МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1998

УДК 539.3

© 1998 г. А.В. АКСЕНОВ

ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ АБСОЛЮТНО НЕУСТОЙЧИВЫХ СРЕД

Рассматривается система уравнений, описывающая в приближении длинных волн обширный класс абсолютно неустойчивых сред (опрокинутая мелкая вода, гравитирующий газовый слой, перетяжки на плазменном пинче и др.). Найдены симметрии рассматриваемых уравнений. Построены инвариантные решения. Рассмотрена аналогия между системой уравнений движения абсолютно неустойчивых сред и системой уравнений одномерной газовой динамики политропного газа. Построены новые точные решения системы уравнений одномерной газовой динамики.

1. Основные уравнения. Рассмотрим систему уравнений, описывающую эволюцию возмущений в абсолютно неустойчивых средах [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}-\lambda\frac{\partial \rho^{1/\lambda}}{\partial x}=0$$
$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}=0,\quad \lambda\in R/0 \tag{1.1}$$

Система уравнений (1.1) выписана в безразмерных переменных. Здесь переменные имеют следующий смысл: t – время, x – пространственная переменная, u – скорость, ρ $(\rho>0)$ – плотность, λ – параметр, характеризующий среду.

Система уравнений (1.1) описывает в приближении длинных волн обширный класс абсолютно неустойчивых сред (опрокинутая мелкая вода; одномерный нестационарный газ Чаплыгина; гравитирующий газовый слой; перетяжки на плазменном пинче; возмущения солитонов Кортевега – де Вриза, синус-Гордона, Бенджамино – Оно, Кадомцева – Петвиашвили; и др. (см. [1])).

Введем новые зависимые переменные

$$r=\rho^{1/(2\lambda)},\quad z=u/(2\lambda) \tag{1.2}$$

В переменных (1.2) система уравнений (1.1) примет следующий вид:

$$\frac{\partial r}{\partial t}+2\lambda z\frac{\partial r}{\partial x}+r\frac{\partial z}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial z}{\partial t}-r\frac{\partial r}{\partial x}+2\lambda z\frac{\partial z}{\partial x}=0 \tag{1.3}$$

Преобразованием годографа, т.е. переходя от независимых переменных (x, t) к новым независимым переменным (r, z), система уравнений (1.3) сводится к виду

$$\frac{\partial x}{\partial r}=2\lambda z\frac{\partial t}{\partial r}+r\frac{\partial t}{\partial z},\quad \frac{\partial x}{\partial z}=-r\frac{\partial t}{\partial r}+2\lambda z\frac{\partial t}{\partial z} \tag{1.4}$$

При этом предполагается, что якобиан преобразования удовлетворяет условию

$$\frac{D(r,z)}{D(x,t)}\equiv\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial t}-\frac{\partial r}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial x}\neq 0$$

Условием совместности системы (1.4) является уравнение

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r^2}+\frac{(2\lambda+1)}{r}\frac{\partial t}{\partial r}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}=0 \tag{1.5}$$

Уравнение (1.5) представляет собой эллиптический аналог уравнения Эйлера – Пуассона – Дарбу.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r^2}+\frac{(2\lambda+1)}{r}\frac{\partial t}{\partial r}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}=\delta(r-1)\delta(z) \tag{1.6}$$

Уравнение (1.6) описывает фундаментальные решения уравнения (1.5). В работе [2] было показано, что решения системы (1.4), периодические по пространственной переменной x с периодом равным 1, удовлетворяют уравнению (1.6).

2. Симметрии основных уравнений. В работе [2], используя алгоритм нахождения симметрий [3], были найдены операторы симметрии, допускаемые системой уравнений (1.4) и уравнением (1.5).

Предложение 2.1. Система уравнений (1.4) допускает следующий базис конечномерной части алгебры Ли операторов симметрии [2]:

$$X_1=r\frac{\partial}{\partial r}+z\frac{\partial}{\partial z}+x\frac{\partial}{\partial x}$$

$$X_2=\frac{\partial}{\partial z}+2\lambda t\frac{\partial}{\partial x};\quad X_3=t\frac{\partial}{\partial t}+x\frac{\partial}{\partial x}$$

$$X_4=2rz\frac{\partial}{\partial r}+(z^2-r^2)\frac{\partial}{\partial z}+[x-2(2\lambda+1)zt]\frac{\partial}{\partial t}-(2\lambda+1)(2\lambda z^2+r^2)t\frac{\partial}{\partial x}$$

Предложение 2.2. Уравнение (1.5) допускает при $4\lambda^2-1\neq 0$ следующий базис конечномерной части алгебры Ли операторов симметрии [2]:

$$Y_1=\frac{\partial}{\partial z},\quad Y_2=t\frac{\partial}{\partial t},\quad Y_3=r\frac{\partial}{\partial r}+z\frac{\partial}{\partial z}$$

$$Y_4=2rz\frac{\partial}{\partial r}+(z^2-r^2)\frac{\partial}{\partial z}-(2\lambda+1)zt\frac{\partial}{\partial t}$$

Используя метод нахождения симметрий линейных неоднородных уравнений с δ-функцией в правой части, предложенный в [4–6], в [2] были найдены симметрии уравнения (1.6).

Предложение 2.3. Уравнение (1.6) допускает только один оператор симметрии [2]:

$$Y=2rz\frac{\partial}{\partial r}+(z^2-r^2+1)\frac{\partial}{\partial z}-(2\lambda+1)zt\frac{\partial}{\partial t} \tag{2.1}$$

Найдем симметрии, допускаемые системой уравнений (1.4) и уравнением (1.6). Для этого выпишем общий вид оператора симметрии, допускаемого системой уравнений (1.4) $X=\Sigma a^i X_i$ $(i=1\text{–}4)$ или

$$X=r(a^1+2a^4z)\frac{\partial}{\partial r}+[a^1z+a^2+a^4(z^2-r^2)]\frac{\partial}{\partial z}+\{a^3t+a^4[x-2(2\lambda+1)zt]\}\frac{\partial}{\partial t}+$$

$$+[a^1x+2\lambda a^2t+a^3x-a^4(2\lambda+1)(2\lambda z^2+r^2)t]\frac{\partial}{\partial x} \tag{2.2}$$

где a^i – произвольные постоянные. Среди операторов (2.2) найдем те, которые допускаются уравнением (1.6). Из результатов работ [4–6] следует, что при нахождении симметрий линейных неоднородных уравнений с δ-функцией в правой части, можно применять обычный критерий инвариантности [3], рассматривая при этом соответствующие преобразования δ-функции. Рассмотрим однопараметрическую группу преобразований независимых переменных x ($x \in R^m$):

$$\bar{x}^i = f^i(x,a) \quad (i=1,\ldots,m) \tag{2.3}$$

где $f^i_o(x,0) = x^i$, a – параметр группы. Однопараметрической группе преобразований (2.3) соответствует инфинитезимальный оператор

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \xi^i(x) = \left.\frac{\partial f^i(x,a)}{\partial a}\right|_{a=0}$$

Формула преобразования δ-функции имеет вид [7, с. 457]:

$$\delta(\bar{x} - \bar{x}_0) = J^{-1}(x_0, a)\delta(x - x_0)$$

где $J(x,a) = \det\left(\partial\bar{x}^i / \partial x^j\right)$. Тогда

$$Z\delta(x - x_0) = \left.\frac{\partial\delta(\bar{x} - \bar{x}_0)}{\partial a}\right|_{a=0} = -\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\xi^i(x_0)}{\partial x^i}\delta(x - x_0) \tag{2.4}$$

Применяя критерий инвариантности уравнений (1.6) относительно оператора симметрии (2.2) и используя формулу (2.4), находим, что $a^1 = a^3 = 0$, $a^2 = a^4$.

Предложение 2.4. Система уравнений (1.4) и уравнение (1.6) одновременно допускают единственный оператор симметрии

$$X = 2rz\frac{\partial}{\partial r} + (z^2 - r^2 + 1)\frac{\partial}{\partial z} + [x - 2(2\lambda + 1)zt]\frac{\partial}{\partial t} + [2\lambda - (2\lambda + 1)(2\lambda z^2 + r^2)]t\frac{\partial}{\partial x} \tag{2.5}$$

3. Инвариантные решения. Оператор симметрии (2.1) имеет два функционально независимых инварианта

$$\zeta = \frac{r^2 + z^2 + 1}{2r}, \quad w = r^\sigma t \tag{3.1}$$

где $\sigma = {}^1/_2(2\lambda + 1)$. Используя инварианты (3.1), можно найти инвариантные решения уравнения (1.5).

Предложение 3.1. Решения уравнения (1.5), инвариантные относительно оператора симметрии (2.1), имеют следующий вид

$$t = r^{-\sigma}[c_1 P_{-\sigma}(\zeta) + c_2 Q_{-\sigma}(\zeta)] \tag{3.2}$$

где $P_{-\sigma}(\zeta)$, $Q_{-\sigma}(\zeta)$ – функции Лежандра первого и второго рода [8]; c_1, c_2 – произвольные постоянные.

В работе [2] были найдены инвариантные фундаментальные решения уравнения (1.5), соответствующие оператору симметрии (2.1).

Предложение 3.2. Инвариантные решения уравнения (1.6), соответствующие оператору симметрии (2.1), имеют следующий вид [2]:

$$t = r^{-\sigma}\left[cP_{-\sigma}(\zeta) - \frac{1}{2\pi}Q_{-\sigma}(\zeta)\right]$$

где c – произвольная постоянная.

Найдем инвариантные решения системы уравнений (1.4), соответствующие оператору симметрии (2.5). Инварианты оператора симметрии (2.5) удовлетворяют уравнению

$$XI = 0 \tag{3.3}$$

Уравнение (3.3) имеет три функционально независимых решения. В качестве первого из них можно взять инвариант ζ из (3.1). Для нахождения двух оставшихся функционально независимых решений уравнения (3.3) рассмотрим биполярную систему координат ξ, θ [9, с. 199]:

$$r = \frac{\operatorname{sh}\xi}{\operatorname{ch}\xi + \cos\theta}, \quad z = \frac{\sin\theta}{\operatorname{ch}\xi + \cos\theta}$$

$$\xi = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{(r+1)^2 + z^2}{(r-1)^2 + z^2}\right], \quad \theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{2z}{1 - r^2 - z^2}\right) \tag{3.4}$$

где $\xi \geqslant 0$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$. В биполярной системе координат (3.4) оператор симметрии (2.5) принимает следующий вид

$$X = 2\frac{\partial}{\partial\theta} + \left[x - 2(2\lambda+1)\frac{\sin\theta}{\operatorname{ch}\xi + \cos\theta}t\right]\frac{\partial}{\partial t} + Rt\frac{\partial}{\partial x}$$

$$R = -2\lambda(2\lambda+1)\frac{\sin^2\theta}{(\operatorname{ch}\xi + \cos\theta)^2} - (2\lambda+1)\frac{\operatorname{sh}^2\xi}{(\operatorname{ch}\xi + \cos\theta)^2} + 2\lambda \tag{3.5}$$

Два оставшихся функционально независимых решения уравнения (3.3) ищем в виде

$$I = A(\xi, \theta)t + B(\xi, \theta)x \tag{3.6}$$

Подставляя (3.6) в уравнение (3.3) и приравнивая к нулю коэффициенты при x и t, получаем следующую систему уравнений для определения $A(\xi, \theta)$ и $B(\xi, \theta)$:

$$2\frac{\partial A}{\partial\theta} - 2(\lambda+1)\frac{\sin\theta}{\operatorname{ch}\xi + \cos\theta}A + RB = 0$$

$$A + 2\partial B / \partial\theta = 0 \tag{3.7}$$

Из системы уравнений (3.7) получаем уравнение для определения $B(\xi, \theta)$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial\theta^2} - 2(\lambda+1)\frac{\sin\theta}{\operatorname{ch}\xi + \cos\theta}\frac{\partial B}{\partial\theta} - \frac{R}{4}B = 0 \tag{3.8}$$

Решение уравнения (3.8) ищем в виде

$$B = (\operatorname{ch}\xi + \cos\theta)^{-\lambda - 1/2}\varphi(\xi, \theta) \tag{3.9}$$

Подставляя (3.9) в уравнение (3.8), получаем следующее уравнение для определения $\varphi(\xi, \theta)$:

$$\partial^2\varphi / \partial\theta^2 + \tfrac{1}{4}\varphi = 0 \tag{3.10}$$

Решая уравнение (3.10), находим два оставшихся функционально независимых решения уравнения (3.3).

Предложение 3.3. Оператор симметрии (2.5) имеет три функционально независимых инварианта

$$I_1 = \zeta = \operatorname{cth}\xi$$

$$I_2 = S\left\{\left[-(2\lambda+1)\frac{\sin\theta}{\operatorname{ch}\xi + \cos\theta}\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\right]t + \cos\frac{\theta}{2}x\right\}$$

$$I_3 = S\left\{-\left[(2\lambda+1)\frac{\sin\theta}{\operatorname{ch}\xi + \cos\theta}\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\right]t + \sin\frac{\theta}{2}x\right\}, \tag{3.11}$$

$$S = (\operatorname{ch}\xi + \cos\theta)^{-\lambda - 1/2}$$

В биполярной системе координат (3.4) система уравнений (1.4) принимает следующий вид

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}=2\lambda\frac{\sin\theta}{\operatorname{ch}\xi+\cos\theta}\frac{\partial t}{\partial \xi}+\frac{\operatorname{sh}\xi}{\operatorname{ch}\xi+\cos\theta}\frac{\partial t}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta}=-\frac{\operatorname{sh}\xi}{\operatorname{ch}\xi+\cos\theta}\frac{\partial t}{\partial \xi}+2\lambda\frac{\sin\theta}{\operatorname{ch}\xi+\cos\theta}\frac{\partial t}{\partial \theta} \tag{3.12}$$

Инвариантные решения системы уравнений (3.12), соответствующие оператору симметрии (2.5), ищем в виде $I_2=F(\zeta)$, $I_3=G(\zeta)$. Тогда из (3.11) следует, что

$$t=S^{-1}\left(\sin\frac{\theta}{2}F-\cos\frac{\theta}{2}G\right)$$

$$x=S^{-1}\left\{\left[(2\lambda+1)\frac{\sin\theta}{\operatorname{ch}\xi+\cos\theta}\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right]F+\left[-(2\lambda+1)\frac{\sin\theta}{\operatorname{ch}\xi+\cos\theta}\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right]G\right\} \tag{3.13}$$

Подставляя выражения (3.13) в систему уравнений (3.12), получаем обыкновенные дифференциальные уравнения для определения неизвестных функций $F(\xi)$ и $G(\xi)$:

$$(\zeta^2-1)F'-\lambda\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)F=0$$

$$(\zeta^2-1)G'-\lambda\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)G=0 \tag{3.14}$$

Решение уравнений (3.14) имеет вид

$$F=A_1(\zeta^2-1)^{\lambda/2}\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)^{\lambda}=A_1\left(\frac{\operatorname{ch}\xi-1}{\operatorname{sh}^2\xi}\right)^{\lambda}$$

$$G=A_2(\zeta^2-1)^{\lambda/2}\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)^{\lambda}=A_2\left(\frac{\operatorname{ch}\xi+1}{\operatorname{sh}^2\xi}\right)^{\lambda} \tag{3.15}$$

где A_1, A_2 – произвольные постоянные.

Предложение 3.4. Решения системы уравнений (1.4), инвариантные относительно оператора симметрии (2.5), определяются выражениями (3.13), (3.15).

4. Аналогия с одномерной газовой динамикой политропного газа. Рассмотрим преобразование

$$x=i\bar{x},\quad t=\bar{t},\quad u=i\bar{u},\quad \rho=\bar{\rho} \tag{4.1}$$

где $i^2=-1$. Это преобразование преобразует систему уравнений (1.1) в систему уравнений одномерной газовой динамики политропного газа с показателем политропы $\gamma=(\lambda+1)/\lambda$ [10]. Используя решение (3.2) и преобразование (4.1), получаем новое решение системы уравнений одномерной газовой динамики.

Предложение 4.1. Точное решение системы уравнений одномерной газовой динамики политропного газа имеет вид

$$\bar{t}=\bar{\rho}^{-\frac{\gamma+1}{4}}\left[\bar{c}_1P_{-\mu}(\bar{\zeta})+\bar{c}_1Q_{-\mu}(\bar{\zeta})\right] \tag{4.2}$$

где $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$ – произвольные постоянные, а

$$\mu=\frac{1}{2}\frac{\gamma+1}{\gamma-1},\quad \bar{\zeta}=\frac{1}{2}\bar{\rho}^{-\frac{\gamma+1}{2}}\left[\bar{\rho}^{\gamma-1}-\left(\frac{\gamma-1}{2}\bar{u}\right)^2+1\right]$$

Частный случай решения (4.2) был указан в [10, с. 193].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 96-01-01742 и 97-01-00570).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жданов В.К., Трубников Б.А.* Квазигазовые неустойчивые среды. М.: Наука, 1991. 176 с.
2. *Аксенов А.В.* Периодические инвариантные решения уравнений абсолютно неустойчивых сред // Изв. АН. МТТ. 1997. № 2. С. 14–20.
3. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.
4. *Аксенов А.В.* Симметрии линейных уравнений с частными производными и фундаментальные решения // Успехи математических наук. 1994. Т. 49. Вып. 4. С. 143–144.
5. *Аксенов А.В.* Симметрии фундаментальных решений линейных уравнений с частными производными // Фундаментальные проблемы математики и механики. Математика. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1994. С. 213–215.
6. *Аксенов А.В.* Симметрии линейных уравнений с частными производными и фундаментальные решения // Докл. АН. 1995. Т. 342. № 2. С. 151–153.
7. *Choquet-Bruhat Y., De Witt-Morette C.* Analysis, Manifolds and Physics. Part 1: Basics. Amsterdam: North-Holland, 1982. 630 p.
8. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1973. 296 с.
9. *Морс Ф.М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Т. 2. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 896 с.
10. *Курант Р., Фридрихс К.* Сверхзвуковое течение и ударные волны. М.: Изд-во иностр. лит., 1950. 426 с.

Москва

Поступила в редакцию
12.X.1997