

**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1998**

УДК 539.3

© 1998 г. А.Г. ГОРШКОВ, И.Ю. КОЛЕСНИКОВ

**КОНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ НА ОСНОВЕ ПОЛНОГО СЕМЕЙСТВА
НЕПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ФУНКЦИЙ
ФОРМЫ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО ЧИСЛА ГРАНИЧНЫХ УЗЛОВ**

Современный уровень высокоскоростных компьютерных вычислений определил широкое использование в инженерных расчетах коммерческих пакетов общего назначения (ANSYS, COSMOS/M, ABAQUS и др.) на базе метода конечных элементов (МКЭ).

Высокая стоимость вычислений при расчете сложных конструкций стимулирует привлечение проблемно ориентированных возможностей метода граничных элементов (МГЭ), одним из важнейших преимуществ применения которого является понижение размерности исходной задачи. Однако на пути комбинирования алгоритмов МКЭ и МГЭ возникают конкретные проблемы, вытекающие из различия стандартных формулировок обоих методов (симметрия разрешающих матриц, использование одних и тех же степеней свободы и т.д.). И хотя наметился определенный прогресс в разрешении имеющихся трудностей, отсутствие эффективных (с вычислительной точки зрения) численных процедур такой реализации препятствует реальному объединению МКЭ и МГЭ в рамках единого программного комплекса.

Вместе с тем имеется и другая возможность использования принципиального достоинства МГЭ за счет введения изопараметрических конечных элементов с произвольным числом граничных узлов. Главной проблемой, при этом, становится само построение таких элементов.

К настоящему времени разработаны две основные версии реализации МКЭ [1, 2]: h -версия (на основе лагранжевых и сирендиевых полиномиальных семейств) и p -версия (на базе ортогональных полиномов). Однако, в рамках полиномиальной интерполяции с повышением степени полинома (из-за требований полноты и геометрической изотропии) введение внутренних узлов в элементе является неизбежным [1].

Математическая теория приближений, как известно [3, 4], не ограничивается привлечением степенных полиномов. Поэтому добавление тригонометрических функций в систему базисных функций конечного элемента [5, 6] представляется закономерным.

В [7–10], развивая концепцию А.А. Ильюшина о построении операторов граничного влияния [11], была поставлена задача определяющего граничного интерполирования на основе приближенного аналитического решения задачи Дирихле в прямоугольнике и параллелепипеде, что привело, в результате, к построению полного семейства неполиномиальных функций формы и треффцевых базисных функций для полигармонических уравнений.

Публикуемая статья посвящена изучению свойств построенных неполиномиальных функций форм и их применению к формированию новых изопараметрических конечных элементов на примерах решения плоской задачи теории упругости и расчета тонких пластин. Существенным при этом является выбор эффективного способа численного интегрирования и построение схемы численной реализации, не приводящей к сдвиговому запиранию и нулевым энергетическим модам. Кроме того, в связи с современным развитием метода Треффца, сочетающего преимущества МКЭ и МГЭ в гибридной формулировке [12, 13], самостоятельное значение приобретают построенные неполиномиальные определяющие базисные функции.

1. Задача определяющего граничного интерполирования ставится в связи с построением функций формы для произвольного числа граничных узлов и, одновременно, в связи с формированием базисных функций для реализации метода Треффца.

Неоднозначность решения задачи интерполирования, которая кроме точечных

условий совпадения включает, обычно, еще и требования гладкости, определяющие поведение интерполирующей функции между узлами, разрешается здесь самими определяющими свойствами искомого решения.

Постановка задачи определяющего граничного интерполяции формулируется следующим образом: требуется найти решение (приближенное или точное) дифференциального уравнения в частных производных (далее называется определяющим)

$$Lw^h = 0 \quad (1.1)$$

при точном выполнении следующих условий:

$$w^h(p_i \in \Gamma^h) = w_i = \varphi_i \quad (i=1, N) \quad (1.2)$$

Здесь L – линейный полигармонический оператор [14], w^h – искомое решение, Γ^h – множество N граничных узлов, $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ – заданные числа, $h = 1/N$.

В дальнейшем ограничимся случаем двух независимых переменных, а в качестве оператора L возьмем двумерный оператор Лапласа.

В прямоугольной декартовой системе координат xy ведем открытую квадратную область $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$, ограниченную контуром Γ . Замкнутую область $\Omega \cup \Gamma$ обозначим обычным образом: $\bar{\Omega}$.

Вдоль каждой стороны B_{ij} (фиг. 1) введем произвольное число n_{ij} равномерно расположенных узлов (на разных сторонах значения n_{ij} могут отличаться друг от друга, что является существенным при формировании переходных конечных элементов):

$$B_{ijk} = B_{ij}(\xi_k), \quad \xi_k = k / (n_{ij} + 1), \quad k = 1, n_{ij} \quad (i, j = 1, 2) \quad (1.3)$$

Уравнение Лапласа относительно определяющей функции w^h записывается известным образом

$$\nabla^2 w^h(x, y) = 0, \quad \nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 \quad (1.4)$$

Границное множество Γ^h представим в виде объединения двух точечных множеств: углов A и боковых узлов B^h :

$$\Gamma^h = A \cup B^h \quad (1.5)$$

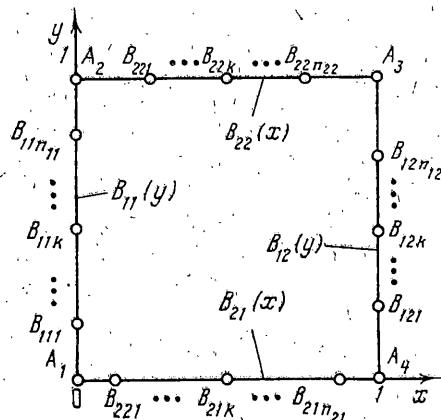
$$A = \bigcup_{i=1}^4 A_i, \quad B^h = \bigcup_{i=1}^2 \bigcup_{j=1}^2 \bigcup_{k=1}^{n_{ij}} B_{ijk}, \quad A \cap B^h = \emptyset$$

где \emptyset – пустое множество. Суммарное число узлов записывается

$$N = 4 + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 n_{ij} \quad (1.6)$$

Приближенное представление w^h для решения уравнения (1.4), точно удовлетворяющее условиям (1.2), в котором в качестве констант выступают сами значения решения в заданных граничных узлах, примет вид [7, 10]:

$$w^h(x, y) = \sum_{i=1}^4 f_i^{A,n}(x, y; A_i) w^h(A_i) + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{1}{n_{ij} + 1} \sum_{k=1}^{n_{ij}} f_{ijk}^{B,n}(x, y; B_{ijk}) w^h(B_{ijk}) \quad (1.7)$$



Фиг. 1

$$f_1^{A,n}(x, y; A_i) = (1-x)(1-y) - f_1^{11,n}(x, y) - f_1^{21,n}(x, y) \quad (1.8)$$

$$f_2^{A,n}(x, y; A_2) = (1-x)y - f_2^{11,n}(x, y) - f_2^{22,n}(x, y)$$

$$f_3^{A,n}(x, y; A_3) = xy - f_3^{12,n}(x, y) - f_3^{22,n}(x, y)$$

$$f_4^{A,n}(x, y; A_4) = x(1-y) - f_4^{12,n}(x, y) - f_4^{21,n}(x, y)$$

$$f_{ijk}^{B,n}(x, y; B_{ijk}) = 2 \sum_{s=1}^{n_{ij}} \chi_{js}(z^{(i)}) \sin \frac{\pi s k}{n_{ij} + 1} \sin \pi s t^{(i)} \quad (1.9)$$

$$f_1^{11,n}(x, y) = \sum_{s=1}^{n_{11}} b_s^{11} \chi_{1s}(x) \sin \pi s y, \quad f_1^{21,n}(x, y) = \sum_{s=1}^{n_{21}} b_s^{21} \chi_{1s}(y) \sin \pi s x$$

$$f_2^{11,n}(x, y) = \sum_{s=1}^{n_{11}} (-1)^{s+1} b_s^{11} \chi_{1s}(x) \sin \pi s y, \quad f_2^{22,n}(x, y) = \sum_{s=1}^{n_{22}} b_s^{22} \chi_{2s}(y) \sin \pi s x \quad (1.10)$$

$$f_3^{12,n}(x, y) = \sum_{s=1}^{n_{12}} (-1)^{s+1} b_s^{12} \chi_{2s}(x) \sin \pi s y, \quad f_3^{22,n}(x, y) = \sum_{s=1}^{n_{22}} (-1)^{s+1} b_s^{22} \chi_{2s}(y) \sin \pi s x$$

$$f_4^{12,n}(x, y) = \sum_{s=1}^{n_{12}} b_s^{12} \chi_{2s}(x) \sin \pi s y, \quad f_4^{21,n}(x, y) = \sum_{s=1}^{n_{21}} (-1)^{s+1} b_s^{21} \chi_{1s}(y) \sin \pi s x$$

$$\chi_{1s}(z^{(i)}) = \exp[-\alpha_s(1-z^{(i)})] c_{1s} + \exp[-\alpha_s z^{(i)}] c_{2s} \quad (1.11)$$

$$\chi_{2s}(z^{(i)}) = \exp[-\alpha_s(1-z^{(i)})] c_{2s} + \exp[-\alpha_s z^{(i)}] c_{1s}$$

$$c_{1s} = -e^{-\alpha_s} c_{2s}, \quad c_{2s} = (1 - e^{-2\alpha_s})^{-1}$$

$$b_s^y = (n_{ij} + 1)^{-1} \operatorname{ctg} \frac{\pi s}{2(n_{ij} + 1)}, \quad \alpha_s = 2(n_{ij} + 1) \sin \frac{\pi s}{2(n_{ij} + 1)} \quad (1.12)$$

$$(z^{(i)}, t^{(i)}) = (x, y) \quad (i=1), \quad (z^{(i)}, t^{(i)}) = (y, x) \quad (i=2)$$

Здесь число слагаемых для функций $f_i^{A,n}(x, y; A_i)$ сокращается (по сравнению с [7]) в $2n$ раз ($n = \min\{n_{ij}\}$), что при численной реализации обеспечивает очевидные преимущества.

Для построенных функций выполняются следующие равенства:

$$f_i^{A,n}(B_{jkl}; A_i) = 0, \quad f_{ijk}^{B,n}(A_i; B_{ijk}) = 0 \quad (1.13)$$

$$f_i^{A,n}(A_j; A_i) = 1 \quad (i=j), \quad f_i^{A,n}(A_j; A_i) = 0 \quad (i \neq j)$$

$$(n_{ij} + 1)^{-1} f_{ijk}^{B,n}(B_{lmp}; B_{ijk}) = \begin{cases} 1 & (i=l, j=m, k=p) \\ 0 & (|i-l| + |j-m| + |k-p| \neq 0) \end{cases}$$

Условия (1.13) означают, что функции, фигурирующие в (1.7) сомножителями при $w^h(A_i)$ и $w^h(B_{ijk})$, являются функциями формы для соответствующих узлов A_i и B_{ijk} . Причем, в отличие от известных полиномиальных функций формы [1], они построены для произвольного числа граничных узлов (без введения внутренних узлов) и приближенно (или точно при $\alpha_s = \pi s$) удовлетворяют [7, 10] уравнению (1.4), откуда и следуют их определяющие свойства.

Сформированная система функций $\{f_i^{A,n} (i=1,4), (n_{ij} + 1)^{-1} f_{ijk}^{B,n} (k=\overline{1, n_{ij}}; i,j=1,2)\}$ является полной [3, с. 81] по отношению к множеству граничных узлов $\Gamma^h = \{A_i (i=\overline{1,4}), B_{ijk} (k=\overline{1, n_{ij}}; i,j=1,2)\}$. Если положить в (1.2) значения $\phi_i = 1$ ($i=\overline{1, N}$), то из

(1.7) и (1.13) получим равенство

$$\sum_{i=1}^4 f_i^{A,n}(x, y; A_i) + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{1}{n_{ij}+1} \sum_{k=1}^{n_{ij}} f_{ijk}^{B,n}(x, y; B_{ijk}) = 1 \quad (1.14)$$

справедливое в любой точке $(x, y) \in \bar{\Omega}$.

Свойство функций формы (1.14) отражает воспроизведение постоянной величины и является одним из необходимых условий сходимости метода конечных элементов [1, 15]. Наличие билинейных слагаемых в представлении функций формы для угловых точек (1.8) обеспечивает удовлетворение критериев сходимости [1], связанных с требуемым (предельным) постоянством градиентов (деформаций) и с возможностью воспроизведения перемещений тела как твердого целого. Условие межэлементной непрерывности (съединенности) обеспечивается полнотой построенной системы функций формы.

Важным свойством построенных неполиномиальных определяющих функций формы является то обстоятельство, что они одновременно не обращаются в нуль ни в одной внутренней точке единичного квадрата.

Для доказательства указанного факта рассмотрим, например, функции формы для узлов B_{21k} ($k = 1, n_{21} = n$):

$$f_{21k}^{B,n}(x, y; B_{21k}) = \frac{2}{n+1} \sum_{s=1}^n \chi_{1s}(y) \sin \frac{\pi s k}{n+1} \sin \pi s x \quad (1.15)$$

Положим, что n – нечетное число и обозначим $M = (n+1)/2$. Здесь возможны два различных случая.

Случай 1 (k – четное число):

$$f_{21k}^{B,n}(x, y; B_{21k}) = \frac{2}{n+1} \sum_{l=1}^{M-1} \sin \frac{k\pi l}{n+1} [\chi_{1,l}(y) \sin \pi l x - \chi_{1,n+1-l}(y) \sin \pi(M+l)x] \quad (1.16)$$

Для двух вариантов имеем:

(1, a) M – четное число

$$f_{21k}^{B,n}(x, y; B_{21k}) = \frac{2}{n+1} \sum_{l=1}^{M-1} [\chi_{1,l}(y) - \chi_{1,n+1-l}(y)] \sin \frac{k\pi l}{n+1} \sin \pi l x \quad (1.17)$$

(1, b) M – нечетное число

$$f_{21k}^{B,n}(x, y; B_{21k}) = \frac{2}{n+1} \sum_{l=1}^{M-1} [\chi_{1,l}(y) - \chi_{1,n+1-l}(y)] \sin \frac{k\pi l}{n+1} \sin \pi l x \quad (1.18)$$

Случай 2 (k – нечетное число):

$$f_{21k}^{B,n}(x, y; B_{21k}) = \frac{2}{n+1} \left\{ \sum_{l=1}^{M-1} \sin \frac{k\pi l}{n+1} [\chi_{1,l}(y) \sin \pi l x + \right. \\ \left. + \chi_{1,n+1-l}(y) \sin \pi(M+l)x] + \chi_{1,M}(y) (-1)^{\frac{1}{2}(k-1)} \sin \pi M x \right\} \quad (1.19)$$

Для двух вариантов имеем:

(2, a) M – четное число

$$f_{21k}^{B,n}(x, y; B_{21k}) = \frac{2}{n+1} \left\{ \sum_{l=1}^{M-1} [\chi_{1,l}(y) + \chi_{1,n+1-l}(y)] \times \right. \\ \left. \times \sin \frac{k\pi l}{n+1} \sin \pi l x + \chi_{1,M}(y) (-1)^{\frac{1}{2}(k-1)} \sin \pi M x \right\} \quad (1.20)$$

(2, b) M – нечетное число

$$f_{21k}^{B,n}(x, y; B_{21k}) = \frac{2}{n+1} \left\{ \sum_{l=1}^{M-1} [\chi_{l,l}(y) - \chi_{l,n+1-l}(y)] \times \right. \\ \left. \times \sin \frac{k\pi l}{n+1} \sin \pi l x + \chi_{1,M}(y) (-1)^{\frac{1}{2}(k-1)} \sin \pi M x \right\} \quad (1.21)$$

Используем следующие свойства функций $\chi_{1s}(y)$ на отрезке $0 \leq y \leq 1$: $\chi_{1s}(y) > 0$, ($s = \overline{1, n}$); $\chi'_{1s}(y) < 0$ ($s = \overline{1, n}$); $\chi_{1s}(0) = 1$; $\chi_{1s}(1) = 0$ ($s = \overline{1, n}$); $\chi_{1s*}(y) - \chi_{1s**}(y) \neq 0$, $s^* \neq s^{**}$, $0 < y < 1$; $\chi_{1s*}(y) - \chi_{1s**}(y) = 0$, $s^* \neq s^{**}$, $y = 0$ и $y = 1$.

Поскольку

$$\frac{2}{n+1} \sum_{s=1}^n \sin \frac{\pi s k}{n+1} \sin \frac{\pi s l}{n+1} = \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq l \quad (k, l = \overline{1, n}) \end{cases}$$

$$\sin \pi s x = \begin{cases} \sin \pi l x, & s \leq M \\ \sin \pi(M+l)x, & s > M \quad (l = \overline{1, M}) \end{cases}$$

и нули функции $\sin \pi l x$ на интервале $(0, 1)$ не совпадают с узлами, то в результате будем иметь указанные свойства функций формы внутри квадрата (для n – четного и для остальных узлов оно доказывается аналогичным образом).

Поведение неполиномиальных функций формы на границе при изменении числа узлов вдоль отдельных сторон от 3 до 99 отражено на фиг. 2: для боковых узлов (фиг. 2, a) и для угловых узлов (фиг. 2, b). Здесь приведённые числа отвечают номерам узлов.

2. Переходя к пределу при $n_{ij} \rightarrow \infty$, получим

$$w = \lim_{n_{ij} \rightarrow \infty} w^h \quad (2.1)$$

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^4 f_i^{A,\infty}(x, y; A_i) w(A_i) + \\ + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \int_0^1 f_{ij}^{B,\infty}(x, y; \xi^{ij}) w(B_{ij}(\xi^{ij})) d\xi^{ij} \quad (2.2)$$

где $f_i^{A,\infty}$ и $f_{ij}^{B,\infty}$ представляются уже бесконечными рядами (1.8)–(1.11) с предельными характеристическими числами

$$\lim_{n_{ij} \rightarrow \infty} \alpha_s = \pi s, \quad \lim_{n_{ij} \rightarrow \infty} b_s^{ij} = \frac{2}{\pi s} \quad (2.3)$$

Интегральная группа слагаемых в (2.2) совпадает с известным представлением решения задачи Дирихле [16], которое обращается в нуль в вершинах квадрата. Добавленные слагаемые в (2.2) (в отличие от [16]) обеспечивают выполнение включения

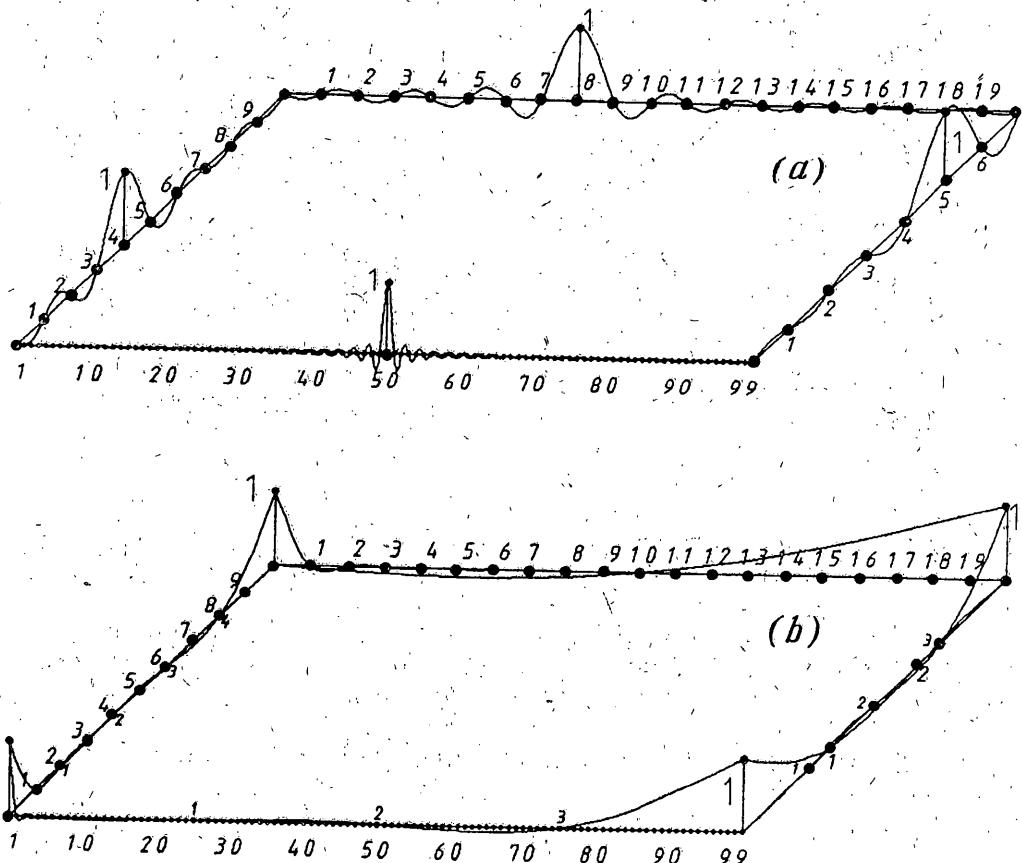
$$w \in C(\bar{\Omega}) \quad (2.4)$$

где $C(\bar{\Omega})$ обозначает класс непрерывных в $\bar{\Omega}$ функций.

В отличие от известного представления классического решения задачи Дирихле [17], не обращающегося в нуль в вершинах, в представлении (2.2) слагаемые, связанные с угловыми точками, выделены отдельно. Полнота в банаховом пространстве $C(\bar{\Omega})$ обеспечивает равномерную сходимость полученных рядов в $\bar{\Omega}$ [18].

Объединяя группу интегралов в (2.2), получим представление

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^4 f_i^{A,\infty}(x, y; A_i) w(A_i) + \int_{\Gamma} f_{\Gamma}^B(x, y; Q \in \Gamma) w(Q \in \Gamma) d\Gamma_Q \quad (2.5)$$



Фиг. 2

на основе граничной функции Грина f_{Γ}^B , удовлетворяющей краевой задаче ($\delta(\dots)$ – дельта-функция Дирака):

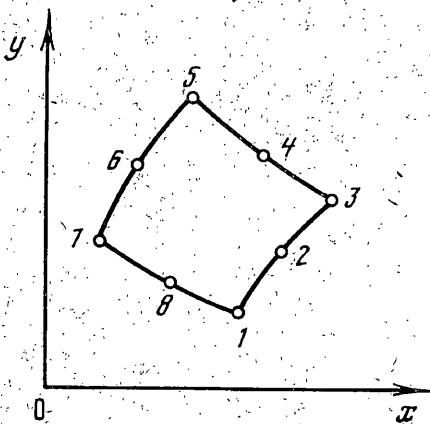
$$\nabla^2 f_{\Gamma}^B(x, y; Q \in \Gamma) = 0, \quad f_{\Gamma}^B(P; Q) = \delta(|P - Q|), \quad P, Q \in \Gamma \quad (2.6)$$

Для одного частного случая задачи Дирихле $w|_{\Gamma} = 1$, ввиду единственности ее решения ($w \equiv 1$), получим из (2.5) следующее тождество:

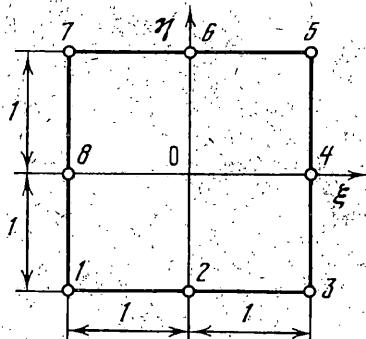
$$\sum_{i=1}^4 f_i^{A, \infty}(x, y; A_i) + \int_{\Gamma} f_{\Gamma}^B(x, y; Q \in \Gamma) d\Gamma_Q = 1, \quad \forall (x, y) \in \bar{\Omega} \quad (2.7)$$

которое является предельным представлением для (1.14).

3. Переходя к приложениям, следует подчеркнуть, что при использовании параметрической концепции в МКЭ [1] (когда функции формы применяются для отображения квадрата на произвольную односвязную область), введем новые изо (суб- или супер) параметрические криволинейные конечные элементы. Вместе с тем такое введение (в рамках параметрического подхода) должно сопровождаться и выбором соответствующих способов численного интегрирования. Поэтому, преследуя именно эту цель, остановимся на решении задачи плоской теории упругости на примере использования восьмиузлового ($n_{ij} = 1$) неполиномиального изопараметрического конечного элемента.



Фиг. 3



Фиг. 4

В физической плоскости: прямоугольной декартовой системе координат xy рассмотрим криволинейный конечный элемент (фиг. 3), все узлы которого пронумерованы от 1 до 8.

В вычислительной плоскости: прямоугольной декартовой системе $\zeta\eta$ координат введем вспомогательный квадрат со стороной, равной 2 (фиг. 4). На сторонах этого квадрата выберем восемь точек в соответствии с числом узлов конечного элемента.

Построенные выше функции формы $\psi_r(\zeta, \eta)$ для $r = \overline{1, 8}$ примут следующий компактный вид:

$$\psi_r = \psi_r^{(1)} + \psi_r^{(2)} \quad (r = \overline{1, 8}) \quad (3.1)$$

$$\psi_1^{(1)} = (1-t)(1-z), \quad \psi_3^{(1)} = t(1-z), \quad \psi_5^{(1)} = tz, \quad \psi_7^{(1)} = (1-t)z$$

$$\psi_r^{(1)} = 0 \quad (r = 2, 4, 6, 8)$$

$$\psi_2^{(2)} = \chi_{11}(z)\sin \pi t, \quad \psi_4^{(2)} = \chi_{21}(t)\sin \pi z, \quad \psi_6^{(2)} = \chi_{21}(z)\sin \pi t$$

$$\psi_8^{(2)} = \chi_{11}(t)\sin \pi z, \quad \psi_1^{(2)} = -\frac{1}{2}(\psi_2^{(2)} + \psi_8^{(2)}), \quad \psi_3^{(2)} = -\frac{1}{2}(\psi_2^{(2)} + \psi_4^{(2)})$$

$$\psi_5^{(2)} = -\frac{1}{2}(\psi_4^{(2)} + \psi_6^{(2)}), \quad \psi_7^{(2)} = -\frac{1}{2}(\psi_6^{(2)} + \psi_8^{(2)}), \quad t = \frac{1}{2}(1+\zeta), \quad z = \frac{1}{2}(1+\eta)$$

Представим перемещения u_x и u_y вдоль осей x и y с помощью функций формы (3.1):

$$u_x = \sum_{r=1}^8 \psi_r(\zeta, \eta) v_{rx}, \quad u_y = \sum_{r=1}^8 \psi_r(\zeta, \eta) v_{ry} \quad (3.2)$$

где v_{rx} и v_{ry} – соответствующие степени свободы для r -го узла ($r = \overline{1, 8}$). Используя, далее, изопараметрический подход, поставим в соответствие каждой точке квадрата (фиг. 4) некоторую точку исходного конечного элемента (фиг. 3), положив

$$x(\zeta, \eta) = \sum_{r=1}^8 \psi_r(\zeta, \eta) x_r, \quad y(\zeta, \eta) = \sum_{r=1}^8 \psi_r(\zeta, \eta) y_r \quad (3.3)$$

где x_r и y_r – заданные координаты r -го узла ($r = \overline{1, 8}$) конечного элемента.

N	5	7	9	11	13	15	t
v_A	1,0646	1,1246	1,1509	1,1620	1,1684	1,1709	
	1,1115	1,1626	1,1823	1,1909	1,1948	1,1963	1,197
τ_C	13,841	14,124	14,282	14,329	14,367	14,367	
	14,032	14,290	14,421	14,470	14,486	14,486	15

Типовой блок матрицы жесткости конечного элемента записывается в виде [19]:

$$[K_{rs}^e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 h[\beta_r]^T [\chi][\beta_s] |[J(\zeta, \eta)]| d\zeta d\eta \quad (r, s = 1, 8) \quad (3.4)$$

$$[\beta_r] = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_r}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \psi_r}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_r}{\partial y} & \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_r}{\partial y} \end{vmatrix} = [J(\zeta, \eta)]^{-1} \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_r}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial \psi_r}{\partial \eta} \end{vmatrix}$$

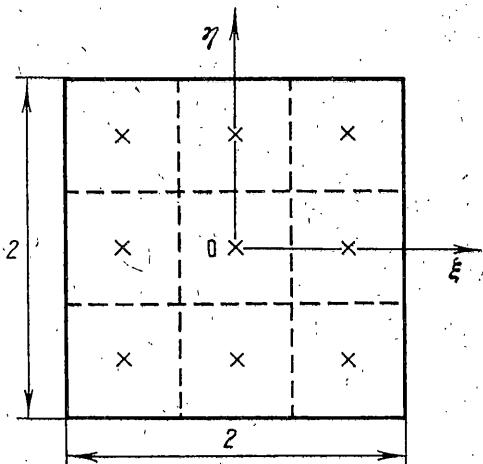
$$[J(\zeta, \eta)] = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix}, \quad [\chi] = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 - \nu) \end{vmatrix}$$

Здесь $|[J(\zeta, \eta)]|$ – определитель матрицы Якоби, h – толщина, E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона, верхний значок (T) означает транспонирование.

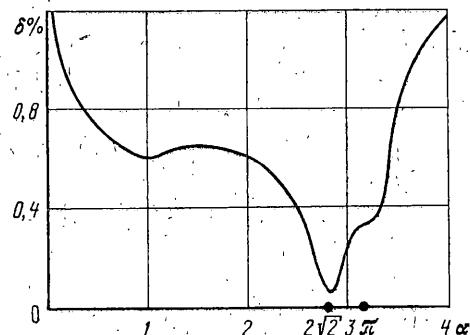
В качестве теста рассмотрим имеющую точное решение [20] простейшую задачу об изгибе прямоугольной консоли от действия единичной силы, приложенной на конце. Для удобства сопоставления с точным решением примем следующие гипотетические значения геометрических и жесткостных параметров прямоугольной полосы: длина $l = 3$, ширина $b = 1$, толщина $h = 0,1$, модуль упругости $E = 1000$ и коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$.

В первых строках таблицы приведены результаты (максимальные значения осевого перемещения v_A на конце консоли A и касательного напряжения τ_C в центре полосы C), полученные с использованием квадратурной формулы Гаусса–Лежандра по 3×3 точкам [19]. Как выявили численные эксперименты точность повышается (вторые строки таблицы), если использовать составную девятиточечную схему интегрирования: при равномерном разбиении конечного элемента на 9 квадратных ячеек с гауссовым интегрированием по схеме 1×1 (формула "средних") в каждой ячейке (фиг. 5). Следует отметить, что выбор такой схемы интегрирования не увеличивает трудоемкости (и соответственно стоимости) вычислений и одновременно упрощает выбор квадратных точек (которые распределены равномерно). Последнее обстоятельство является существенным при использовании конечных элементов с большими значениями числа граничных узлов. Здесь использовались разбиения полосы на $N \times M$ конечных элементов ($M = 3$). Значения точного решения помещены в последнем столбце таблицы (t).

Наличие свободного параметра $\alpha = \alpha_s$ ($n_j = 1$), связанного с характером удовлетворения функций формы определяющему уравнению, "подсказывает" поставить задачу об отыскании "оптимального" параметра, обеспечивающего минимальную погрешность. Результаты такого исследования отражены на фиг. 6, где вдоль оси ординат отложены значения относительной погрешности $\delta\% = |(v_A)_t - v_A| / (v_A)_t \cdot 100\%$ (значок t



Фиг. 5



Фиг. 6

обозначает точное значение). Оказалось, что минимальную погрешность обеспечивает использование функций формы, удовлетворяющих определяющему уравнению приближенно – в соответствии с применением метода прямых [21, 14] при $\alpha = 2\sqrt{2}$ (точное удовлетворение при $\alpha = \pi$ приводит к большей погрешности). Полученный результат отмечался также в [9] в связи с соответствием метода [14] по точечному характеру удовлетворения граничным условиям при конечном числе граничных узлов. Отметим, что одним из достоинств введения новых функций формы является само наличие свободных параметров, рациональный выбор которых может способствовать как отмеченному улучшению точности, так и обеспечиванию устойчивости вычислений.

4. Переидем к задачам изгиба тонкостенных конструкций, расчет которых предоставляет МКЭ "очень мощный тест" [22, с. 155], служащий, в известной степени, эталоном для оценки эффективности каких-либо нововведений в процедуру МКЭ.

В связи с известными трудностями реализации МКЭ на основе теории Кирхгофа-Лява, широкое распространение получили сдвиговые конечные элементы на базе теории типа Тимошенко [23], основным достоинством применения которых является отсутствие столь жесткого требования как непрерывность первых производных от перемещений. Однако, эффект сдвигового запирания, вызываемый линейной или квадратичной аппроксимацией перемещений, приводит при точном интегрировании к неверным результатам. Для устранения этого явления в настоящее время предложено множество приемов [1, 19, 23], из которых наиболее эффективными являются сокращенное и выборочно-сокращенное интегрирование, приводящее, однако, к нулевым энергетическим модам ("механизмам"), для подавления которых, в свою очередь, используется своя численная технология [23]. Вместе с тем, было обнаружено [19], что лагранжева квадратичная интерполяция противостоит запиранию, но может приводить к ложной осцилляции решения (из-за наличия "механизмов"), а сирендиева квадратичная аппроксимация не устраниет запирания для достаточно тонких пластин, но, как правило, и не дает "механизмов" при выборочно-сокращенном интегрировании, что стало мощным стимулом для построения новых элементов, которые бы совмещали достоинства обоих типов аппроксимации. В [24] было показано, что с повышением степени полиномов растет сопротивляемость запиранию. Именно по этой причине, для пластин и оболочек получила распространение p -версия МКЭ [25–27], реализация которой связана, однако, с существенным сгущением узлов (совпадающих с корнями ортогональных полиномов), что ограничивает на практике

степени полиномов до 6–8. Другие способы исключения запирания на основе смешанных и гибридных формулловок отражены в [28–30].

Предметом данного раздела является описание новой схемы реализации МКЭ в перемещениях, исключающей сдвиговое запирание и не приводящей к нулевым энергетическим модам.

В прямоугольной декартовой системе координат $x\bar{y}$ рассмотрим тонкую пластину, срединная плоскость которой совмещена с плоскостью xy . Согласно постановке уточненной теории изгиба в форме Тимошенко–Рейсснера–Миндлина (иногда называемой сдвиговой деформационной теорией первого порядка [31]) представим тангенциальные перемещения u_x, u_y и поперечное смещение w в виде

$$u_x = z\vartheta_x(x, y), \quad u_y = z\vartheta_y(x, y), \quad w = w(x, y) \quad (4.1)$$

где ϑ_x и ϑ_y – компоненты (проекции) угла поворота нормального отрезка.

Как и в случае плоской задачи теории упругости рассмотрим восьмиузловой конечный элемент (фиг. 3, 4). Обозначим через $w_r, \vartheta_{xr}, \vartheta_{yr}$ значения функций $w, \vartheta_x, \vartheta_y$ в типовом узле r ($r = \overline{1, 8}$).

Аналогично предыдущему для аппроксимации функций $w, \vartheta_x, \vartheta_y$ воспользуемся формулами

$$\begin{aligned} w &= \sum_{r=1}^8 \psi_r(\zeta, \eta) w_r, \quad \vartheta_x = \sum_{r=1}^8 \psi_r(\zeta, \eta) \vartheta_{xr} \\ \vartheta_y &= \sum_{r=1}^8 \psi_r(\zeta, \eta) \vartheta_{yr} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Выражения для координат изопараметрического конечного элемента (фиг. 3, 4) имеют вид (3.3). Типовой блок матрицы жесткости $[K_{rs}]$ запишется в виде суммы изгибной и сдвиговой частей [1, 19]:

$$[K_{rs}^e] = [K_{rs}^b] + [K_{rs}^c] \quad (r, s = \overline{1, 8}) \quad (4.3)$$

$$[K_{rs}^b] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 D[\beta_r^b]^T [\chi^b] [\beta_s^b] [J(\zeta, \eta)] | d\zeta d\eta \quad (4.4)$$

$$[K_{rs}^c] = G \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 h[\beta_r^c]^T [\beta_s^c] [J(\zeta, \eta)] | d\zeta d\eta \quad (4.5)$$

$$[\beta_r^b] = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial \psi_r}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \psi_r}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial \psi_r}{\partial y} & \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \end{vmatrix}, \quad [\beta_r^c] = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_r}{\partial x} & \psi_r & 0 \\ \frac{\partial \psi_r}{\partial y} & 0 & \psi_r \end{vmatrix}, \quad [\chi^b] = \begin{vmatrix} 1 & v & 0 \\ v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-v) \end{vmatrix}$$

где G – модуль сдвига, $D = Eh^3/[12(1-v^2)]$.

Функции формы для угловых точек согласно (3.1) представляются суммой билинейного и неполиномиального слагаемых (для промежуточных узлов присутствуют только неполиномиальные функции). Ввиду известного способа [1, 19] исключения запирания для билинейного конечного элемента представляется целесообразным выразить сдвиговую часть матрицы жесткости (4.5) суммой четырех слагаемых, первые три из которых содержат интегралы от билинейных функций или от их произведений на неполиномиальные функции, а последнее слагаемое является ин-

тегралом только от неполиномиальной функции

$$\begin{aligned} [K_{rs}^c] &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 G_i \int_{-1-1}^{1+1} h[\beta_r^{c(i)}][\beta_s^{c(j)}][J] d\zeta_i d\eta_j \\ [\beta_r^{c(k)}] &= \begin{cases} \frac{\partial \psi_r^{(k)}}{\partial x} / dx & \psi_r^{(k)} = 0 \\ \frac{\partial \psi_r^{(k)}}{\partial y} / dy & \psi_r^{(k)} = 0 \end{cases}, \quad \zeta_i = \zeta, \quad \eta_j = \eta \end{aligned} \quad (4.6)$$

Принципиальное отличие полученного представления (4.6) от исходного (4.5) заключается в появившейся возможности производить интегрирование в каждом из слагаемых (4.6) отдельно – по своей, специально подобранный формуле. Численные эксперименты подтвердили целесообразность предложенного расчленения сдвиговой матрицы жесткости и выявили следующую эффективную схему численного интегрирования: для первых трех интегралов в (4.6) следует использовать одноточечную формулу Гаусса–Лежандра, (1×1) , а для последнего – четырехточечную (2×2) . Поскольку применение подобной процедуры для изгибной части матрицы жесткости не привело к практически ощутимым результатам, то там использовалось традиционное интегрирование по девяти (3×3) точкам Гаусса–Лежандра.

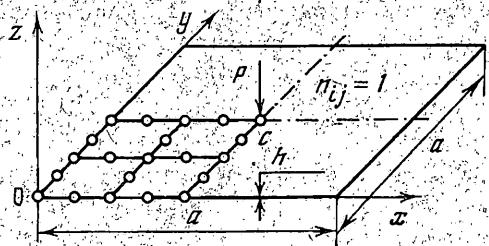
Попытки построить другие схемы численного интегрирования для введенного конечного элемента оказались безуспешными: элемент запирался с утонением пластины.

Существенным здесь является, также, принципиальная невозможность наличия нулевых энергетических мод из-за присутствия неполиномиальных слагаемых в функциях формы (3.1).

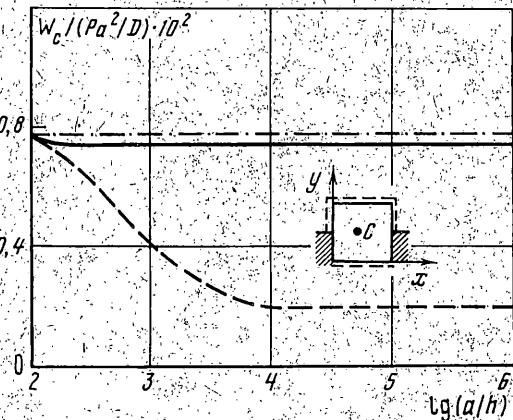
Иллюстрацией эффективности предложенной реализации являются результаты, полученные для конечноэлементной модели свободно опертой квадратной пластины, нагруженной в центре C сосредоточенной нагрузкой P (фиг. 7). На фиг. 8 приведены кривые, которые характеризуют изменение величины максимального безразмерного прогиба $w_C/(Pa^2/D)$ в зависимости от параметра относительной толщины. Штриховыми линиями обозначены значения решения, полученные на сетке 4×4 конечных элементов (фиг. 7), а сплошными линиями – на сетке 6×6 конечных элементов. Цифра 1 соответствует использованию предложенной схемы выборочно-сокращенного интегрирования с предварительным расчленением: сдвиговой части матрицы жесткости, а цифра 2 – решением, полученным с помощью рекомендуемой в [1, 19] схемы: по 3×3 точкам Гаусса–Лежандра для изгибной части и 2×2 точкам для сдвиговой части матрицы жесткости. Штрихпунктирная линия отвечает точному решению бигармонического уравнения для классической теории изгиба пластин Кирхгофа [32], а темными точками обозначено решение уравнений Рейсснера [33], полученное методом конечных разностей [34]. Расчеты проводились при $\nu = 0,3$.

Фиг. 9 отражает зависимость безразмерного центрального прогиба $w_C/(Pa^2/D)$ для квадратной пластины со смешанными (разрывными) граничными условиями, которая защемлена вдоль половины двух противоположных сторон $x = 0, x = a$ и свободно оперта на остальных участках контура. Здесь сплошная линия соответствует использованию сформированных неполиномиальных функций формы с предложенной схемой выборочно-сокращенного интегрирования с предварительным расчленением сдвиговой части матрицы жесткости, а штриховая линия – использованию восьмиузлового квадратичного сирендиева конечного элемента с известной схемой выборочно-сокращенного интегрирования [1, 19]. Результаты получены на сетке 6×6 конечных элементов. Штрихпунктирная линия совпадает с решением, полученным для кирхгофовской пластины методом парных уравнений [35].

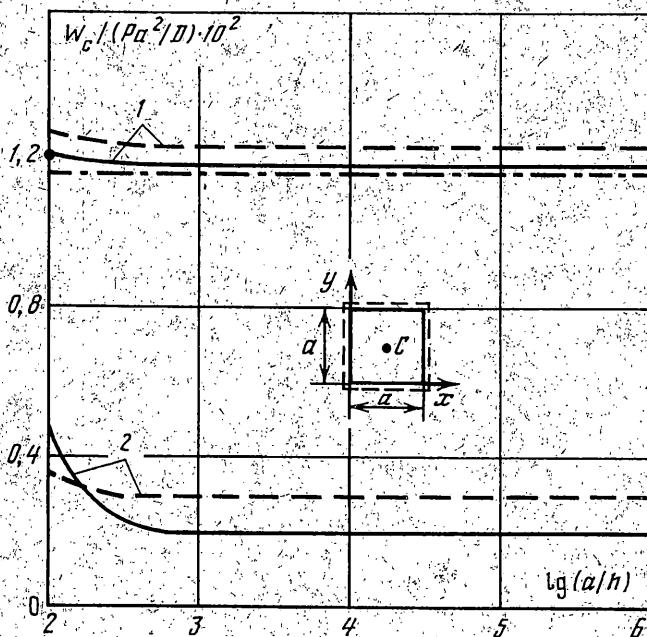
Сопоставление приведенных результатов характеризует эффективность предложенной схемы выборочно-сокращенного интегрирования с предварительным расчленением сдвиговой части матрицы жесткости даже для существенно тонких пластин.



Фиг. 7



Фиг. 9



Фиг. 8

В заключение отметим, что сформированные неполиномиальные представления обладают базисными определяющими свойствами, предъявляемыми к треффцевым системам функций при их реализации как в конечноэлементном [36], так и в граничноэлементном [37] вариантах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The Finite Element Method. New York: Mc Graw-Hill, 1989. V. 1; 1991. V. 2.
2. Szabo B., Babuska I. Finite Element Analysis. New York: Wiley, 1991.
3. Хемминг Р.В. Численные методы для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1972. 398 с.
4. Локушевский О.В., Гавриков М.Б. Начала численного анализа. М.: ТОО "Янус", 1995. 581 с.

5. Krahula J., Polhermus J. Use of Fourier series in the finite element method // AIAA J. 1968. V. 6. N 10. P. 726–728.
6. Pereira E.M.B.R., Freitas J.A.T. A mixed-hybrid finite element model based on orthogonal functions // Int. J. Numer. Meth. Eng. 1996. V. 39. N 8. P. 1295–1312.
7. Колесников И.Ю. Применение модульного подхода к расчету пластин // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 5. С. 136–141.
8. Колесников И.Ю. Приближенное построение функций влияния для многослойных пластин с произвольными граничными условиями // Прикладная механика. 1985. Вып. 21. № 3. С. 87–92.
9. Горшков А.Г., Колесников И.Ю. Граничный оператор Грина и функции формы для канонического блока в пространственной задаче несвязанной термоупругости // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 3. С. 14–21.
10. Горшков А.Г., Колесников И.Ю. Формирование определяющих базисных функций и функций формы для пластинчатого блока с произвольным числом граничных узлов // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 4. С. 130–143.
11. Ильюшин А.А. Загадки механики твердых деформируемых тел // Нерешенные проблемы механики и прикладной математики. М.: МГУ, 1977. С. 68–73.
12. Teixeira de Freitas J.A., Ji Z.-Y. Hybrid-Trefftz finite element formulation for simulation of singular stress fields // Int. J. Numer. Meth. Eng. 1996. V. 39. N 2. P. 281–308.
13. Jirousek J., Zielinski A.P. Survey of Trefftz-type element formulations // Computers and Structures. 1997. V. 63. N 2. P. 225–242.
14. Колесников И.Ю. Метод конечных рядов Фурье и его применение к расчету трехслойных пластин со сложными граничными условиями // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 1. С. 169–175.
15. Сегерлинг Л. Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979. 392 с.
16. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. Л.; М.: Гостехиздат, 1949. 696 с.
17. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 1980. 686 с.
18. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. 496 с.
19. Hughes T.J.R. The Finite Element Method. Englewood, N.J.: Prentice-Hall, 1987.
20. Тимошенко С.П., Гудьёр Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1979. 560 с.
21. Слободянский М.Г. Способ приближенного интегрирования уравнений с частными производными и его применение к задачам теории упругости // ПММ. 1939. Т. 3. Вып. 1. С. 75–81.
22. Стрэнг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977. 349 с.
23. Голованов А.И., Корнишин М.С. Введение в метод конечных элементов статики тонких оболочек. Казань: Изд. КФТИ АН СССР, 1989. 271 с.
24. Tsach U. Locking of thin plate/shell elements // Int. J. Numer. Meth. Eng. 1981. V. 17. N 4. P. 633–644.
25. Akhtar M.M., Basu P.K. A new p -version general plate finite element // Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 1991. V. 85. N. 2. P. 219–236.
26. Zrahat U., Bar-Yoseph P. Plate spectral elements based upon Reissner–Mindlin theory // Int. J. Numer. Meth. Eng. 1995. V. 38. N 8. P. 1341–1360.
27. Fish J., Gutta R. The p -version of finite element for shell analysis // Comput. Mech. 1995. V. 16. N 5. P. 328–340.
28. Chinoš C., Lovadina C. Numerical analysis of some mixed finite element methods for Reissner–Mindlin plates // Comput. Mech. 1995. V. 16. N 1. P. 36–44.
29. Wriggers P., Korelc J. On enhanced strain methods for small and finite deformations of solids // Comput. Mech. 1996. V. 18. N 6. P. 413–428.
30. Jirousek J., Wroblewski A., Szybinski B. A new 12 dof quadrilateral element for analysis of thick and thin plates // Int. J. Numer. Meth. Eng. 1995. V. 38. N 15. P. 2619–2638.
31. Ochoa O.O., Reddy J.N. Finite Element Analysis of Composite Laminates. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers, 1992.
32. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер В. Пластины и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 636 с.

33. Reissner E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates // J. Appl. Mech. 1945. V. 12. N 2. P. 69–77.
34. Craig R.J. Finite difference solutions of Reissner's plate equations // J. Eng. Mech. 1987. V. 113. N 1. P. 31–48.
35. Цейтлин А.И., Гликман Б.Т. Изгиб упругой прямоугольной пластины со смешанными граничными условиями // Тр. ЦНИИ строительных конструкций. 1971. Вып. 17. С. 123–143.
36. Zienkiewicz O.C. Trefftz approximation and the generalized finite element method-history and development// Comput. Assist. Mech. Eng. Sciences. 1997. N 4. P. 367–388.
37. Herrera I. Trefftz–Herrera Method // Comput. Assist. Mech. Eng. Sciences. 1997. № 4. P. 197–211.

Москва

Поступила в редакцию
1.XI.1997