МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1997

УДК 539.214; 539.374

© 1997 г. М.Я. БРОВМАН

О ЛИНИЯХ ТОКА ПРИ ДЕФОРМАЦИИ СЖИМАЕМОЙ СРЕДЫ

В [1–3] рассмотрены уравнения пластичности в криволинейных ортогональных координатах, в которых одно из семейств координатных линий является линиями тока для несжимаемой сплошной среды. Получены условия, при которых эти линии могут быть линиями тока и только одна из компонент вектора скорости не равна нулю. В публикуемой работе рассмотрен вопрос о линиях тока сжимаемой сплошной среды, что актуально для порошков, окислов, некоторых неметаллических материалов.

При деформации сплошной среды должно быть выполнено условие постоянства массы

$$\partial\rho / \partial\tau + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \operatorname{grad} \rho = 0 \tag{1}$$

где ρ – плотность материала, $\mathbf{v}$ – вектор скорости, τ – время.

При стационарном течении $\partial\rho/\partial\tau = 0$ и в ортогональной системе координат α, β, γ уравнение (1) имеет вид

$$\frac{\rho}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(v_\alpha H_2H_3)+\frac{\partial}{\partial\beta}(v_\beta H_1H_3)+\frac{\partial}{\partial\gamma}(v_\gamma H_1H_2)\right]+$$
$$+(i_1v_\alpha+i_2v_\beta+i_3v_\gamma)\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial\rho}{\partial\alpha}i_1+\frac{1}{H_2}\frac{\partial\rho}{\partial\beta}i_2+\frac{1}{H_3}\frac{\partial\rho}{\partial\gamma}i_3\right)=0 \tag{2}$$

где i_1, i_2, i_3 – единичные векторы вдоль координатных линий; v_α, v_β, v_γ – компоненты вектора $\mathbf{v}$ вдоль координатных линий; H_1, H_2, H_3 – коэффициенты первой квадратичной формы (Ламе).

Принимаем, что α-линии являются линиями тока и поэтому $v_\beta = v_\gamma = 0$

$$\rho\frac{\partial}{\partial\alpha}(v_\alpha H_2H_3)+v_\alpha H_2H_3\frac{\partial\rho}{\partial\alpha}=0$$

Откуда следует

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(v_\alpha\rho H_2H_3)=0,\quad v_\alpha=\frac{f}{\rho H_2H_3} \tag{3}$$

где f – функция β и γ.

При плоской деформации скорость не зависит от γ, так же как и ρ, $H_3 = 1$, f – функция только β:

$$v_\alpha = f / (\rho H_2) \tag{4}$$

Компоненты тензора скорости деформации при плоской деформации равны

$$\varepsilon_\alpha = \frac{f}{H_1}\frac{\partial}{\partial\alpha}(\rho H_2)^{-1}, \qquad \varepsilon_\beta = \frac{f}{\rho H_1 H_2^2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha}$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{f}{\rho H_2^2}\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\ln\left(\frac{f}{\rho H_1 H_2}\right)\right]$$

а характеристика скорости изменения объема

$$\varepsilon = 0,5(\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta) = -\frac{f}{\rho^2 H_1 H_2}\frac{\partial\rho}{\partial\alpha} \qquad (5)$$

Плотность изменяется в процессе деформации и поэтому, следуя [4], относительное изменение объема является функцией только среднего напряжения $\sigma = 0,5(\sigma_\alpha + \sigma_\beta)$, σ_α, σ_β, $\tau_{\alpha\beta}$ – компоненты тензора напряжений при плоской деформации в координатах α, β:

$$e = \varphi(\sigma), \qquad \varepsilon = \frac{d\varphi}{d\sigma}\frac{d\sigma}{d\tau} \qquad (6)$$

где e – деформация изменения объема, $\varphi(\sigma)$ – функция, определяющая ее зависимость от среднего напряжения.

Для многих материалов, например порошков сплавов типа ВК6, изменение объема можно [5] представить степенной функцией $\varphi = \mathrm{const}\,\sigma^n$ с показателем степени $n = 0{,}20$–$0{,}21$ для гранулированных и $n = 0{,}14$–$0{,}15$ для негранулированных порошков (при разгрузке принимают $\varphi(\sigma) = 0$).

Разумеется, есть и материалы, для которых указанное допущение неприемлемо и изменение объема зависит не только от первого, но и от второго инвариантов тензора напряжений (например, порошков меди и ее сплавов). Но ограничившись только теми материалами, поведение которых можно описать (6), получим, применяя (5) и учтя, что

$$\frac{d\sigma}{d\tau} = \frac{\partial\sigma}{\partial\alpha}v_\alpha + \frac{\partial\sigma}{\partial\beta}v_\beta = \frac{\partial\sigma}{\partial\alpha}v_\alpha$$

(в стационарном процессе)

$$-\frac{f}{\rho H_1 H_2}\frac{\partial\rho}{\partial\alpha} = \frac{d\varphi}{d\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial\alpha}\frac{f}{\rho H_2}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial\alpha} = -\rho H_1 \frac{d\varphi}{d\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial\alpha} \qquad (7)$$

Такое представление является более удобным, чем вычисления изменения объема в функции ε, а затем определение ρ. Расчеты можно проводить и применяя не плотность, а однозначно связанную с ней величину пористости, зависящую от разности плотности компактной сплошной и пористой сред (см. [6]), но расчеты при этом сложнее.

Для многих металлов считают, что и при пластической деформации изменения объема являются упругими и

$$\varphi(\sigma) = -\sigma/K \qquad (8)$$

где K – модуль всестороннего растяжения-сжатия (формула (8) реализуется в этом случае и при разгрузке).

Связь между тензорами напряжений и скоростей деформации принята в виде

$$(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_{\alpha\beta}^2 = 4k^2 H^m, \quad \sigma_\alpha - \sigma_\beta = 4k\varepsilon_\alpha H^{0,5(m-1)} \tag{9}$$

$$\tau_{\alpha\beta} = k\varepsilon_{\alpha\beta} H^{0,5(m-1)}, \quad H = (\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta)^2 + \varepsilon_{\alpha\beta}^2$$

где k – предел текучести при сдвиге; $0 \leqslant m \leqslant 1$ – постоянная, характеризующая влияние скорости деформации.

При $m = 0$ имеем идеально пластический материал, а при $m = 1$ – линейно-вязкий.

Вводя уравнения (9), ограничиваемся классом материалов, для которых среднее напряжение не оказывает влияния на поверхность текучести, т.е. следуя [4]:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{H^{0,5(1-m)}}{4K}(\sigma_\alpha - \sigma_\beta) + \frac{d\varphi}{d\sigma}\dot{\sigma}$$

Дифференцируя одно уравнение равновесия по α, а второе по β, можно вычитанием и сложением этих уравнений получить два уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}(\sigma_\alpha - \sigma_\beta) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial\tau_{\alpha\beta}}{\partial\beta}\right) - \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial\tau_{\alpha\beta}}{\partial\alpha}\right) +$$

$$+2\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\tau_{\alpha\beta}}{H_2}\frac{\partial H}{\partial\beta}\right) - 2\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\tau_{\alpha\beta}}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha}\right] +$$

$$+\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\beta}\right] = 0$$

$$2\frac{\partial^2\sigma}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial\tau_{\alpha\beta}}{\partial\beta}\right) + \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial\tau_{\alpha\beta}}{\partial\alpha}\right) + 2\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\tau_{\alpha\beta}}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\beta}\right) +$$

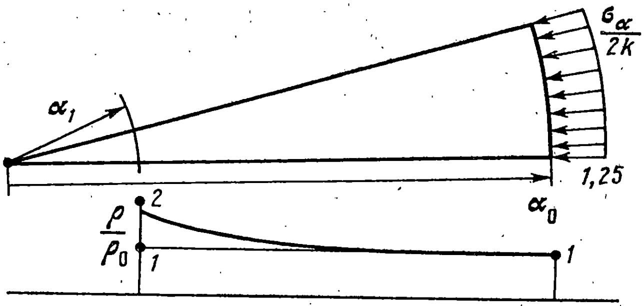
$$+2\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\tau_{\alpha\beta}}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha}\right] - \frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\beta}\right] = 0 \tag{10}$$

Уравнения (7) и (10) дают систему трех уравнений для трех неизвестных величин: $f(\beta)$, $\rho(\alpha, \beta)$, $\sigma(\alpha, \beta)$. Конечно, эта система не всегда имеет решение, поскольку $f(\beta)$ должна быть функцией только β. Если же из (10) и (7) получено выражение для f, в которое входит и α, то это противоречит (4) и означает, что α-линии данной координатной системы не могут быть линиями тока ни при каких напряжениях.

В декартовых координатах $H_1 = H_2 = 1$ и уравнения (7) и (10) удовлетворены при $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \sigma$, $\rho = \text{const}$: $\tau_{\alpha\beta} = k(df/d\beta)^m$, при $m = 0$ имеем $\tau_{\alpha\beta} = k$.

Прямые параллельные линии могут быть линиями тока.

В ряде случаев удается найти решение, приняв функцию $f(\beta)$ такую же, как и для несжимаемой среды, или отличающуюся только числовыми множителями. Из первого уравнения (10) определяем плотность, а из уравнения (7) среднее напряжение σ. Если оно удовлетворяет второму уравнению (10), то получается точное решение. В ряде задач удается найти решение, приняв напряжения такими же, как для несжимаемой среды (сжимаемость оказывает более существенное влияние на скорость, чем на напряжения). Можно в ряде задач получить решение, в котором напряжения не отличаются от величин, полученных для несжимаемой среды, либо отличаются только величинами некоторых постоянных. Во многих случаях решение упрощается тем, что линиями тока могут быть одни и те же кривые (прямые, дуги окружностей, циклоиды, гиперболы, логарифмические спирали и так далее) как для несжимаемой, так и для сжимаемой сред.



Фиг. 1

Примем, что в полярных координатах линии тока прямые, проходящие через полюс.

Решение существует, если $\tau_{\alpha\beta}$ – функция только координаты β. Тогда при $m = 0$:

$$\sigma_\alpha = C_1 - 2k\ln\alpha - 2\int\tau_{\alpha\beta}d\beta \pm 2\sqrt{k^2 - \tau_{\alpha\beta}^2}$$

$$\sigma_\beta = C_1 - 2k\ln\alpha - 2\int\tau_{\alpha\beta}d\beta$$

$$\sigma = C_1 - 2k\ln\alpha - 2\int\tau_{\alpha\beta}d\beta \pm \sqrt{k^2 - \tau_{\alpha\beta}^2}$$

$$\frac{\partial\ln\rho}{\partial\alpha} = \frac{d\varphi}{d\sigma}\frac{2k}{\alpha}$$

При $d\varphi/d\sigma = \text{const} = -1/K$ $\rho = f_1(\beta)\alpha^{-a}$, $a = 2k/K$, где C_1 – постоянная интегрирования, $f_1(\beta)$ – заданная плотность на некоторой исходной линии, например при прессовании на линии α_0. Функция $\tau_{\alpha\beta}$, как и в известном решении Надаи [4, 5], определяется уравнением $d\tau_{\alpha\beta} / d\beta = 2k - 2\sqrt{k^2 - \tau_{\alpha\beta}^2}$, а функция $f(\beta)$ определена третьим соотношением (9).

Приведенному дифференциальному уравнению удовлетворяет и функция $\tau_{\alpha\beta} = 0$, которая соответствует течению без трения.

Если $\rho = \text{const} = \rho_0$, $v_\alpha = v_0 f_1(\beta) = \rho_0\alpha_0$ при $\alpha = \alpha_0$, $\sigma_\alpha = 0$, при $\alpha = \alpha_1$, то в этом случае

$$\sigma_\alpha = -2k\ln\frac{\alpha}{\alpha_1}, \quad \rho = \rho_0\left(\frac{\alpha_0}{\alpha}\right)^a, \quad v_\alpha = v_0\left(\frac{\alpha_0}{\alpha}\right)^{1-a}$$

На фиг. 1 приводятся результаты расчетов при $\alpha_1 = 0{,}25\alpha$ и степенной зависимости плотности от среднего напряжения при $n = 0{,}20$ (угол клина равен 15°). Показано давление $\frac{1}{2}\sigma_\alpha / k$ при $\alpha = \alpha_0$ (давление прессования), а ниже – эпюра изменения плотности ρ/ρ_0. Давление прессования на 10–12% меньше, чем для деформации сплошной среды с тем же пределом текучести, а величина плотности возрастает до $1{,}9\rho_0$.

Для сплошных металлов величина a имеет порядок 10^{-3} (например, для стали $2k = 300$ мПа, $K = 1{,}7 \cdot 10^5$ мПа, $a = 1{,}76 \cdot 10^{-3}$). Расчеты показывают, что в этих случаях учет сжимаемости материала практически не изменяет результатов (уже при общей деформации более 1–2%).

Для реальных технологических задач учитывать влияние сжимаемости на усилия следует при $a > 0{,}15$. При осесимметричном течении в конической матрице с прямыми линиями тока можно использовать декартовы координаты x, y в меридиональной плоскости, γ – угол поворота вокруг оси y [2].

В этом случае $x = H_3 = \alpha \cos \beta$, $y = \alpha \sin \beta$, $H_1 = 1$, $H_2 = \alpha$ и имеется точное решение, в котором $\tau_{\alpha\beta}$ не зависит от α. Для идеально пластической среды

$$\upsilon_\alpha = \frac{f}{\rho\alpha^2 \cos\beta}, \quad \tau_{\alpha\beta} = kf_0(12 + f_0^2)^{-0,5}$$

$$\sigma_\alpha - \sigma_\beta = -6k(12 + f_0^2)^{-0,5}, \quad \sigma_\beta = \sigma_\gamma \tag{11}$$

$$\sigma_\alpha = C_1 - c\ln\alpha - 3\int\tau_{\alpha\beta}d\beta + 3\sqrt{k^2 - \tau_{\alpha\beta}^2}$$

$$\sigma_\beta = \sigma_\gamma = C_1 - c\ln\alpha - 3\int\tau_{\alpha\beta}d\beta, \quad f_0 = \frac{\partial}{\partial\beta}\ln\left(\frac{f}{\cos\beta}\right)$$

где C_1, c – постоянные, определяемые краевыми условиями. Системе (11) удовлетворяет и значение $\tau_{\alpha\beta} = 0$, $f = \cos\beta$, $f_0 = 0$, когда $c = k\sqrt{3}$.

Поскольку $\sigma = C_1 - c\ln\alpha - 3\int\tau_{\alpha\beta}d\beta + \sqrt{k^2 - \tau_{\alpha\beta}^2}$, то $\partial\sigma/\partial\alpha = -c/\alpha$, $\partial\rho/\partial\alpha = (\rho c/\alpha)(d\varphi/d\sigma)$ и при $d\varphi/d\sigma = -K^{-1}$:

$$\upsilon_\alpha = \frac{f}{f_1(\beta)}\alpha^{a-2}$$

Сравнительные расчеты показывают, что для многих порошков определение напряжений и усилий прессования можно произвести по формулам, полученным для несжимаемой среды, а затем, определив среднее напряжение, найти изменение плотности, достигнутое в результате прессования.

Отметим важный класс задач, в которых в зоне деформации среднее напряжение (и плотность, согласно формуле (6)) является постоянным. Например, при осесимметричной деформации с линиями тока в виде гипербол $x^2y = \text{const}$ решение имеет вид

$$\alpha = y^2 - 0,5x^2, \quad \beta = x^2y, \quad H_1 = (x^2 + 4y^2)^{-0,5}, \quad H_2 = H_1 / x$$

$$\upsilon_\alpha = C_2\sqrt{x^2 + 4y^2}, \quad \tau_{\alpha\beta} = 2k\sqrt{3}(2C_2)^m \frac{\sqrt{\beta(\alpha y + 0,5\beta)}}{3\beta + 4\alpha y}$$

$$\sigma_\alpha = k\sqrt{3}(2C_2)^m \frac{4\alpha y + 2\beta}{3\beta + 4\alpha y}$$

$$\sigma_\beta = k\sqrt{3}(2C_2)^m \frac{\beta}{3\beta + 4\alpha y}, \quad \sigma_\gamma = 0$$

$$\sigma = k\sqrt{3}(2C_2)^m = \text{const}, \quad \rho = \varphi(\sigma) = \text{const}$$

где C_2 – постоянная, определяемая краевыми условиями для скоростей. Функция $y(\alpha, \beta)$ определена алгебраическим уравнением $y^3 - \alpha y - 0,5\beta = 0$. Это решение может быть использовано при анализе процесса прессования через матрицу гиперболической формы.

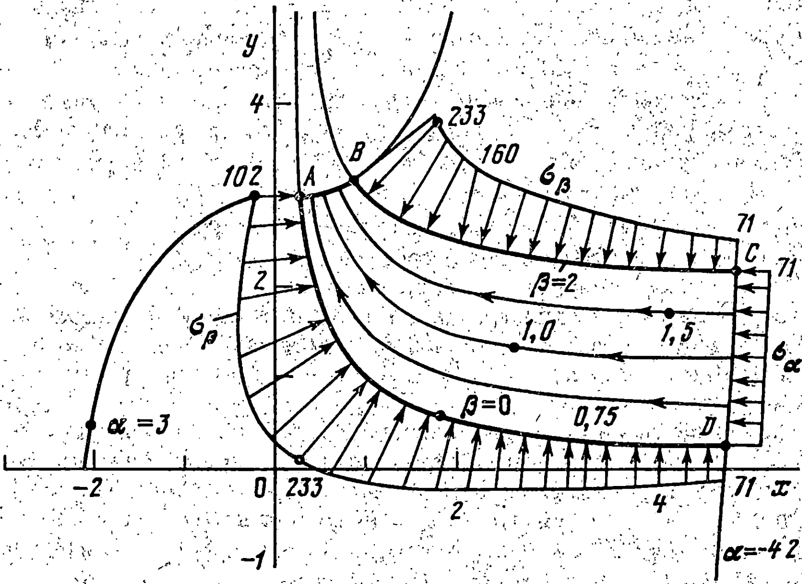
При плоской деформации условие $\sigma = \text{const}$ выполнено при течении по гиперболам $xy = \text{const}$ по циклоидам и дугам окружностей. Эти линии могут быть линиями тока и для сжимаемой среды.

Для семейств линий $\alpha = y - \frac{1}{3}x^3$, $\beta = y - 1/x$ (кубических парабол и гипербол):

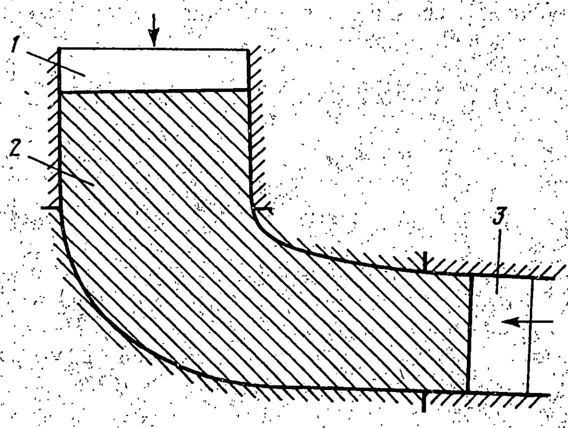
$H_1 = (x^4 + 1)^{-0,5}$, $H_2 = x^2(x^4 + 1)^{-0,5}$

и при $f = \text{const}$, $m = 0$ получаем точное решение

$$\upsilon_\alpha = \frac{f}{x^2}\sqrt{x^4 + 1}, \quad \tau_{\alpha\beta} = \frac{k(x^4 - 1)}{x^4 + 1} \tag{12}$$



Фиг. 2



Фиг. 3

$$\sigma_\alpha = C_1 + \frac{2kx^2}{x^4+1}, \quad \sigma_\beta = C_1 - \frac{2kx^2}{x^4+1}$$

где C_1 – постоянная, определяемая краевыми условиями.

Кубические параболы также могут быть линиями тока при

$$\upsilon_\alpha = f\sqrt{x^4+1}, \quad \tau_{\alpha\beta} = \frac{k(1-x^4)}{x^4+1}$$

и значениях σ_α, σ_β согласно формулам (12).

Функция $x(\alpha, \beta)$ определена алгебраическим уравнением $x^4 + 3x(\alpha - \beta) - 1 = 0$.

На фиг. 2 показан пример численного расчета для зоны деформации, ограниченной линиями AB ($\alpha = 3$), CD ($\alpha = -42$), AD ($\beta = 0$) и BC ($\beta = 2$). Расчеты выполнены при $m = 0$ (для идеально пластической среды) при равенстве нулю суммарного усилия на AB и $k = 130$ мПа. На фиг. 2 при этом приведены эпюры давлений σ_β на AD и BC и σ_α

на CD (величины σ_α, σ_β приведены в мПа). На фиг. 2 показаны также линии тока $\beta = 0{,}75$; 1,0; 1,5 (это гиперболы, сдвинутые относительно друг друга вдоль оси y). Среднее давление в зоне деформации постоянно и равно $\sigma = -0{,}55k = -0{,}55 \cdot 130 = -71{,}5$ мПа. Поскольку зависимость $\rho(\sigma)$ для данного порошка алюминиевого сплава можно описать формулой $\rho = \rho_m - (\rho_m - \rho_0)\exp(-b\sigma)$, где ρ_0 – плотность при $\sigma = 0$, ρ_m – максимальная плотность, b – постоянная материала. Для данного случая $\rho_0 = 2700$ кг/м^3, $\rho_m = 4000$ кг/м^3, $b = 10^{-2}$ мПа$^{-1}$ и $\rho = 3366$ кг/м^3, т.е. достигается увеличение плотности на 25% по отношению к величине ρ_0.

Максимальное давление на матрицу составляет 233 мПа (1,79 К).

Видно, что и для сжимаемого материала существуют задачи, в которых объем (и плотность) при заданных линиях тока остаются постоянными, так как постоянным является среднее давление. Для материалов, в которых изменение плотности является функцией только этого давления, линии тока при этом совпадают с линиями тока несжимаемого материала.

Если надо существенно увеличить плотность, а величина обжатий ограничена, то при прессовании эффективным средством является приложение противодавления (что увеличивает и среднее давление). На фиг. 3 показана схема установки для прессования формовочных смесей. Поршень *1* обеспечивает при движении вниз течение смеси *2* в матрице с рабочим участком гиперболической формы. В выходном участке постоянной толщины расположен поршень *3*, к которому с помощью гидравлического цилиндра приложено давление до (0,6 К – 1,2 К), что обеспечило увеличение плотности на 18–25% и повышение качества.

В некоторых случаях прессование с противодавлением может оказаться полезным для повышения качества изделий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бровман М.Я.* О линиях тока при плоской пластической деформации // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 2. С. 185–187.
2. *Бровман М.Я.* О линиях тока при осесимметричной пластической деформации // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 1. С. 80–83.
3. *Бровман М.Я.* Применение гиперболических линий тока при исследовании плоской пластической деформации // Изв. вузов. Черн. металлургия. 1995. № 1. С. 25–28.
4. *Ивлев Д.Д.* Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 231 с.
5. *Колмогоров В.Л.* Механика обработки металлов давлением. М.: Металлургия, 1986. 688 с.
6. *Tirosh J., Jddan D.* Forming analysis of porous materials // Intern. J. Mech. Sci. 1989. V. 3. № 11/12. P. 949–965.

Краматорск

Поступила в редакцию
25.VII.1995