

УДК 539.3:534.1

© 1998 г. Н.Ф. МОРОЗОВ, М.В. ПАУКШТО, П.Е. ТОВСТИК

УСТОЙЧИВОСТЬ ПОВЕРХНОСТНОГО СЛОЯ ПРИ ТЕРМОНАГРУЖЕНИИ

С использованием статических линейных и геометрически нелинейных уравнений термоупругости исследуется устойчивость при термоагружении поверхностного слоя, лежащего на упругом полупространстве (основании). Возможны два механизма потери устойчивости. При одном из них форма потери устойчивости захватывает лишь верхнюю часть поверхностного слоя и экспоненциально убывает с глубиной. При втором (для мягкого основания) поверхностный слой ведет себя как пластина, лежащая на упругом основании. Представленные решения показывают, что оставаясь в рамках термоупругости не удается объяснить замеченную в экспериментах потерю устойчивости металлов, ибо плавление предшествует потере устойчивости.

Целью исследования, стимулированного статьей [1], является изучение результатов воздействия кратковременного лазерного излучения на твердотельный объект и выяснение возможных изменений поверхностного слоя, в том числе и формоизменения. Эксперименты свидетельствуют [1], что при определенных условиях поверхностный слой теряет устойчивость и становится волнообразным. Доминирующая причина таких изменений требует выяснения — это могут быть температурные напряжения, объемная или поверхностная диффузия или комбинированный эффект. Для выяснения вопроса необходимо не только определить критическое значение управляющего параметра (в данном случае температуры), но и рассчитать поведение материала после потери устойчивости. В частности, требуется найти длину волны, амплитуду прогиба и т.п. Такие вопросы нельзя решить без перехода к нелинейной геометрии.

Ниже рассмотрен ряд модельных линейных и геометрических нелинейных статических задач термоупругости. Влияние диффузии не учитывается. Близкие вопросы в линейной постановке исследованы в [2–4].

1. Бифуркация равновесия упругого полупространства при термоагружении. При термоагружении упругого полупространства $z \leq 0$ с переменными по z температурой и параметрами упругости (в частности, несущего более жесткий поверхностный слой) возникают начальные сжимающие напряжения $\sigma_{11} = \sigma_{22} = -\sigma_0(z)$. Плоскость $z = 0$ предполагается свободной. Эти напряжения могут явиться причиной потери устойчивости плоской формы свободной поверхности $z = 0$.

Пусть поверхностный слой $-h \leq z \leq 0$ нагрет до температуры $\Theta(z)$ (прогреванием остальной части полупространства будем пренебрегать). Нелинейные уравнения равновесия имеют вид [5]:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \sigma_{jk} \right] = 0 \quad (i, j, k = 1, 2, 3), \quad x_3 = z \quad (1.1)$$

где x_j — материальные координаты, $u_i(x_j)$ — проекции перемещения, δ_{ik} — символ Кронекера.

некера. Пусть напряжения σ_{ij} выражаются через деформации ϵ_{ij} по формулам

$$\sigma_{ij} = (\lambda\epsilon - (3\lambda + 2G)\alpha\theta)\delta_{ij} + 2G\epsilon_{ij} \quad (1.2)$$

$$\epsilon = \epsilon_{ii}, \quad \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i \partial u_j}{\partial x_k \partial x_k} \right)$$

где λ, G – упругие коэффициенты Ламе, α – коэффициент температурного расширения.

Невозмущенное состояние описывается соотношениями

$$\sigma_{11}^0 = \sigma_{22}^0 = -\sigma_0(z), \quad \sigma_0 = \frac{E\alpha\theta}{1-\nu}, \quad \epsilon_{33}^0 = \frac{(1+\nu)\alpha\theta}{1-\nu}, \quad u'_{30} = \sqrt{1+2\epsilon_{33}^0} - 1 \quad (1.3)$$

а остальные перемещения, напряжения и деформации равны нулю. Здесь E, ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона, штрихом обозначена производная по z .

Уравнения бифуркации имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sigma_{ij} + \delta_{i3} u'_{30} \sigma_{j3} + \sigma_{jj}^0 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad \sigma_{33}^0 = 0 \quad (1.4)$$

где в отличие от системы (1.1) через u_i, σ_{ij} обозначены возмущения соответствующих величин по отношению к состоянию (1.3).

В предположении, что функции λ, G, σ_0 не зависят от x_1 и x_2 , решения системы (1.4) будем искать в виде

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3) &= \tilde{u}_1(z) \sin k_1 x_1 \cos k_2 x_2 \\ u_2(x_1, x_2, x_3) &= \tilde{u}_2(z) \sin k_2 x_2 \cos k_1 x_1 \\ u_3(x_1, x_2, x_3) &= \tilde{u}_3(z) \sin k_1 x_1 \cos k_2 x_2 \end{aligned} \quad (1.5)$$

При этом остальные неизвестные имеют представления

$$\begin{aligned} \{\epsilon_{ii}, \epsilon, \sigma_{ii}\} &= \{\tilde{\epsilon}_{ii}(z), \tilde{\epsilon}(z), \tilde{\sigma}_{ii}(z)\} \cos k_1 x_1 \cos k_2 x_2 \\ \{\epsilon_{12}, \sigma_{12}\} &= \{\tilde{\epsilon}_{12}(z), \tilde{\sigma}_{12}(z)\} \sin k_1 x_1 \sin k_2 x_2 \\ \{\epsilon_{i3}, \sigma_{i3}\} &= \{\tilde{\epsilon}_{i3}(z), \tilde{\sigma}_{i3}(z)\} \cos k_i x_i \cos k_j x_j \quad (i, j = 1, 2, j \neq i) \end{aligned} \quad (1.6)$$

В дальнейшем значок \sim опускаем.

При этих предположениях система (1.4) суть система трех линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно функций $u_i(z)$. Ищем ее ненулевое решение, удовлетворяющее граничным условиям

$$\sigma_{i3}(0) = 0, \quad u_i(z) \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow -\infty \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.7)$$

В общем случае переменных по z функций (1.3) возможно лишь численное решение этой системы. Если же параметры λ, G, σ_0 постоянны, система (1.4) имеет явное решение.

Пусть при $z \leq 0$ параметры эти постоянны, причем $\sigma_0 > 0$. Иными словами, рассматриваем однородное упругое полупространство с начальными напряжениями $\sigma_{11}^0 = \sigma_{22}^0 = -\sigma_0$, возникшими в результате равномерного по глубине нагрева. Критическое значение напряжения σ_0 обозначим через σ_0^∞ . Положим сначала приближенно в (1.4), (1.3) $u'_{30} = 0$ (т.е. пренебрегаем докритическими деформациями, а учитываем

только докритические напряжения). Тогда решение системы (1.4) имеет вид

$$u_i(z) = [D_i k^2 \sigma_0 / G - (D_1 k_1 + D_2 k_2) k_i] e^{\lambda_i k z} - D_3 k_i e^{\lambda_3 k z} \quad (i=1, 2) \quad (1.8)$$

$$u_3(z) = \lambda_1 (D_1 k_1 + D_2 k_2) k e^{\lambda_1 k z} + \lambda_2 k D_3 e^{\lambda_2 k z}$$

где D_1, D_2, D_3 – произвольные постоянные.

$$\lambda_1 = \sqrt{1 - \frac{\sigma_0}{G}}, \quad \lambda_2 = \sqrt{1 - \frac{(1-2v)\sigma_0}{2(1-v)G}}, \quad k^2 = k_1^2 + k_2^2$$

При $\sigma_0 < G$ решение (1.8) затухает при $z \rightarrow -\infty$.

Удовлетворяя условию $\sigma_{30}(0) = 0$, получаем уравнение относительно σ_0 :

$$(1 + \lambda_1^2)^2 - 2\lambda_1\lambda_3 = 0 \quad (1.9)$$

Это уравнение имеет единственный положительный корень $\sigma_0 = \sigma_0^\infty$, значения которого при разных v приведены ниже во второй строке

| v | 0,0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 |
|--|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| σ_0^∞ / E при $u'_{30} = 0$ | 0,3820 | 0,3626 | 0,3458 | 0,3308 | 0,3170 | 0,3042 |
| σ_0^∞ / E при $u'_{30} \neq 0$ | 0,4004 | 0,3786 | 0,3594 | 0,3420 | 0,3260 | 0,3111 |

Уравнение (1.9) не содержит волновых чисел k_1 и k_2 . Это значит, что бифуркационному значению $\sigma_0 = \sigma_0^\infty$ соответствует множество форм прогиба, определяемых формулами (1.5) при любых k_1 и k_2 . Независимость σ_0^∞ от k_1 и k_2 связана с тем, что система (1.4) при постоянных параметрах λ , G , σ_0 не содержит характерного линейного размера. Введем характерный размер L рисунка деформации на свободной поверхности по формуле $L = 2\pi/k$. Тогда в силу (1.8) с ростом k или с уменьшением L скорость убывания перемещений при удалении от свободной поверхности возрастает.

Пусть теперь $\sigma_0 = \sigma_0(z)$, причем функция $\sigma_0(z)$ достигает максимального значения σ_0^{\max} на свободной поверхности. Этот случай имеет место при термоагрегации, когда свободная поверхность имеет максимальную температуру.

Тогда критическим будет значение начального напряжения

$$\sigma_0^{\max} = \sigma_0^\infty(v) \quad (1.10)$$

равное приведенному выше критическому значению при равномерном нагреве.

Действительно, считая волновое число k достаточно большим, можно получить сколь угодно быстрое затухание решения (1.8) при удалении от свободной поверхности. Это решение существенно отлично от нуля лишь в малой окрестности свободной поверхности и в этой окрестности можно считать $\sigma_0(z) = \sigma_0^{\max}$.

Из приведенных данных следует, что при бифуркации величина u'_{30} имеет порядок 0,3–0,4. Поэтому оценим порядок влияния начальных докритических деформаций на величину критического напряжения σ_0^∞ . Положим в системе (1.4) $u'_{30} \neq 0$ и будем вычислять эту величину по формуле (1.3). При постоянных параметрах решение системы (1.4) более громоздко, чем (1.8), и здесь не приводится. Критические значения σ_0^∞ для разных v помещены в третьей строке вывода. Видим, что учет докритических деформаций несущественно увеличивает критическую нагрузку. В дальнейшем считаем $u'_{30} = 0$.

2. Бифуркация равновесия поверхностного слоя. Критическое значение (1.10), найденное для $E = \text{const}$, представляет, скорее, теоретический интерес, ибо по крайней мере для металлов потеря устойчивости по описанной выше схеме предшествует переход в пластическое состояние и плавление. Поэтому рассмотрим задачу об устойчивости поверхностного слоя $-h \leq z \leq 0$ с упругими параметрами E_2, v_2 и температурными напряжениями $\sigma_0(z)$, лежащего на упругом полупространстве (основании) $z \leq -h$ с параметрами E_1, v_1 при $\sigma_0(z) = 0$.

При $z \leq -h$ затухающее при $z \rightarrow -\infty$ решение системы (1.4) после подстановки (1.6) при постоянных параметрах λ, G, σ_0 и при $\sigma_0(z) = 0$ имеет вместо (1.8) вид

$$u_i(z) = (C_i + C_0 k_i z_1) e^{k_i z_1} \quad (i = 1, 2), \quad u_3(z) = C_3 - C_0 k_3 z_1 e^{k_3 z_1}$$

$$C_0 = \frac{C_1 k_1 + C_2 k_2 + C_3 k}{(3-4v)k}, \quad z_1 = z + h \quad (2.1)$$

где $C_i = u_i(-h)$ – произвольные постоянные ($i = 1, 2, 3$).

Введем параметр нагружения σ^0 по формуле

$$\sigma^0 = \frac{1}{E_2 h} \int_{-h}^0 \sigma_0(z) dz \quad (2.2)$$

Решение (2.1) позволяет реализовать следующий численный алгоритм решения задачи бифуркации. Взяв значения

$$u_i = C_i, \quad \sigma_{i3} = E_2 e k \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} C_j \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.3)$$

$$e = \frac{E_1}{E_2}, \quad \alpha_{ii} = \frac{(3-4v_1)k^2 + k_i^2}{2(1+v_1)(3-4v_1)k^2}, \quad \alpha_{i3} = -\frac{(1-2v_1)k_i}{(1+v_1)(3-4v_1)k} \quad (i = 1, 2)$$

$$\alpha_{12} = \frac{k_1 k_2}{2(1+v_1)(3-4v_1)k^2}, \quad \alpha_{33} = \frac{2(1-v_1)}{(1+v_1)(3-4v_1)}, \quad \alpha_{ij} = \alpha_{ji}$$

в качестве начальных условий при $z = -h$, интегрируем систему (1.4) от $-h$ до нуля. Постоянные C_i в (2.3) и параметр нагружения σ^0 находим из граничных условий (1.7) при $z = 0$. Завершает решение минимизация $\sigma^0(k_1, k_2)$ по волновым числам k_1 и k_2 .

Функция $\sigma^0(k_1, k_2)$ не зависит от параметров k_1 и k_2 по отдельности, а зависит лишь от параметра $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ (параметры k_1 и k_2 можно исключить из системы путем введения вспомогательных неизвестных $U = k_1 u_1 + k_2 u_2$ и $V = k_1 \sigma_{31} + k_2 \sigma_{23}$). Поэтому при численном интегрировании системы (1.2) можно, не нарушая общности, ограничиться случаем плоской деформации

$$k_1 = k, \quad k_2 = 0, \quad u_2 = \sigma_{12} = \sigma_{23} \equiv 0 \quad (2.4)$$

С учетом (1.6) и (2.4) запишем систему (1.4) в безразмерном виде

$$\frac{dy_1}{d\xi} = r y_2 + 2(1+v_2) y_3$$

$$\frac{dy_2}{d\xi} = -\frac{v_2 r}{1-v_2} y_1 + \frac{(1+v_2)(1-2v_2)}{1-v_2} y_4 \quad (2.5)$$

$$\frac{dy_3}{d\xi} = \left(\frac{1}{1-v_2^2} + \sigma^0 s(\xi) \right) r^2 y_1 + \frac{v_2 r}{1-v_2} y_4$$

$$dy_4 / d\xi = \sigma^0 s(\xi) r^2 y_2 - r y_3$$

$$\xi = \frac{z}{h}, \quad r = kh, \quad y_1 = \frac{u_1}{h}, \quad y_2 = \frac{u_3}{h}, \quad y_3 = \frac{\sigma_{13}}{E_2}, \quad y_4 = \frac{\sigma_{33}}{E_2}$$

$$s = \frac{\sigma_0}{\sigma^o E_2}, \quad \int_{-1}^0 s(\xi) d\xi = 1$$

На поверхности контакта слоев $\xi = -1$ имеем условия

$$y_1 = C_1, \quad y_2 = C_2, \quad y_3 = er(c_1 C_1 - c_2 C_2), \quad y_4 = er(c_1 C_2 - c_2 C_1) \quad (2.6)$$

$$c_1 = \frac{2(1-v_1)}{(1+v_1)(3-4v_1)}, \quad c_2 = \frac{1-2v_1}{(1+v_1)(3-4v_1)}$$

Постоянные C_1 и C_2 и параметр нагружения $\sigma^o(r)$ определяются из условий $y_3 = y_4 = 0$ на свободной поверхности $\xi = 0$. Критические значения параметров σ^o и r определяются при минимизации по r . Численные результаты для $s = 1$ и для $s = 2(\xi + 1)$ при различных e и их обсуждение приведены в п. 4.

3. Двухмерные уравнения равновесия. В п. 2 отношение $e = E_1/E_2$ жесткостей основания $z \leq -h$ и поверхностного слоя $-h \leq z \leq 0$ было произвольным. Если жесткость основания существенно меньше жесткости поверхностного слоя (т.е. $e \ll 1$), тогда для описания деформации поверхности можно использовать двухмерные уравнения гибкой пластины [6], лежащей на упругом основании.

Отнесем линейные размеры и перемещения к h , а усилия к $E_2 h$:

$$\{x_1, x_2, z, u_1, u_2, u_3\} = h\{x, y, \xi, u, v, w\} \quad (3.1)$$

$$\{N_1, N_{12}, N_2\} = \frac{1}{E_2 h} \int_{-h}^0 \{\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}\} dz$$

причем перемещения u_i берем при $z = -h/2$, т.е. u, v, w – проекции перемещения срединной плоскости пластины.

Тогда безразмерные уравнения равновесия примут вид

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + q_1 = 0, \quad \frac{\partial N_{12}}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + q_2 = 0 \quad (3.2)$$

$$-\frac{\Delta^2 w}{12(1-v_2^2)} + N_1 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + N_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + q_3 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{\partial q_2}{\partial y} \right) = 0$$

$$N_1 = -\sigma^o + \frac{\epsilon_1 + v_2 \epsilon_2}{1-v_2^2}, \quad N_2 = -\sigma^o + \frac{\epsilon_2 + v_1 \epsilon_1}{1-v_2^2}, \quad N_{12} = \frac{\omega}{2(1+v_2)}$$

$$\epsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad \epsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \quad \omega = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}$$

где q_1, q_2, q_3 – реакция основания, последнее слагаемое в третьем уравнении (3.2) учитывает момент нагрузок q_1 и q_2 относительно срединной плоскости.

Решение уравнений (3.2) ищем в виде рядов Фурье

$$u(x, y) = \sum u_{mn} \sin r_1 mx \cos r_2 ny \quad (3.3)$$

$$v(x, y) = \sum v_{mn} \cos r_1 mx \sin r_2 ny, \quad w(x, y) = \sum w_{mn} \cos r_1 mx \cos r_2 ny$$

с подлежащими определению коэффициентами u_{mn}, v_{mn}, w_{mn} . Суммирование ведется по целым неотрицательным m и n , для которых $m + n > 0$.

В силу гипотез Кирхгофа вектор перемещений поверхностного слоя имеет вид

$$(u_1(z), u_2(z), u_3(z)) = \left(u - \left(\xi + \frac{1}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial x}, v - \left(\xi + \frac{1}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial y}, w \right) \quad (3.4)$$

Полагая в (3.4) $\xi = -1$, находим перемещения $u_i(-h)$ точек поверхности контакта с основанием и по формулам (2.3) – реакцию основания

$$\begin{aligned} q_1 &= -e \sum r_{mn} (\alpha_{11}^{mn} u_{mn}^{\circ} + \alpha_{12}^{mn} v_{mn}^{\circ} + \alpha_{13}^{mn} w_{mn}) \sin r_1 mx \cos r_2 ny \\ q_2 &= -e \sum r_{mn} (\alpha_{21}^{mn} u_{mn}^{\circ} + \alpha_{22}^{mn} v_{mn}^{\circ} + \alpha_{23}^{mn} w_{mn}) \cos r_1 mx \sin r_2 ny \\ q_3 &= -e \sum r_{mn} (\alpha_{31}^{mn} u_{mn}^{\circ} + \alpha_{32}^{mn} v_{mn}^{\circ} + \alpha_{33}^{mn} w_{mn}) \cos r_1 mx \cos r_2 ny \\ u_{mn}^{\circ} &= u_{mn} - r_1 m w_{mn} / 2, \quad v_{mn}^{\circ} = v_{mn} - r_2 n w_{mn} / 2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

где коэффициенты α_{ij}^{mn} получаются из α_{ij} в (2.3) заменой волновых чисел k_1, k_2, k соответственно на $r_1 m, r_2 n, r_{mn} = \sqrt{(r_1 m)^2 + (r_2 n)^2}$. При выводе формул (3.5) (как и формул (2.3)) принято, что деформация основания может быть найдена из линейных уравнений (1.4) при $\sigma_0 = 0$. В результате вклады отдельных слагаемых (3.3) суммируются.

Описанная здесь двумерная математическая модель позволяет приближенно найти как критическую нагрузку (п. 4), так и исследовать послекритическую деформацию (п. 5). О погрешности двумерной модели при различных $e = E_1/E_2$ можно судить при сравнении величины критической нагрузки, найденной по двумерной и трехмерной моделям (п. 4).

4. Бифуркация равновесия пластины на упругом основании. Представление перемещений в виде сумм (3.3) может понадобиться лишь при определении послекритических деформаций. Для определения критической нагрузки следует отбросить нелинейные члены и в силу линейности получающейся задачи бифуркации взять одно слагаемое в (3.3). Как показано в п. 2, не нарушая общности, можно ограничиться рассмотрением плоской деформации.

Итак, решение ищем в виде

$$u(x) = u_1 \sin rx, \quad w(x) = w_1 \cos rx \quad (4.1)$$

Тогда система уравнений (3.2) дает

$$\begin{aligned} (c_3 r + e c_1) u_1 - e \left(c_2 + \frac{1}{2} c_1 r \right) w_1 &= 0, \quad c_3 = \frac{1}{1 - v_2^2} \\ -e \left(c_2 + \frac{c_1 r}{2} \right) u_1 + \left(\frac{c_3 r^2}{12} - \sigma^{\circ} + e \left(\frac{c_1}{r} + c_2 + \frac{c_1 r}{4} \right) \right) r w_1 &= 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

где c_1 и c_2 те же, что и в (2.6).

Приравнивая нуль определитель системы (4.2), находим критическое значение $\sigma_1^*(e)$ параметра нагружения $\sigma^*(r, e)$:

$$\sigma_1^*(e) = \min_r \{\sigma^*(r, e)\}, \quad \sigma^{\circ} = \frac{1}{12} c_3 r^2 + e \left(\frac{c_1}{r} + c_2 + \frac{c_1 r}{4} \right) + \frac{e^2 (c_2 + c_1 r / 2)^2}{c_3 r^2 + e c_1 r} \quad (4.3)$$

Минимум в (4.3) может быть найден лишь численно.

При малых e можно считать приближенно $u = q_1 = 0$. В результате приходим к более простой, чем (4.3) формуле для $\sigma^*(r, e)$, из которой находим явные выражения

| e | σ_1^* | σ_2^* | σ_3^* | σ_4^* | r_1^* | r_2^* | r_3^* | r_4^* | u/w |
|----------|--------------|--------------|--------------|--------------|----------|----------|----------|----------|-------|
| 0,01 | 0,030 | 0,028 | 0,030 | 0,030 | 0,319 | 0,320 | 0,327 | 0,327 | 0,008 |
| 0,02 | 0,049 | 0,045 | 0,047 | 0,047 | 0,398 | 0,403 | 0,418 | 0,419 | 0,013 |
| 0,05 | 0,096 | 0,082 | 0,087 | 0,087 | 0,536 | 0,547 | 0,590 | 0,592 | 0,027 |
| 0,10 | 0,160 | 0,130 | 0,138 | 0,136 | 0,668 | 0,689 | 0,787 | 0,795 | 0,047 |
| 0,15 | 0,219 | 0,171 | 0,178 | (0,174) | 0,758 | 0,788 | 0,955 | 0,974 | 0,065 |
| 0,20 | 0,274 | 0,207 | 0,211 | - | 0,828 | 0,868 | 1,116 | - | 0,081 |
| ∞ | ∞ | ∞ | 0,331 | 0,165 | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | - |

для критических значений $\sigma_1^*(e)$ и $r^*(e)$:

$$\sigma^*(r, e) = \frac{1}{12} c_3 r^2 + \frac{ec_1}{r}, \quad \sigma_2^*(e) = \left(\frac{9e^2 c_1^2 c_3}{16} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad r_2^*(e) = \left(\frac{6ec_1}{c_3} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (4.4)$$

Приведем некоторые численные результаты. Пусть $v_1 = v_2 = 0,3$. Для ряда значений параметра $e = E_1/E_2$ критические значения $\sigma^*(e)$ и $r^*(e)$, найденные четырьмя разными способами, приведены в таблице. Приближенные значения σ_1^* , r_1^* и σ_2^* , r_2^* найдены соответственно по формулам (4.3) и (4.4), полученным при рассмотрении пластины, лежащей на упругом основании. Точные значения σ_3^* , r_3^* и σ_4^* , r_4^* получены при численном интегрировании системы (2.5), описывающей бифуркацию равновесия трехмерного полупространства. При этом значения σ_3^* , r_3^* соответствуют равномерному по толщине прогреву поверхностного слоя ($\sigma_0(z) = \text{const}$, $s(\xi) \equiv 1$), а значения σ_4^* , r_4^* – линейному по толщине поверхностного слоя распределению температуры ($s(\xi) = 2(1 + \xi)$). Заметим, что параметр σ^* , входящий в уравнения пластины (3.2), учитывает лишь среднюю по толщине температурю (см. (2.1)). Поэтому формулы (4.3) и (4.4) не позволяют учесть распределение температуры по толщине.

Из таблицы вытекает, что для σ^* уточненная формула (4.3) при малых e не значительно уточняет приближенную формулу (4.4), а при больших e дает даже худшие результаты. Для r^* формула (4.3) при всех значениях e дает худшие результаты, чем приближенная формула (4.4).

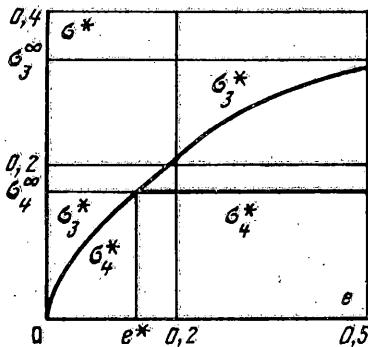
В последнем столбце таблицы приведено отношение u/w , найденное из уравнений (4.2). По крайней мере при вычислении σ^* можно считать приближенно $u = 0$ и при $e \leq 0,2$ пользоваться формулой (4.4).

В последней строке приведены значения $\sigma^\infty = \sigma^*(\infty) = \sigma_0^\infty / E_1$, взятые из п. 1 при $v_1 = 0,3$, причем $\sigma_4^\infty = \sigma_3^\infty / 2$, ибо $\max s(\xi) = 2$. Помещенное в скобках значение $\sigma_4^* = 0,174$ больше критического значения $\sigma_4^\infty = 0,165$, которое реализуется при $r \rightarrow \infty$.

При $e > 0,2$ проводить сравнение результатов интегрирования системы (2.5) с приближенными формулами (4.3) и (4.4) нецелесообразно, ибо в связи с ростом r длина волны $L = 2\pi h/r$ становится сравнимой или даже меньше толщины h поверхностного слоя. В этом случае гипотезы Кирхгофа неприменимы и может быть использован только трехмерный подход. Опишем результаты интегрирования системы (2.5).

Пусть сначала $s(\xi) = 1$ (равномерный прогрев поверхностного слоя). С ростом e критическая нагрузка $\sigma_3^*(e)$ (см. фигуру) асимптотически приближается снизу к значению $\sigma_3^\infty = 0,3308$ (см. п. 1). Так при $e = 0,4$ имеем $\sigma_3^* = 0,303$, $r_3^* = 1,92$, а при $e \geq 0,7$ величины σ_3^* и σ_3^∞ различаются лишь в пятом знаке. С ростом e неограниченно растет и r_3^* . При $e = 0,7$ имеем $r_3^* = 25,3$ (длина волны $L = h/4$).

При $s(\xi) = 2(1 + \xi)$ (т.е. при линейном по толщине поверхности слоя распределении температуры) поведение функции $\sigma_4^*(e)$ иное. В связи с тем, что $s(0) = 2$, величина σ_4^* не может превосходить значения $\sigma_4^\infty = 0,165$. В результате при $e^* = 0,138$ кривая $\sigma_4^*(e)$ имеет угловую точку (см. фигуру). При $e < e^*$ величина $\sigma_4^*(e)$ весьма близка к $\sigma_3^*(e)$ (см. таблицу; на фигуре их различие показать не удается) и может быть найдена по приближенной формуле (4.4). Если же $e > e^*$, критическим следует считать значение $\sigma_4^\infty = 0,165$, которое реализуется при $r \rightarrow \infty$ (т.е. для весьма коротких волн на свободной поверхности). Например, при $e = 0,2; r = 100$ получаем значение $\sigma^*(r, e) = 0,169$, близкое к σ_4^∞ .



5. Закритическая деформация пластины. Пусть $e \ll 1, \sigma^* > \sigma^*$. При вычислении закритической деформации исходим из двумерных уравнений п. 3. Пусть перемещения точек пластины задаются формулами (3.3). Безразмерная потенциальная энергия Π , отнесенная к площади ячейки периодичности функций (3.3), складывается из потенциальных энергий растяжения Π_e и изгиба Π_x пластины и энергии основания Π_0 :

$$\Pi(u_{mn}, v_{mn}, w_{mn}, r_1, r_2) = \Pi_e + \Pi_x + \Pi_0 \quad (5.1)$$

где

$$\Pi_e = \frac{r_1 r_2}{8(1-v_2^2)\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\varepsilon_1^2 + 2v\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2 + \frac{1-v_2^2}{2} \omega^2 - 2\sigma^*(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \right) dx dy$$

$$\Pi_x = \frac{1}{96(1-v_2^2)} \sum r_{mn}^4 w_{mn}^2$$

$$\begin{aligned} \Pi_o = & \frac{e}{8} \sum r_{mn} (\alpha_{11}^{mn} (u_{mn}^\circ)^2 + \alpha_{22}^{mn} (v_{mn}^\circ)^2 + \alpha_{33}^{mn} w_{mn}^2 + \\ & + 2\alpha_{12}^{mn} u_{mn}^\circ v_{mn}^\circ + 2\alpha_{13}^{mn} u_{mn}^\circ w_{mn} + 2\alpha_{23}^{mn} v_{mn}^\circ w_{mn}) \end{aligned}$$

Искомые величины $u_{mn}, v_{mn}, w_{mn}, r_1, r_2$ могут быть найдены в результате минимизации функции Π по всем ее аргументам.

Найдем приближенное решение, считая, что

$$w = w_{11} \cos r_1 x \cos r_2 y$$

$$u = u_{20} \sin 2r_1 x + u_{22} \sin 2r_2 y \cos 2r_1 x \quad (5.2)$$

$$v = v_{02} \sin 2r_2 y + v_{22} \sin 2r_2 y \cos 2r_1 x$$

$$\Pi_o = er\alpha_{33} w_{11}^2 / 8, \quad r^2 = r_1^2 + r_2^2$$

Коэффициенты $u_{20}, u_{22}, v_{02}, v_{22}$ находим из условия минимума энергии растяжения срединной поверхности Π_e :

$$u_{20} = u_{22} = r_1 w_{11}^2 / 16, \quad v_{02} = v_{22} = r_2 w_{11}^2 / 16 \quad (5.3)$$

Тогда полная энергия

$$\Pi(w_{11}, r_1, r_2) = \frac{(\sigma^o(r) - \sigma^o)r^2 w_{11}^2}{8} + \frac{c_3(3r_1^4 + 4\nu_2 r_1^2 r_2^2 + 3r_2^4)w_{11}^4}{256} \quad (5.4)$$

где $\sigma^o(r)$ то же, что и в (4.4).

При $\sigma^o > \sigma_2^*$ функция (5.4) имеет минимум при

$$w_{11}^2 = \frac{8\delta}{3+2\nu_2}, \quad \delta = \frac{\sigma^o - \sigma_2^*}{\sigma_2^*}; \quad r = r_2^*, \quad r_1 = r_2 = \frac{r_2^*}{\sqrt{2}} \quad (5.5)$$

где r_2^* и σ_2^* вычисляются по формулам (4.4).

Из (5.5) следует, что прогиб w_{11} зависит только от относительного превышения δ нагрузкой σ^o критического значения σ_2^* и от коэффициента Пуассона ν_2 поверхностного слоя и при потере устойчивости образуется шахматная система вмятин ($r_1 = r_2$). Тем самым конкретизирована форма прогиба свободной поверхности. Напомним, что при определении критической нагрузки из линейных уравнений волновые числа r_1 и r_2 оставались неопределенными и была найдена лишь величина $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$. Из (5.5) следует также, что увеличение нагрузки (температуры) не приводит к изменению размеров вмятин, а растет лишь их глубина.

6. Выводы. Построенные выше решения могут быть использованы как при температурном, так и при механическом нагружении поверхностного слоя начальными напряжениями $\sigma_{11} = \sigma_{22} = -\sigma_0$. Ниже особое внимание уделяем случаю термонаружения.

Итак, установлено, что теоретически возможны два существенно различных механизма потери устойчивости.

I. Если жесткость поверхностного слоя имеет тот же порядок, что и жесткость нижележащего полупространства (основания), или меньше ее, форма потери устойчивости захватывает лишь верхнюю часть поверхностного слоя и экспоненциально убывает вместе с глубиной. Критическим является напряжение σ_0^∞ , значения которого приведены в п. 1 и которое полностью определяется начальными напряжениями (температурой) в непосредственной окрестности свободной поверхности. Вмятины при потере устойчивости короче толщины поверхностного слоя. В частности, при линейном по толщине поверхностного слоя распределении температуры указанная форма потери устойчивости реализуется при $e = E_1/E_2 > 0,138$.

Оставаясь в рамках линейной термоупругости, по формуле (1.3) можно найти критическое значение температуры θ^* . Однако, вычисления показывают, что для металлов (алюминий, железо, титан) величина θ^* в 12–17 раз превосходит температуру плавления.

II. Если же жесткость поверхностного слоя существенно выше, чем жесткость основания, поверхностный слой ведет себя как пластина, лежащая на упругом основании, и для приближенного описания потери устойчивости можно использовать (линейные или нелинейные) уравнения пластин (грубо говоря, уравнения пластин можно использовать при $e \leq 0,2$). При этом критическая нагрузка (см. формулы (4.4)) слабо зависит от распределения напряжений по толщине поверхностного слоя, а определяется их средним значением. Длина вмятин при потере устойчивости заметно превосходит толщину поверхностного слоя.

Пусть поверхностный слой равномерно прогрет до температуры, меньшей температуры плавления. Тогда расчеты по формулам (4.4) и (1.3) показывают, что для тех же металлов потеря устойчивости может иметь место, если $e < 0,004–0,009$, т.е.

для весьма мягкого основания. Отметим также, что в экспериментах¹ обнаружено образование вытянутых вмятин на поверхности. Это не согласуется с установленным в п. 5 шахматным характером вмятин при потере устойчивости и говорит о том, что температурные напряжения не являются доминирующей причиной потери устойчивости поверхности при кратковременном лазерном воздействии.

Представленные решения показывают, что, оставаясь в рамках термоупругости, объяснить замеченную в экспериментах потерю устойчивости не удается.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (96-01-00-411) и научного фонда (95 IN-RU-481).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Емельянов В.И., Шлыков Ю.Г. Нелинейная многомодовая генерация поверхностных дефекто-деформационных структур // Изв. РАН. Физич. серия. 1993. Т. 57. № 12. С. 18–38.
2. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 487 с.
3. Морозов Н.Ф., С.А. Назаров, А.В. Проскура. Краевые задачи теории упругости для плоских областей с тонким отслоением // Механика деформируемых тел. М.: Наука, 1986. С. 82–83.
4. Дудников В.А., Козлов В.А. Задача стационарной термоупругости для осесимметричных областей с тонкими покрытиями // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 1. 1988. Вып. 4 (№ 22). С. 53–58.
5. Новожилов В.В. Теория упругости. Судпромгиз, 1958. 372 с.
6. Биргер И.А. Стержни, пластинки, оболочки. М.: Физматлит, 1992. 392 с.

С.-Петербург

Поступила в редакцию
23.IV.1997

¹ См. Судьенков Ю.В., Балошин Ю.А., Юрьевич В.И. Особенности разрушения оптических поверхностей металлов при воздействии коротких лазерных импульсов // Тр. 8 Всес. конф. "Взаимодействие оптического излучения с веществом". Т. 1. Л.: 1990. С. 116.