, действующих в возмущенном состоянии (движении) на перемещениях  $u^1, v^1, w^1$ ;  $\delta\Pi^1$  – вариация приращения потенциальной энергии в возмущенном движении. В линеаризованных задачах для

упругого тела, подчиняющегося закону Гука

$$P^I = \frac{1}{2} \int_V \left( \epsilon^{IT} C \epsilon^I + 2\epsilon^{11T} \sigma^0 \right) dV, \quad \sigma^0 = \left[ \sigma_x^0 \sigma_y^0 \sigma_z^0 \tau_{xy}^0 \tau_{yz}^0 \tau_{zx}^0 \right]^T$$

$$\epsilon^I = \left[ \epsilon_x^I \epsilon_y^I \epsilon_z^I \gamma_{xy}^I \gamma_{yz}^I \gamma_{zx}^I \right]^T, \quad \epsilon^{11} = \left[ \epsilon_x^{11} \epsilon_y^{11} \epsilon_z^{11} \gamma_{xy}^{11} \gamma_{yz}^{11} \gamma_{zx}^{11} \right]^T \quad (3.3)$$

где  $\sigma_x^0, \dots, \tau_{zx}^0$  — напряжения, действующие в теле в невозмущенном состоянии;  $\epsilon_x^I, \dots, \gamma_{zx}^I$  выражаются линейно, а  $\epsilon_x^{11}, \dots, \gamma_{zx}^{11}$  — квадратично через перемещения  $u^I, v^I, w^I$ .

Если нелинейные деформации вычисляются по формулам (2.2) и (1.1), то с учетом (3.1) будем иметь

$$\epsilon_x^I = \frac{\partial u^I}{\partial x} + \frac{\partial u^0}{\partial x} \frac{\partial u^I}{\partial x} + \frac{\partial v^0}{\partial x} \frac{\partial v^I}{\partial x} + \frac{\partial w^0}{\partial x} \frac{\partial w^I}{\partial x}$$

$$\gamma_{xy}^I = \frac{\partial u^I}{\partial y} + \frac{\partial v^I}{\partial x} + \frac{\partial u^0}{\partial x} \frac{\partial u^I}{\partial y} + \frac{\partial u^0}{\partial y} \frac{\partial u^I}{\partial x} + \frac{\partial v^0}{\partial x} \frac{\partial v^I}{\partial y} + \frac{\partial v^0}{\partial y} \frac{\partial v^I}{\partial x} + \frac{\partial w^0}{\partial x} \frac{\partial w^I}{\partial y} + \frac{\partial w^0}{\partial y} \frac{\partial w^I}{\partial x}$$


---


$$\epsilon_x^{11} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u^I}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v^I}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w^I}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (3.4)$$

$$\gamma_{xy}^{11} = \frac{\partial u^I}{\partial x} \frac{\partial u^I}{\partial y} + \frac{\partial v^I}{\partial x} \frac{\partial v^I}{\partial y} + \frac{\partial w^I}{\partial x} \frac{\partial w^I}{\partial y}$$

Если нелинейные деформации удлинений и сдвигов вычисляются точно по формулам (2.1) с учетом (1.1) или по приближенным формулам (2.3), которые являются асимптотически точными в квадратичном приближении, то

$$\epsilon_x^I = \frac{\partial u^I}{\partial x} + \frac{\partial v^0}{\partial x} \frac{\partial v^I}{\partial x} + \frac{\partial w^0}{\partial x} \frac{\partial w^I}{\partial x}$$

$$\gamma_{xy}^I = \frac{\partial u^I}{\partial y} + \frac{\partial v^I}{\partial x} + \frac{\partial w^0}{\partial x} \frac{\partial w^I}{\partial y} + \frac{\partial w^0}{\partial y} \frac{\partial w^I}{\partial x} - \frac{\partial u^0}{\partial x} \frac{\partial v^I}{\partial x} - \frac{\partial v^0}{\partial x} \frac{\partial u^I}{\partial x} - \frac{\partial u^0}{\partial y} \frac{\partial v^I}{\partial y} - \frac{\partial v^0}{\partial y} \frac{\partial u^I}{\partial y}$$


---


$$\epsilon_x^{11} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial v^I}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w^I}{\partial x} \right)^2 \right], \quad \gamma_{xy}^{11} = \frac{\partial w^I}{\partial x} \frac{\partial w^I}{\partial y} - \frac{\partial u^I}{\partial x} \frac{\partial v^I}{\partial x} - \frac{\partial u^I}{\partial y} \frac{\partial v^I}{\partial y} \quad (3.5)$$

Если вместо (2.3) для вычисления деформаций сдвига используются упрощенные формулы (2.4), то соответственно в выражениях (3.5) деформации сдвига следует взять в виде

$$\gamma_{xy}^I = \frac{\partial u^I}{\partial y} + \frac{\partial v^I}{\partial x} + \frac{\partial w^0}{\partial x} \frac{\partial w^I}{\partial y} + \frac{\partial w^0}{\partial y} \frac{\partial w^I}{\partial x}$$

$$\gamma_{xy}^{11} = \frac{\partial w^I}{\partial x} \frac{\partial w^I}{\partial y} \quad (3.6)$$

$N$	$p = 1$	2	3	4	5	6	7
1	0,2412	0,4142	0,0806	0,7537	0,2032	0,2758	0,0311
2	0,2612	0,5858	0,0812	0,9033	0,2407	0,3196	0,0287
3	0,1472	0,1649	0,0714	0,3082	0,0805	0,0960	0,0093
4	0,2302	0,3215	0,0766	0,1018	0,1051	0,1441	0,0091

Из (3.2) с учетом (3.3) и (3.4) или (3.5) получаются линеаризованные уравнения устойчивости для функций  $u^1, v^1, w^1$  или представляющих их обобщенных координат. При использовании соотношений (3.5) уравнения, следующие из принципа возможных перемещений (3.2), совпадают с линеаризованными уравнениями равновесия элемента тела в возмущенном состоянии. Уравнения, которые следуют из принципа возможных перемещений при использовании соотношений (3.4) получаются другими.

Для оценки влияния на результаты расчета устойчивости соотношений для деформаций в виде (3.4) или (3.5) рассмотрим в качестве примера плоскую систему, показанную на фиг. 6.

В табл. 2 приведены значения безразмерной критической силы  $P/EF_1$  общей потери устойчивости данной системы при некоторых заданных значениях углов  $\alpha_1, \alpha_2$  и параметра  $\beta = EF_2/EF_1$ . Варианты этих данных в табл. 2 обозначаются через  $p$ :  $p = 1 - \alpha_1 = 90^\circ, \alpha_2 = 45^\circ, \beta = 1$ ;  $p = 2 - \alpha_1 = 90^\circ, \alpha_2 = 45^\circ, \beta = 4$ ;  $p = 3 - \alpha_1 = 90^\circ, \alpha_2 = 45^\circ, \beta = 0,25$ ;  $p = 4 - \alpha_1 = 90^\circ, \alpha_2 = 15^\circ, \beta = 4$ ;  $p = 5 - \alpha_1 = 90^\circ, \alpha_2 = 60^\circ, \beta = 4$ ;  $p = 6 - \alpha_1 = 60^\circ, \alpha_2 = 15^\circ, \beta = 4$ ;  $p = 7 - \alpha_1 = 60^\circ, \alpha_2 = 15^\circ, \beta = 0,25$ . Деформации стержней вычислялись для следующих четырех вариантов:  $N = 1$  и  $N = 2$  – по формулам (3.4) и (3.5), соответственно, без учета перемещений в невозмущенном состоянии;  $N = 3$  и  $N = 4$  – по формулам (3.4) и (3.5) с учетом перемещений в невозмущенном состоянии, которые в данном случае определялись из решения линейной задачи и были пропорциональны силе  $P$ . Отметим, что уравнения устойчивости, полученные на основании принципа возможных перемещений (3.2) с использованием соотношений для деформаций в виде (3.5) без учета предварительного деформированного состояния (при  $u^0 \approx 0, v^0 \approx 0, w^0 \approx 0$ ), для стержневых систем совпадают с линеаризованными уравнениями устойчивости в вариациях С.П. Тимошенко [6]. Соответственно результаты варианта  $N = 2$  из табл. 2 совпадают с результатами [6].

**4. Заключение.** Выполнены сравнительные оценки точности различных соотношений для деформаций удлинений и сдвигов геометрически нелинейных упругих систем. Показано, что при малых деформациях и умеренных углах поворота элементов упругого тела наибольшей точностью обладают соотношения для деформаций в квадратичном приближении относительно перемещений. По форме записи они несколько проще обычных соотношений для конечных деформаций, представляющих половину приращения квадрата длины элемента тела, и в отличие от последних строго совместимы с законом Гука для истинных напряжений (конечным деформациям, как известно, строго соответствуют обобщенные напряжения).

Использование нелинейных соотношений для деформаций в квадратичном приближении позволяет получить точные линеаризованные уравнения устойчивости упругих систем. Использование для этих целей соотношений для конечных деформаций совместно с законом Гука вносит некоторые неточности и усложнения. В большинстве задач устойчивости стержней, пластин и оболочек, деформации которых в докритическом состоянии весьма малы, эти неточности незначительны. Однако можно найти примеры, где они являются существенными, что показано на примере задачи общей устойчивости простой стержневой системы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96-01-00352).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Новожилов В.В.* Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 370 с.
2. *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 340 с.
3. *Григолюк Э.И., Шалашилин В.И.* Проблемы нелинейного деформирования. М.: Наука, 1988. 232 с.
4. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
5. *Шклярчук Ф.Н.* Нелинейные и линеаризованные уравнения движения упругих космических конструкций // Изв. РАН. МТГ. 1996. № 1. С. 161–175.
6. *Тимошенко С.П.* Устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1955. 508 с.

Москва

Поступила в редакцию  
15.X.1997