

УДК 539.214; 539.374

© 1997. И.Э. КЕЛЛЕР, П.В. ТРУСОВ

## ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРИИ БИШОПА – ХИЛЛА ПЛАСТИЧЕСКОГО ФОРМОИЗМЕНЕНИЯ МОНОКРИСТАЛЛА

Многие современные модели пластического деформирования металлических поликристаллов опираются на классический анализ пластического формоизменения монокристалла, выполненный в [1–4], где рассматривались ГЦК-монокристаллы с жесткопластическими свойствами, деформирующиеся путем кристаллографического скольжения. Закон пластического течения, установленный Э. Шмидом из опытов на единичное скольжение монокристаллов, авторы [2] обобщили на произвольное деформированное состояние и с помощью полученного критерия текучести (называемого критерием Бишопа – Хилла) и закона течения в терминах сдвигов по системам скольжения и приведенных напряжений обосновали локальный принцип максимума и принцип минимума суммарного сдвига. Указанный принцип максимума был использован в [3] для облегчения процедуры нахождения тензора напряжений поликристалла, физически связанного с заданным тензором приращений пластических деформаций, а принцип минимума ранее использовался автором [1] для нахождения физического возможного набора сдвигов по системам скольжения монокристалла, реализующих заданный тензор деформаций, что было необходимо для расчета поворотов решетки.

Несмотря на частое применение критерия Бишопа – Хилла вплоть до настоящего времени, его использование в сочетании с неассоциированным законом течения, в ряде моделей поликристалла с упругими деформациями и в связи со специфическими свойствами поверхности текучести – многогранника оказывается неоправданно усложненным. Имеется замечание и физического характера: согласно критерию Бишопа – Хилла текучесть монокристалла определяется максимальным приведенным напряжением, что не всегда хорошо подтверждается экспериментально [5] и имеется необходимость в формулировке критериев, определяющих состояние текучести с учетом всех приведенных напряжений. Необходимость учета всех компонент тензора напряжений имеется и при описании процесса деформирования. Так, авторы [6], анализируя результаты опытов на единичное скольжение монокристалла, пришли к выводу, что содержательной следует считать зависимость интенсивностей тензоров напряжений и пластических деформаций, а не приведенного напряжения и сдвига действующей системы скольжения.

Более поздняя публикация Р. Хилла [7] позволяет дополнить классический анализ случаями, когда функция текучести отличается от предложенной авторами [2]. В настоящей работе критерий Шмида обобщается на произвольное напряженное состояние с использованием некоторой подходящей функции, имеющей свойства нормы. Для рассматриваемых обобщений выводятся соответствующие локальные принципы минимума и максимума. Более подробно исследуется семейство степенных функций текучести, для которых с помощью доказанных принципов выводятся и исследуются определяющие соотношения. Классический анализ в рамках принятой степенной функции будет иметь место при устремлении показателя степени к бесконечности.

**1. Сведения из механики пластичности монокристалла.** Рассмотрим процессы формоизменения монокристалла, ограниченные малыми градиентами перемещений. Мгновенное пластическое формоизменение может быть описано девиатором  $\epsilon^p$  тензора скоростей деформаций, тогда сопряженной силовой переменной будет являться девиатор тензора напряжений Коши  $\sigma$ , а удельная мощность формоизменения запишется как  $\epsilon^p : \sigma$ .

Введем набор симметризованных диад

$$\mathbf{M}_k = \frac{1}{2}(\mathbf{n}_k \mathbf{b}_k + \mathbf{b}_k \mathbf{n}_k) \quad (k=1, \dots, 12, \Sigma k) \quad (1.1)$$

каждая из которых состоит из единичных векторов, характеризующих геометрию (степень свободы)  $k$ -й системы скольжения ГЦК-монокристалла,  $\mathbf{n}_k$  – нормали к плоскости скольжения и  $\mathbf{b}_k$  – направления скольжения. Непосредственной проверкой можно убедиться, что данный набор диад образует избыточный базис пространства симметричных девиаторов, являющегося пятимерным. Выбор ГЦК-решетки в данном случае существует.

Для большинства ГЦК-монокристаллов движущими силами кристаллографического скольжения являются так называемые приведенные напряжения

$$\tau_k = \sigma : \mathbf{M}_k \quad (k=1, \dots, 12) \quad (1.2)$$

т.е. система совместных инвариантов тензора напряжений  $\sigma$  и "кристаллографических" диад  $\mathbf{M}_k$ ; каждый из них является инвариантом соответствующей системы скольжения. Девиатор  $\epsilon^p$  образуют скорости сдвигов  $\gamma^k$  по системам скольжения монокристалла, так что справедливо

$$\epsilon^p = \gamma^k \mathbf{M}_k \quad (1.3)$$

(величины  $\gamma^k$  в разложении (1.3) могут быть любого знака). В (1.3) и далее принимается правило Эйнштейна. Используя данное представление тензора  $\epsilon^p$  и учитывая обозначение (1.2), удельная мощность формоизменения может быть записана в терминах приведенных напряжений и скоростей сдвигов  $\epsilon^p : \sigma = \gamma^k \tau_k$ .

Обратимся к изучению состояния текучести монокристалла и рассмотрим сначала случаи начала единичного скольжения, которым в данной работе будем считать скольжение по одной из систем скольжения (например,  $l$ -й) при условии, что тензор  $\sigma$  пропорционален диаде  $\mathbf{M}_l$ . Введенное таким образом понятие единичного скольжения отличается от принятого (нестрогого) в физике твердого тела, но оно будет полезным далее при обобщении критерия текучести монокристалла. Для случаев единичного скольжения отождествленных ГЦК-монокристаллов установлено (см. библиографию в [2]), что процесс начинается при достижении приведенным напряжением  $\tau_l$  рассматриваемой  $l$ -й системы определенной критической величины  $\tau_*$  (единой для всех систем скольжения):

$$|\tau_l| = \tau_* \quad (1.4)$$

Условие (1.4), примененное для напряженных состояний, близких к единичному скольжению, составляет суть критериальной части закона Шмида. В настоящей работе рассматриваются изотропно упрочняющиеся монокристаллы, так что при начальной кубической симметрии пластических свойств монокристалла эта симметрия будет сохраняться и в процессе его формоизменения. В таком случае критическое сдвиговое напряжение  $\tau_*$ , зависящее от предыстории деформирования, должно оставаться одинаковым для всех систем скольжения в течение процесса.

Критерий текучести для произвольного напряженного состояния был предложен авторами [1, 2] в виде

$$\max_k |\tau_k| = \tau_* \quad (1.5)$$

(функцию в левой части (1.5) называют функцией текучести Бишопа – Хилла). Очевидно, что закон (1.5) есть только одно из возможных обобщений критерия (1.4) и сводится к последнему при случаях единичного скольжения. Авторы считают, что имеют право на существование также и некоторые другие формулировки критерия текучести монокристалла, записываемые в виде

$$\varphi(\tau_1, \dots, \tau_{12}) = r_* \quad (1.6)$$

где  $\varphi(\dots)$  — выпуклая функция, равноправная относительно аргументов и удовлетворяющая для любого скаляра  $\lambda$  равенству  $\varphi(\lambda\tau_1, \dots, \lambda\tau_{12}) = |\lambda| \varphi(\tau_1, \dots, \tau_{12})$ , а  $r_* > 0$  — критический параметр размерности напряжения. Этот параметр должен быть выбран таким образом, чтобы критерий (1.6) предсказывал текучесть при всех случаях единичного скольжения одновременно с критерием (1.4) (такой выбор  $r_*$  возможен, поскольку приведенные напряжения  $\tau_k$  входят в  $\varphi(\dots)$  равноправно). Например, в случае  $\varphi(\tau_1, \dots, \tau_{12}) = \max |\tau_k|$  это условие запишется как  $r_* = \tau_*$ . В таком случае поверхность (1.6) в пространстве девиаторов напряжений будет проходить через точки текучести вдоль всех направлений, задаваемых диадами  $M_k$  ( $k = 1, \dots, 12$ ), и в противоположных направлениях, что задает условие (1.4). Оставшаяся свобода выбора функции  $\varphi(\dots)$  необходима для наиболее точной аппроксимации уравнением (1.6) формы поверхности текучести монокристалла в пространстве девиаторов напряжений.

Необходимо добавить, что скаляры  $\tau_k$  в совокупности нечувствительны к ортогональным преобразованиям из группы кубической симметрии (точнее, кубической сингонии)  $G$ . Действительно, для любого преобразования  $O \in G$   $\tau_k = (O^T \cdot \sigma \cdot O) : M_k = \sigma : (O \cdot M_k \cdot O^T) = \sigma : M_l = \tau_l$ , т.е. множество скаляров  $\tau_k$  отображается на себя. Поэтому  $G$ -инвариантная функция тензора напряжений  $\sigma$ , в которую зависимость от  $\sigma$  входит через скаляры  $\tau_k$  должна быть равноправной относительно каждого из этих скаляров, что формально объясняет наложенное выше требование на функцию текучести (1.6). Заметим, что метод выделения скалярных инвариантов (целого рационального базиса), предложенный в [8], не учитывает свойства функций, аргументами которых могут являться элементы этого базиса, поэтому  $G$ -инвариантная функция тензора  $\sigma$ , присутствующая в (1.6), не может быть построена согласно такому методу.

Для моделирования процесса пластического течения принимается градиентальный закон, связывающий скорость сдвига и приведенное напряжение каждой системы скольжения, ассоциированный со сформулированным "нешмидовским" критерием текучести (1.6).

**2. Экстремальные принципы.** Для среды, текучесть которой описывается выбранной функцией текучести, далее выводятся соответствующие локальные экстремальные принципы. Используется теория непрерывных линейных функционалов на нормированных пространствах, с необходимыми сведениями из которой рекомендуется предварительно ознакомиться в приложении.

Поставим задачу в терминах этой теории. Рассмотрим двенадцатимерное пространство  $A_{12}$  векторов  $\tau$  размерности напряжения. Любой такой вектор может быть задан координатами  $\tau_k$  ( $k = 1, \dots, 12$ ) в некотором базисе  $e^k \in A_{12}$ . Не все  $\tau \in A_{12}$  имеют физический смысл "векторов напряжений". Может быть выделено множество векторов, связанных с элементами  $\sigma$  пространства девиаторов напряжений выражением (1.2). Это множество является пятимерным подпространством, т.е.  $A_5 \subset A_{12}$ , вследствие наличия среди диад  $M_k$  пяти линейно независимых. Рассмотрим сопряженное  $A_{12}$  пространство  $A_{12}^*$  векторов  $\gamma$  размерности скоростей деформаций с компонентами  $\gamma^k$  в сопряженном базисе  $e_k \in A_{12}^*$ . Действуя функционалами  $\gamma \in A_{12}^*$  на элементы  $\tau \in A_5$ , будем иметь в силу (1.2) и (1.3)  $\gamma \cdot \tau = \gamma^k \tau_k = \gamma^k \sigma : M_k = \sigma : e^p$ , т.е. значения  $\gamma \cdot \tau$  представляют удельную мощность (не обязательно физически реализуемую) формоизменения монокристалла. В  $A_{12}^*$  может быть выделено подпространство  $A_5^*$ , сопряженное  $A_5$ , однако далее потребуются рассматривать и элементы  $\gamma \in A_{12}^*$ .

Нормируем пространство  $A_{12}$  с помощью введенной функции  $\varphi(\dots)$ , очевидно,

являющейся нормой<sup>1</sup>, тогда сопряженное пространство  $A_{12}^*$  будет также нормированным с двойственной нормой  $\psi(\dots)$  (см. приложение). Подпространство  $A_5$  нормировано, поскольку нормировано объемлющее пространство  $A_{12}$ ; однако норма в сопряженном пространстве  $A_5^*$ , вводимая по определению, не связана в общем случае с нормой  $\psi(\dots)$  и далее обозначается  $\psi_0(\dots)$ . Ниже выписаны пары введенных в рассмотрение сопряженных нормированных пространств:  $(A_{12}, \varphi(\dots))$  и  $(A_{12}^*, \psi(\dots))$ ,  $(A_5, \varphi(\dots))$  и  $(A_5^*, \psi_0(\dots))$ .

Введем необходимые определения. Обозначим образ  $\epsilon^p$  в пространстве  $A_5^*$  как  $\gamma_0$ . Вектор  $\gamma \in A_{12}^*$  назовем геометрически возможным, если  $\gamma \cdot \tau = \gamma_0 \cdot \tau \quad \forall \tau \in A_5$ . С математической точки зрения геометрически возможный  $\gamma$  есть продолжение  $\gamma_0$  на все  $A_{12}^*$ , а с "прикладной" точки зрения такой вектор  $\gamma$  удовлетворяет ограничению (1.3).

Найдем в пространстве  $A_5$  элемент  $\tau_0$ , сопряженный  $\gamma_0$ . С математической точки зрения этот элемент доставляет значение нормы  $\gamma_0$ , т.е.

$$\psi_0(\gamma_0) = \gamma_0 \cdot \tau_0 / \varphi(\tau_0) \quad (2.1)$$

С "прикладной" точки зрения элемент  $\tau_0$  удовлетворяет принципу максимума в форме

$$\gamma_0 \cdot \tau \rightarrow \max, \quad \varphi(\tau) = r_*, \quad \tau \in A_5 \quad (2.2)$$

из которого в случае гладкости  $\varphi(\dots)$  получаем закон

$$\gamma_0 = \lambda \nabla \varphi(\tau), \quad \varphi(\tau) = r_*, \quad \tau \in A_5 \quad (2.3)$$

Принцип (2.2) с помощью соотношений (1.2) и (1.3) и обозначения  $\forall \tau \in A_5 \quad \varphi(\tau) = \Phi(\sigma)$  записывается в виде известного в пластичности локального принципа максимума

$$\epsilon^p : \sigma \rightarrow \max, \quad \Phi(\sigma) = r_* \quad (2.4)$$

а закон (2.3) – в виде также известного ассоциированного закона течения

$$\epsilon^p = \lambda \nabla \Phi(\sigma), \quad \Phi(\sigma) = r_* \quad (2.5)$$

что выясняет характер связи  $\tau_0$  и  $\gamma_0$ .

Физически возможным назовем вектор  $\gamma \in A_{12}^*$ , сопряженный  $\tau_0$ . С математической точки зрения физически возможный  $\gamma$  удовлетворяет равенству

$$\psi(\gamma) = \gamma \cdot \tau_0 / \varphi(\tau_0) \quad (2.6)$$

С "прикладной" точки зрения если  $\gamma$  – физически возможен, то  $\tau_0$  удовлетворяет принципу максимума в форме

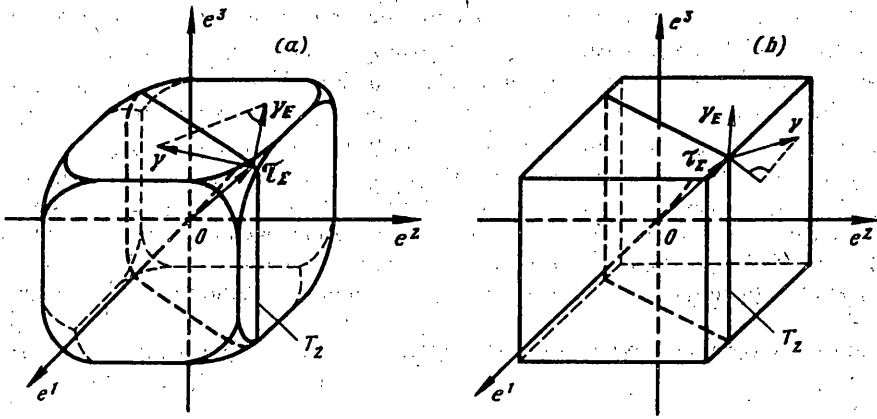
$$\gamma \cdot \tau \rightarrow \max, \quad \varphi(\tau) = r_*, \quad \tau \in A_5 \quad (2.7)$$

где ограничение  $\tau \in A_5$  выделяет имеющие физический смысл случаи. В случае гладкости  $\varphi(\dots)$  из (2.7) получаем закон

$$\gamma = \lambda \nabla \varphi(\tau), \quad \varphi(\tau) = r_*, \quad \tau \in A_5 \quad (2.8)$$

который отличается от (2.3), поскольку здесь градиент имеет частные производные

<sup>1</sup> Далее примем обозначение  $\varphi(\tau_1, \dots, \tau_{12}) = \varphi(\tau) \quad \forall \tau \in A_{12}$ .



Фиг. 1

вдоль всех базисных векторов  $e_k \in A_{12}^*$  и может "не вмещаться" в пространство  $A_5^*$ , что показано на фиг. 1, а. Если  $\gamma$  – физически и геометрически возможный, то из принципа (2.7) с помощью связей (1.2) и (1.3) следует локальный принцип максимума (2.4), из которого в случае гладкости  $\Phi(\dots)$  следует ассоциированный закон течения (2.5). Таким образом, пара геометрически и физически возможный  $\gamma$  и сопряженный  $\tau_0$  удовлетворяет (с учетом соотношений (1.2) и (1.3)) локальному принципу максимума. Закон (2.8), аналитическая формулировка этой связи в случае гладкости  $\Phi(\dots)$ , представляет собой совокупность законов течения для всех систем скольжения и также удовлетворяет данному принципу. Таким образом, обоснован локальный принцип максимума в случае, когда течение по системам скольжения монокристалла развивается согласно индивидуальным законам, связывающим вектор напряжений с  $\tau_0$  и сопряженный ему геометрически и физически возможный вектор скоростей сдвигов, в случае гладкости функции  $\Phi(\dots)$  записываемым в виде (2.8).

Докажем далее принцип минимума сдвига. Рассмотрим геометрически возможный  $\gamma$ . Для выбранного  $\gamma \in A_{12}^*$  и любого  $\tau \in A_5$  имеет место неравенство

$$\Psi(\gamma) \geq \gamma \cdot \tau / \Phi(\tau) \quad (2.9)$$

которое при  $\tau = \tau_0$ , с учетом, что  $\gamma$  есть продолжение  $\gamma_0$ , и равенства (2.1) примет вид

$$\Psi(\gamma) \geq \frac{\gamma \cdot \tau_0}{\Phi(\tau_0)} = \frac{\gamma_0 \cdot \tau_0}{\Phi(\tau_0)} = \Psi_0(\gamma_0) \quad (2.10)$$

С математической точки зрения можно потребовать, чтобы продолжение  $\gamma$  функционала  $\gamma_0$  сохраняло норму, т.е.  $\Psi(\gamma) = \Psi_0(\gamma_0)$ , в силу чего из (2.10) следует равенство (2.6). Т.е. с прикладной точки зрения, такой  $\gamma$  является физически возможным. Следовательно, геометрически и физически возможный  $\gamma \in A_{12}^*$  существует и находится как решение задачи

$$\Psi(\gamma) \rightarrow \min, \quad \gamma^k M_k = \epsilon^p \quad (2.11)$$

Таким образом, доказана теорема существования геометрически и физически возможного  $\gamma$  и принцип минимума сдвига, позволяющий найти этот  $\gamma$ . Поскольку геометрически и физически возможный  $\gamma$  есть продолжение  $\gamma_0$  с сохранением нормы, то при гладкости и строгой выпуклости нормы  $\Phi(\dots)$  он единственный и находится из системы (2.8). Следовательно, закон (2.8) в таком случае всегда дает и геометрически

возможный  $\gamma$ . Если функция  $\varphi(\dots)$  не гладкая, то физически возможный  $\gamma$  может не быть геометрически возможным, что схематически показано на фиг. 1, в.

Из доказанных утверждений могут быть получены известные факты. Полагая  $\varphi(\tau)$  функцией текучести Бишопа – Хилла, т.е.  $\varphi(\tau) = \max_k |\tau_k|$  (см. уравнение (1.5)), из (2.7) может быть получен закон течения, принятый в [2]. По доказанному здесь этот закон удовлетворяет локальному принципу максимума (2.4), что впервые показано в [2], и принципу минимума сдвига (2.10) с нормой  $\psi(\gamma) = \sum |\gamma^k|$ , (являющейся двойственной нормой (1.5)), который впервые был предложен автором [1] в словесной форме и доказан авторами [2]. Также для этого, классического, случая доказано существование геометрически и физически возможного набора сдвигов, что впервые было сделано автором [4].

**3. Степенной критерий текучести.** Рассмотрим в качестве функций текучести степенные нормы

$$\varphi(\tau) = \left( \sum_k |\tau_k|^q \right)^{1/q}, \quad 2 \leq q < \infty$$

Условие текучести (1.6) в таком случае запишется в терминах тензоров в виде

$$\Phi(\sigma) \equiv \left( \sum_k |\sigma : M_k|^q \right)^{1/q} = r_* \quad (3.1)$$

Потребуем, чтобы критерий (3.1) сводился к условию (1.4) для случаев единичного скольжения. То есть, критерий (3.1) должен предсказывать текучесть при  $\sigma = \tau_* M_l \forall l$ . Тогда параметр  $r_*$  связывается с критическим сдвиговым напряжением выражением  $r_* = \tau_* \Phi(M_l)$ , где  $\Phi(M_l)$  вследствие равноправности данной функции к диадам систем скольжения не зависит от выбора  $l$ , а зависит от  $q$ ; обозначая  $\Phi(M_l) = v(q)$ , получим

$$r_* = \tau_* v(q) \quad (3.2)$$

Может быть показано, что уравнение (3.1) задает ограниченную, гладкую и строго выпуклую поверхность в пространстве напряжений, причем ограниченность обеспечивается наличием среди кристаллографических диад ГЦК-решетки базиса в пространстве симметричных девиаторов. Также можно доказать, что поверхности (3.1) при  $q \rightarrow \infty$  стремятся к поверхности многогранника Бишопа – Хилла, находясь внутри него. Авторы [10], использовавшие функцию (3.1) в качестве вязкоупругого потенциала, доказали вышеупомянутые свойства.

Условие (3.2) обеспечивает наличие 24 общих точек поверхности (3.1) при любом  $q$  и многогранника Бишопа – Хилла, соответствующих единичному скольжению. В случае деформирования, отличного от единичного скольжения, текучесть согласно (3.1) наступает, когда ни на одной системе скольжения не выполняется условие Шмида (1.4). Однако можно говорить, что условия (1.4) выполняются приближенно, а точность приближения может быть выбрана сколь угодно высокой увеличением  $q$ . Отличием построенного критерия от формулировки Бишопа – Хилла является то, что он учитывает вклад всех приведенных напряжений в условие текучести, тогда как в классическом критерии состояние текучести определяется максимальным. С феноменологической точки зрения степенной критерий имеет по сравнению с критерием Бишопа – Хилла дополнительный определяющий форму поверхности текучести параметр – показатель степени.

Построенному критерию может быть придан энергетический смысл. С этой целью рассмотрим процесс предшествующего текучести деформирования, считая его обратимым. В качестве потенциала обратимых деформаций рассмотрим функцию

$$f(\sigma) \equiv \sum_k |\sigma : M_k|^q \quad (3.3)$$

Тогда обратимые деформации будут связаны с напряжениями градиентальным соотношением

$$\epsilon^r = p \nabla f(\sigma) \quad (3.4)$$

где  $p > 0$  – константа материала<sup>2</sup>. При  $q > 2$  кривая обратимого участка деформирования согласно (3.4) будет иметь выпуклость вверх, что качественно согласуется с экспериментом. Рассчитаем энергию обратимых деформаций, учитывая, что для однородной степени  $q$  функции  $f(\dots)$  справедливо тождество  $\xi : \nabla f(\xi) = qf(\xi)$ :

$$W(\sigma) = \epsilon^r : \sigma - \int_0^\sigma \epsilon^r : d\sigma = (q-1)pf(\sigma) \quad (3.5)$$

В состоянии текучести согласно критерию (3.1)  $f(\sigma) = r_*^q$  и с помощью (3.5) можно связать константу  $p$  с предельным значением энергии обратимых деформаций

$$p = \frac{W_*}{(q-1)r_*^q}$$

Критерий (3.1), следовательно, предсказывает начало текучести в момент, когда энергия обратимых деформаций достигает предельного значения. Из соотношений (3.5), (1.2) и (1.3) легко показать, что энергия обратимых деформаций складывается из энергии обратимых сдвигов по системам скольжения. Потенциал (3.3) предполагает механизм кристаллографического скольжения, в данном случае обратимого, которое может быть связано с обратимым смещением дислокаций, залегающих на системах скольжения и поджимаемых к барьерам. Нелинейность кривой напряжение – деформация может быть связана со стохастическим распределением упругих свойств дислокаций и барьеров.

**4. Определяющие соотношения.** Получим на основе сформулированного критерия и экстремальных принципов ряд определяющих соотношений. Примем гипотезу

$$\epsilon = \epsilon^p \quad (4.1)$$

где  $\epsilon$  есть девиатор скоростей полных деформаций, и предположим, что среда не упрочняется. Для функций текучести (3.1), являющейся гладкой, закон (2.8) с учетом (1.2) принимает вид

$$\gamma^k = \frac{\lambda}{v(q)^q} \frac{\sigma : M_k}{\tau_*} \left| \frac{\sigma : M_k}{\tau_*} \right|^{q-2}, \quad \Phi(\sigma) = r_* \quad (k=1, \dots, 12, \Sigma k) \quad (4.2)$$

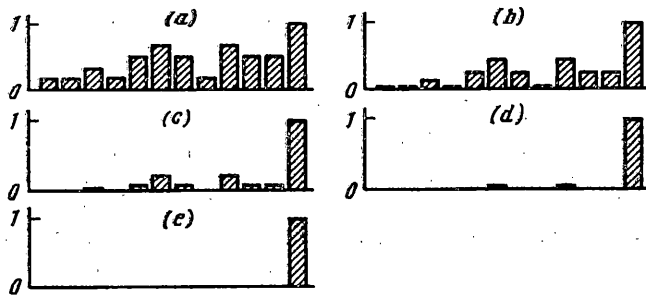
Подобный закон ранее использовался в [10, 11]. Умножая обе части соотношения (4.2) для каждой системы скольжения по координатно на соответствующую кристаллографическую диаду из набора  $M_k$ , суммируя по  $k$  и используя (1.3), получаем закон течения в терминах тензоров  $\epsilon$  и  $\sigma$ :

$$\epsilon = \frac{\tau_* \lambda}{v(q)^q} \sum_k \frac{M_k}{\tau_*} \left| \frac{\sigma : M_k}{\tau_*} \right|^{q-2} \frac{\sigma : M_k}{\tau_*}, \quad \Phi(\sigma) = r_* \quad (4.3)$$

Введя полусимметричный тензор  $A$  четвертого ранга

$$A = \sum_k \frac{M_k}{\tau_*} \left| \frac{\sigma : M_k}{\tau_*} \right|^{q-2} \frac{M_k}{\tau_*} \quad (4.4)$$

<sup>2</sup> Ниже будет показано, что параметр  $p$  связан с  $\tau_*$  и зависит от предыстории деформирования.



Фиг. 2

запишем закон (4.3) в следующем компактном виде

$$\epsilon = \frac{r_* \lambda}{v(q)^q} \mathbf{A} : \boldsymbol{\sigma}, \quad \Phi(\boldsymbol{\sigma}) = r_* \quad (4.5)$$

откуда, в частности,

$$\lambda = \epsilon : \boldsymbol{\sigma} / r_* \quad (4.6)$$

Закон (4.3) также следует из соотношения (2.5). Поскольку выбранная функция текучести строго выпуклая, соотношение (4.5) любому заданному тензору  $\epsilon$  ставит в соответствие единственный тензор  $\boldsymbol{\sigma}$ .

С помощью законов (4.2) можно выяснить роль параметра  $q$  в тензоре пластических свойств  $\mathbf{A}$ . Подставляя в (4.2) напряжение  $\boldsymbol{\sigma} = \tau_* \mathbf{M}_l$  ( $l$  фиксирован), вызывающее единичное скольжение, можно найти, что модули скоростей сдвигов по всем системам скольжения пропорциональны некоторым зависящим от  $q$  величинам

$$|\gamma^k| \sim |\mathbf{M}_l : \mathbf{M}_k|^{q-1} \quad (k=1, \dots, 12) \quad (4.7)$$

Относительное распределение скоростей сдвигов  $|\gamma^k|$  по всем системам скольжения монокристалла стандартной ориентировки для  $q = 2, 3, 5$  и  $10$  показано на фиг. 2,  $a-e$  соответственно. На фиг. 2,  $e$  для сравнения показан случай единичного скольжения, соответствующего течению на грани многогранника Бишоп – Хилла согласно закону Шмида. Параметр  $q$  управляет относительным распределением сдвигов; при увеличении  $q$  уменьшается количество фактически действующих систем скольжения, а деформация концентрируется по системам с наибольшими приведенными напряжениями. В пределе при  $q \rightarrow \infty$  активны только системы скольжения с максимальным приведенным напряжением.

Сделаем обобщение модели на случай изотропного упрочнения. Примем закон течения в форме

$$\epsilon = g \nabla \Phi(\boldsymbol{\sigma}) \nabla \Phi(\boldsymbol{\sigma}) : \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \quad \Phi(\boldsymbol{\sigma}) = r_*, \quad d(\Phi(\boldsymbol{\sigma}) - r_*) = 0 \quad (4.8)$$

где  $g$  – функция упрочнения, а  $d$  обозначает дифференциал, а точка – материальную производную по времени (напомним, что время из соотношений можно исключить). В случае упрочнения кроме второго условия (4.8) нахождения точки, изображающей напряженное состояние, на поверхности текучести в данный момент необходимо, чтобы эта точка оставалась на ней и после приращения нагрузки, что записано в виде третьего условия в (4.8). Из последнего условия следует

$$\nabla \Phi(\boldsymbol{\sigma}) : \dot{\boldsymbol{\sigma}} = v(q) \dot{\tau}_* \quad (4.9)$$

Умножая первое условие (4.8) скалярно на  $\boldsymbol{\sigma}$ , используя второй критерий (4.8) и равенство (4.9), получим



$$\epsilon \sigma = g r_* v(q) \dot{\tau}_* \quad (4.10)$$

Согласно (1.2) и (1.3)  $\epsilon \sigma = \gamma \cdot \tau_0$ ; поскольку  $\tau_0$  сопряжен  $\gamma$  и доставляет равенство в (5.1) в приложении, то (4.10) приводится к виду

$$\Psi(\gamma) = g v(q) \dot{\tau}_* \quad (4.11)$$

Считая известным закон упрочнения  $\tau_*(\psi(\beta))$ , где  $\beta$  есть вектор сдвигов, получим  $d\tau_* = \tau_*' d\psi(\beta)$  (штрих обозначает производную). При условии пропорционального деформирования  $d\psi(\beta) = \psi(d\beta)$  и из (4.11) с использованием однородности  $\psi(\dots)$  может быть найдена связь функций упрочнения

$$g = 1 / (v(q) \tau_*') \quad (4.12)$$

Заметим, что аналогичный закон был сформулирован в [2, 3] для рассматривавшегося там потенциала. В сформулированном соотношении (4.8) представляется возможным однозначно найти один из тензоров  $\epsilon, \sigma$  и  $\dot{\sigma}$  по известным двум другим.

В заключение приведем еще одну формулировку определяющих соотношений. Рассмотрим идеально пластическую среду с обратимыми деформациями. Данная модель предлагается для металлов с нелинейным начальным участком кривой деформирования и согласована с энергетическим смыслом критерия (3.1). Предположим, что тензор скорости полных деформаций представим в виде суммы

$$\epsilon = \epsilon^r + \epsilon^p \quad (4.13)$$

где первое слагаемое справа выражается через  $\sigma$  и  $\dot{\sigma}$  из соотношений (3.3) и (3.4) и принимает вид

$$\epsilon^r = \frac{q W_*}{v(q)^q} A : \dot{\sigma} \quad (4.14)$$

а второе находится из ассоциированного закона течения

$$\epsilon^p = j \lambda \nabla \Phi(\sigma) \quad (4.15)$$

$$j = 1 \text{ при } \Phi(\sigma) = r_* \text{ и } d\Phi(\sigma) = 0$$

$$j = 0 \text{ при } \Phi(\sigma) < r_* \text{ или } d\Phi(\sigma) < 0$$

При  $j = 0$ , т.е. в области обратимых деформаций, имеем закон (4.14), являющийся взаимно-однозначным соотношением, что доказано в [10]. В предположении, что выполняется критерий активного нагружения, т.е.  $j = 1$ , выразим правую часть (4.13) через  $\sigma$  и  $\dot{\sigma}$  согласно принятым законам (4.14) и (4.15):

$$\epsilon = \frac{1}{v(q)^2} A : (q W_* \dot{\sigma} + \lambda r_* \sigma), \quad \Phi(\sigma) = r_*, \quad d\Phi(\sigma) = 0 \quad (4.16)$$

При условии пропорциональности нагружения из (4.16) вытекает выражение для  $\lambda$ :  $\lambda = \epsilon : \sigma / r_*$ . В (4.16) по известным  $\epsilon$  и  $\sigma$  можно однозначно найти  $\dot{\sigma}$ . Найти  $\epsilon$  по известным  $\sigma$  и  $\dot{\sigma}$  не представляется возможным.

Достоинство приведенной модели заключается в отсутствии резкого изменения направления (излома траектории) тензора  $\epsilon$  при достижении текучести, которое было бы характерно для модели с линейно упругими деформациями. Причиной данного свойства является подобие эквипотенциалей обратимых деформаций (3.3) и поверхности текучести (3.1). Также необходимо заметить, что определяющие соотношения (4.16) для состояния течения оказываются значительно менее громоздкими по сравнению с аналогичными соотношениями, в которых рассмотрена линей-

ная упругость, а критерий текучести в такой модели будет иметь естественный энергетический смысл. К сожалению, в рамках рассмотренной сравнительно простой модели неверно описывается разгрузка, для корректного описания которой необходимо учесть линейноупругие деформации решетки.

**5. Приложение.** Приведем необходимые сведения из теории непрерывных линейных функционалов на нормированных пространствах [9], дополняющие изложенную в [7] теорию.

Пусть  $A_n$  – исходное нормированное пространство с нормой  $\varphi(\dots)$ , а  $A_n^*$  – пространство непрерывных линейных функционалов на  $A_n$  с нормой

$$\psi(\eta) = \max_{\xi} \eta \cdot \xi, \quad \varphi(\xi) = 1, \quad \forall \eta \in A_n^* \quad (5.1)$$

называемое сопряженным. В (5.1)  $\eta \xi$  обозначает значение функционала  $\eta \in A_n^*$ , действующего на элемент  $\xi \in A_n$ , это обозначение совпадает с определением, т.е.  $\eta(\xi) = \eta \cdot \xi$ . Данные нормированные пространства при таком выборе нормы в  $A_n^*$  оказываются взаимно сопряженными, то есть по образцу (5.1) для  $\varphi(\dots)$  может быть записано аналогичное двойственное равенство. Из (5.1) или двойственного равенства следует неравенство

$$\eta \cdot \xi \leq \varphi(\xi) \psi(\eta) \quad (5.2)$$

справедливо для любых  $\eta$  и  $\xi$  из соответствующих пространств.

Всегда существует элемент  $\xi$ , доставляющий значение норме заданного  $\eta$  согласно (5.1). Будем называть все такие  $\xi$  сопряженными заданному  $\eta$ . (Подобным образом можно рассмотреть элементы  $\eta$ , сопряженные заданному  $\xi$ .) Очевидно, что сопряженные элементы доставляют равенство в (5.2). В случае гладкости и строгой выпуклости сферы  $\varphi(\xi) = 1$  сопряженный элемент  $\xi$  единственный и находится из системы, следующей из (5.1):

$$\eta = \lambda \nabla \varphi(\xi), \quad \varphi(\xi) = 1 \quad (5.3)$$

где  $\lambda$  – произвольный скалярный множитель, а  $\nabla$  символизирует градиент. Отметим, что сфера  $\psi(\eta) = 1$  в таком случае также гладкая и строго выпуклая и единственный сопряженный  $\xi$  элемент  $\eta$  находится из подобной двойственной системы.

Пусть подпространство  $A_k \subset A_n$ , тогда подпространство  $A_k^* \subset A_n^*$ ; норму  $\xi \in A_k$ , определенную согласно (5.1) в терминах подпространства  $A_k$ , обозначим  $\psi_0(\dots)$ . Функционал  $\eta \in A_n^*$  называется продолжением  $\eta_0 \in A_k^*$ , если  $\eta \cdot \xi = \eta_0 \cdot \xi$  для любых  $\xi \in A_k$ . Всегда существует продолжение  $\eta$  функционала  $\eta_0$  на все пространство  $A_n^*$  с сохранением (точнее, без увеличения) его нормы, т.е.  $\psi_0(\eta_0) = \psi(\eta)$ . (Последнее утверждение составляет суть теоремы Хана – Банаха.) В случае гладкости и строгой выпуклости сферы  $\varphi(\xi) = 1$  в  $A_n$  такое продолжение единственно. Очевидно, что справедлив и двойственный аналог теоремы существования.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Taylor G.I. Plastic strain in metals // J. Inst. Metals. 1938. V. 62. No. 1. P. 307–324.
2. Bishop J.F.W., Hill R. A theory of plastic distortion of a polycrystalline aggregate under combined stresses // Phil. Mag. Ser. 7. 1951. V. 42. No. 327. P. 414–427.
3. Bishop J.F.W., Hill R. A theoretical derivation of the plastic properties of a polycrystalline face-centered metal // Phil. Mag. Ser. 7. 1951. V. 42. No. 334. P. 1298–1307.
4. Bishop J.F.W. A theoretical examination of a plastic deformation of crystals by glide // Phil. Mag. Ser. 7. 1953. V. 44. No. 348. P. 51–64.

5. *Qin Q., Bassani J.L.* Non-Schmid yield behavior in single crystals // *J. Mech. Phys. Solids.* 1992. V. 40. No. 6. P. 813–833.
6. *Vorren O., Ryum N.* Cyclic deformation of Al single crystals: effect of the crystallographic orientation // *Acta Met.* 1988. V. 36. No. 6. P. 1443–1453.
7. *Hill R.* Constitutive dual potentials in classical plasticity // *J. Mech. and Phys. Solids.* 1987. V. 35. No. 1. P. 23–33.
8. *Спенсер Э.* Теория инвариантов. М.: Мир, 1974. 156 с.
9. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. 496 с.
10. *Toth L.S., Gilormini P., Jonas J.J.* Effect of rate sensitivity on the stability of torsion textures // *Acta Met.* 1988. V. 36. No. 12. P. 3077–3091.
11. *Hutchinson J.W.* Bounds and self-consistent estimates for creep of polycrystalline materials // *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.* 1976. V. 348. No. 1652. P. 101–127.

Пермь

Поступила в редакцию  
20.III.1996