МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1997

УДК 539.3

© 1997 г. О.Ю. ДИНАРИЕВ, В.Н. НИКОЛАЕВСКИЙ

КРАТНОЕ УВЕЛИЧЕНИЕ ПЕРИОДА ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН В УПРУГИХ ТЕЛАХ С ДИССИПАТИВНОЙ МИКРОСТРУКТУРОЙ

Волновые процессы в средах с микроструктурой обладают рядом особенностей, обусловленных взаимодействием макроскопических трансляционных движений с микровращениями частиц среды. Особый интерес представляют эффекты, связанные с нелинейностью динамики микровращений и разной реологией для макро- и микросмещений. Ранее рассматривались модели, в которых макроскопическое движение являлось вязким, а микроскопическое – упругим [1]. Приложения были связаны с излучением шума горным массивом при его ползучести [2]. В предлагаемой работе исследуются случаи, в которых среда на макроуровне является упругой, но обладает вязкой микроструктурой.

В п. 1 анализируются общие соотношения для упругих тел с микровращениями: динамические уравнения и материальные соотношения. В п. 2 изучается динамика связанных трансляционно-вращательных движений в рамках линейной теории возмущений. В п. 3 описаны характерные явления при распространении поперечных волн, когда проявляется нелинейность упругого потенциала для микровращений.

1. Рассмотрим сплошную среду, частицы которой могут совершать микроповороты (модель Коссера). При движении такой среды должны выполняться уравнения неразрывности, импульсов, моментов импульса и энергии [3]:

$$d\rho / dt + \rho v_{i,i} = 0 \tag{1.1}$$

$$\rho dv_i / dt = p_{ij,j} + f_i \tag{1.2}$$

$$\frac{d}{dt}(\varepsilon_{ijk} x_j \rho v_k + J\Omega_i) + (\varepsilon_{ijk} x_j \rho v_k + J\Omega_i) v_{l,l} = \tag{1.3}$$

$$= (\varepsilon_{ikl} x_k p_{lj} + \pi_{ij})_{,j} + \varepsilon_{ijk} x_j f_k + m_i$$

$$\frac{d}{dt}(K + \rho U) + (K + \rho U) v_{l,l} = (v_i p_{ij})_{,j} + (\Omega_1 \pi_{ij})_{,j} + f_i v_i + m_i \Omega_i - q_{i,i} + \varepsilon \tag{1.4}$$

$$K = \frac{1}{2}(\rho v_i v_i + J\Omega_i \Omega_i), \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Здесь t, x_i – время и декартовы координаты в некоторой инерциальной системе отсчета. Латинские индексы соответствуют координатам и пробегают значения 1, 2, 3. По повторяющимся индексам производится суммирование. Далее, ρ – массовая плотность среды, v_i – скорость макроскопического движения, p_{ij} – тензор силовых напряжений, f_i – внешние объемные силы, J – плотность момента инерции частиц среды (размерности масса $\times$ длина$^{-1}$), которую будем считать постоянной, Ω_i – полная угловая скорость вращений частиц, π_{ij} – симметричный тензор моментных напряжений, m_i – момент внешних сил, K – плотность кинетической энергии, U –

внутренняя энергия на единицу массы, q_i – поток тепла, ε – тепловыделение в единице объема.

Система из шести уравнений (1.1)–(1.4) определяет динамику шести неизвестных полей: $\rho = \rho(t, x_j)$, $u_i = u_i(t, x_j)$, $\varphi_i = \varphi_i(t, x_j)$, $T = T(t, x_j)$, где u_i – вектор перемещений, φ_i – вектор микроповоротов, T – абсолютная температура среды, причем $v_i = du_i/dt$, $\Omega_i = d\varphi_i/dt$. Однако для замыкания задачи необходимо задать величины p_{ij}, π_{ij}, q_i, U.

Предположим, что произведения величин u_i, φ_j, пренебрежимо малы по сравнению с самими этими величинами. Таким образом, в выражениях, содержащих слагаемые, линейные по u_i, φ_j, можно опускать нелинейные члены при дополнительном условии, что коэффициенты при линейных и нелинейных слагаемых сравнимы по величине. Тогда можно выписать выражения для компонент скорости среды и угловой скорости: $v_i = \partial_t u_i$, $\Omega_i = \partial_t \varphi_i$.

Введем в рассмотрение тензор деформаций $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ и вектор относительного микроповорота частиц среды $\varphi_i^0 = \varphi_i + \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}u_{j,k}$.

Предположим, что внутренняя энергия частицы среды U зависит от параметров T, ε_{ij}, φ_i^0. Зависимость U от плотности ρ включена в деформации, как это следует из уравнения неразрывности (1.1):

$$\rho = g\rho_0, \quad g = \det(\delta_{ij} - \varepsilon_{ij}) \tag{1.5}$$

где ρ_0 – начальное распределение плотности. В отличие от моделей [1, 2] здесь предполагается отсутствие зависимости внутренней энергии от градиентов микроповоротов. Таким образом, упругие силы сцепления между частицами среды, ответственные за пространственную связь микровращений, пренебрежимо малы. Вместе с тем, мы сохраняем зависимость внутренней упругой энергии от самих микроповоротов, что обеспечивает упругую часть сцепления микродвижений с макродеформациями.

Обсудим более подробно возможность пренебречь градиентами микроповоротов в энергии U. Вообще говоря, в квадратичном приближении внутренняя энергия может содержать слагаемые вида $\Psi_0 = \zeta_0\varphi_i^0\varphi_i^0$, $\Psi_1 = \zeta_1\varphi_{i,j}\varphi_{i,j}$, $\Psi_2 = \zeta_2(\varphi_{i,i})^2$ с некоторыми положительными коэффициентами ζ_n. Рассмотрим класс таких волновых процессов с характерной длиной волны L, что безразмерные величины φ_i, $u_{i,j}$ остаются конечными в пределе $L \to +\infty$. Таким образом, в длинноволновом пределе величины Ψ_n имеют порядки $\Psi_0 \sim \zeta_0$, $\Psi_1 \sim \zeta_1 L^{-2}$, $\Psi_2 \sim \zeta_2 L^{-2}$.

Следовательно, в диапазоне $L^2 \gg \max(\zeta_1\zeta_0^{-1}, \zeta_2\zeta_0^{-1})$ выполняются соотношения $\Psi_0 \gg \Psi_1$, Ψ_2. Это доказывает, что для общих сред с микроструктурой всегда существует класс процессов, когда зависимость энергии U от градиентов микроповоротов несущественна.

На физическом языке принятое предположение означает, что длина L значительно превышает характерный масштаб микроструктуры. Так, например, для случая фрагментированных горных массивов длины волн должны быть намного больше размеров блоков.

В рассматриваемой модели из второго закона термодинамики следует соотношение

$$Tds = dU - \rho^{-1}(\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij} + \nu_i d\varphi_i^0) \tag{1.6}$$

Здесь s – энтропия среды на единицу массы, σ_{ij} – статический тензор напряжений, ν_i – объемный момент, возникающий при повороте частицы. Из соотношения (1.6) можно найти выражения для компонент σ_{ij}, ν_i:

$$\sigma_{ij} = \rho(\partial U / \partial \varepsilon_{ij})_s, \quad \nu_i = \rho(\partial U / \partial \varphi_i^0)_s \tag{1.7}$$

Используя соотношения (1.1)–(1.4), (1.6), несложно вычислить выражение для полной производной энтропии

$$\rho T ds / dt = (p_{ij} - \sigma_{ij})v_{i,j} + \pi_{ij}\Omega_{i,j} + \varepsilon_{ijk}\Omega_i p_{jk} + \varepsilon - q_{i,i} - \nu_i\Omega_i^0 \tag{1.8}$$

где обозначено $\Omega_i^0 = \partial_t \varphi_i^0$ – относительная угловая скорость.

Разница между полными и статическими напряжениями составляет диссипативную часть тензора напряжений $\tau_{ij} = p_{ij} - \sigma_{ij}$, которая, вообще говоря, имеет симметричную и антисимметричную составляющие:

$$\tau_{ij}^s = \tau_{(ij)}, \quad \tau_{ij}^a = \tau_{[ij]}$$

На основе выражения (1.8) вычисляется производство энтропии

$$\Pi = \rho ds / dt - T^{-1}\varepsilon + (q_i T^{-1})_{,i} = T^{-1}(\tau_{ij}^s v_{(i,j)} + (\tau_{ij}^a \varepsilon_{ijk} - v_i)\Omega_i^0 + \pi_{ij}\Omega_{i,j}) + q_i(T^{-1})_{,i} \tag{1.9}$$

Для совместимости динамической модели с термодинамикой должно выполняться условие неотрицательности производства энтропии [4]:

$$\Pi \geqslant 0 \tag{1.10}$$

Симметричная часть тензора τ_{ij} описывает эффекты вязкости для трансляционных движений. Ограничимся классом моделей, когда симметричная часть диссипативных напряжений равна нулю $\tau_{ij}^s = 0$, т.е. когда трансляционные движения являются чисто упругими. Тогда, вводя дополнительные обозначения

$$\xi_i = \tau_{jk}\varepsilon_{ijk} - \nu_i, \quad \varkappa_i = -T^{-1}T_{,i}$$

$$\psi = \Omega_{i,i}, \quad \psi_{ij} = \Omega_{(i,j)} - \tfrac{1}{3}\delta_{ij}\psi$$

$$\gamma = \pi_{ii}, \quad \gamma_{ij} = \pi_{ij} - \tfrac{1}{3}\delta_{ij}\gamma$$

преобразуем выражение (1.9) к виду

$$\Pi = T^{-1}(\xi_k\Omega_k^0 + \gamma\psi + \gamma_{ij}\psi_{ij} + q_i\varkappa_i) \tag{1.11}$$

Предполагая инвариантность теории относительно группы вращений $SO(3)$, в рамках линейной неравновесной термодинамики можно выписать линейные соотношения между потоками и диссипативными силами

$$\gamma = a_1\psi, \quad \gamma_{ij} = a_2\psi_{ij} \tag{1.12}$$

$$\xi_i = \beta_{11}\Omega_i^0 + \beta_{12}\varkappa_i, \quad q_i = \beta_{21}\Omega_i^0 + \beta_{22}\varkappa_i$$

Из дополнительного предположения об инвариантности относительно пространственных отражений следует обращение в нуль перекрестных коэффициентов $\beta_{12} = \beta_{21} = 0$. Кроме того, условие неотрицательности производства энтропии (1.10) накладывает диссипативные неравенства: $a_1 \geqslant 0$, $a_2 \geqslant 0$, $B_{11} \geqslant 0$, $\beta_{22} \geqslant 0$.

2. Исследуем динамику линейных возмущений исходного состояния, характеризуемого значениями $\rho = \rho_0$, $T = T_0$, $u_i = 0$, $\varphi_i = 0$. Для внутренней энергии примем выражение

$$U = U_0(T) + \tfrac{1}{2}\rho_0^{-1}(\lambda_1(\varepsilon_{ii})^2 + \lambda_2\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}) + \rho_0^{-1}W \tag{2.1}$$

где $W = W(\varphi_i^0)$ – упругий потенциал микроповоротов, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. В линейной теории возмущений достаточно ограничиться квадратичным приближением

$$W = W(\varphi_i^0) = \tfrac{1}{2}\zeta\varphi_i^0\varphi_i^0;\ \zeta > 0 \tag{2.2}$$

Выражения (2.1), (2.2) позволяют определить по формулам (1.7) упругие связи

$$\sigma_{ij} = \lambda_1\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + \lambda_2\varepsilon_{ij},\ \ \nu_i = \zeta\varphi_i^0 \tag{2.3}$$

Для произвольной функции $f = f(t, x_i)$ будем обозначать символом f_F ее Фурье-образ

$$f_F(\omega,\ k_i) = \int \exp(-i\omega t - ik_i x_i) f(t,\ x_i) dt dx_j$$

При рассмотрении динамики линейных возмущений достаточно ограничиться уравнениями (1.2)–(1.4), поскольку эволюция поля плотности определяется соотношением (1.5). Линеаризуя уравнения (1.2)–(1.4) и переходя к Фурье-образам, получаем

$$i\omega\rho_0 v_{iF} - ik_j p_{ijF} = A_{ij}^1 u_{jF} + B_{ij}^1\varphi_{jF} = 0 \tag{2.4}$$

$$i\omega J\Omega_{iF} + \varepsilon_{ijk}p_{jkF} - ik_j\pi_{ijF} = A_{ij}^2 u_{jF} + B_{ij}^2\varphi_{jF} + C_i^2\vartheta_F = 0$$

$$i\omega\rho_0 C_V\vartheta_F + ik_i q_{iF} = B_j^3\varphi_{jF} + C^3\vartheta_F = 0$$

$$\vartheta = T - T_0,\quad C_V = \frac{d}{dT}U_0(T),\quad k^2 = k_i k_i$$

Из инвариантности относительно группы вращений $SO(3)$ имеем представление

$$A_{ij}^\alpha = A^{\alpha 1}\delta_{ij} + A^{\alpha 2}k_i k_j + A^{\alpha 3}\varepsilon_{ijk}ik_k$$

$$B_{ij}^\alpha = B^{\alpha 1}\delta_{ij} + B^{\alpha 2}k_i k_j + B^{\alpha 3}\varepsilon_{ijk}ik_k$$

$$C_i^2 = ik_i C^2,\quad B_j^3 = ik_j B^3,\quad \alpha = 1,\ 2$$

Явные выражения для коэффициентов $A^{\alpha\beta}$, $B^{\alpha\beta}$, C^2, B^3, C^3 вычисляются по формулам (1.12), (2.3). Приведем выражения для коэффициентов, отличных от нуля

$$A^{11} = \tfrac{1}{2}\lambda_2 k^2 - \omega^2\rho_0 + \tfrac{1}{2}(i\omega\beta_{11} + \tfrac{1}{2}\zeta)k^2$$

$$A^{12} = \lambda_1 + \tfrac{1}{2}\lambda_2 + \tfrac{1}{4}(i\omega\beta_{11} + \zeta)$$

$$B^{13} = \tfrac{1}{2}(i\omega\beta_{11} + \zeta),\quad A^{23} = \tfrac{1}{2}(i\omega\beta_{11} + \zeta)$$

$$B^{21} = i\omega\beta_{11} + \zeta + i\omega k^2\,\tfrac{1}{2}a_2 - J\omega^2$$

$$B^{22} = \tfrac{1}{3}(a_1 + \tfrac{1}{2}a_2)i\omega,\quad C^2 = 0$$

$$B^3 = 0,\quad C^3 = k^2\beta_{22}T_0^{-1} + i\omega\rho_0 C_V$$

Вычислим определитель однородной системы уравнений (2.4):

$$\Delta = P_1 P_2 P_3^2$$

$$P_1 = A^{11} + k^2 A^{12} = (\lambda_1 + \lambda_2)k^2 - \omega^2\rho_0$$

$$P_2 = B^{21}C^3 + (B^{22}C^3 + C^2 B^3)k^2$$

$$P_3 = A^{11}B^{21} - k^2 A^{23}B^{13}$$

Итак, дисперсионное уравнение $\Delta = 0$ распадается на три соотношения $P_\alpha = 0$, $\alpha = 1, 2, 3$. Очевидно, что уравнение $P_1 = 0$ описывает продольные трансляционные упругие волны в среде, которые полностью отщепляются от микровращений и переноса тепла. Дисперсионное соотношение

$$P_2 = 0 \tag{2.5}$$

описывает динамику продольных вращательных колебаний, а также эффекты теплопроводности. Дисперсионное соотношение

$$P_3 = 0 \tag{2.6}$$

соответствует поперечным связанным трансляционно-вращательным движениям. Чтобы убедиться в правильности двух последних утверждений, достаточно рассмотреть уравнения (2.5), (2.6) в бездиссипативном приближении:

$$P_2 = i\omega\rho_0 C_V(\zeta - J\omega^2) = 0 \tag{2.7}$$

$$P_3 = (\tfrac{1}{2}(\lambda_2 + \tfrac{1}{2}\zeta)k^2 - \omega^2\rho_0)(\zeta - J\omega^2) - k^2\,\tfrac{1}{4}\zeta^2 = 0 \tag{2.8}$$

Очевидно, что уравнение (2.7) свидетельствует об отсутствии переноса тепла, а также описывает вращательные колебания неволновой природы с частотой

$$\omega = \pm\omega_1, \quad \omega_1 = (\zeta / J)^{1/2} \tag{2.9}$$

Будем искать решения уравнения (2.8) для волнового числа при заданной частоте в виде

$$k = \alpha_1\omega \tag{2.10}$$

Подставляя (2.10) в (2.8), получаем уравнение на α_1:

$$\alpha_1^2((\lambda_2 + \tfrac{1}{2}\zeta)J\omega^2 - \zeta\lambda_2) = 2\rho_0(J\omega^2 - \zeta)$$

Обозначим $\omega_2 = \omega_1(1 + \tfrac{1}{2}\zeta\lambda_2^{-1})^{-1/2}$. В промежутке $\omega_2 \leq |\omega| \leq \omega_1$ для α_1 нет действительных решений, и волны не распространяются. В оставшемся диапазоне частот имеются волновые решения. При этом высоким частотам $|\omega| > \omega_1$ соответствуют так называемые оптические моды, а низким частотам $|\omega| < \omega_2$ – акустические моды.

Обратимся теперь к диссипативным процессам. Для простоты анализа вязкоупругой связи трансляционных и вращательных движений примем, что отличен от нуля только один диссипативный коэффициент $\beta = \beta_{11} > 0$.

Тогда в приближении слабой диссипации уравнение (2.5) вместо (2.9) имеет решение

$$\omega = \pm\omega_1 + i\beta(2J)^{-1}$$

а уравнение (2.6) вместо (2.10) имеет решение

$$k = \alpha_1\omega + i\alpha_2\beta, \quad \alpha_2 = -i\rho_0 J^2\alpha_1^{-1}((\lambda_2 + \tfrac{1}{2}\zeta)J\omega^2 - \zeta\lambda_2)^{-2}\omega^6$$

Таким образом, поворотная вязкость β определяет как затухание вращательных колебаний, так и поглощение поперечных волн.

3. Рассмотрим теперь нелинейные эффекты при распространении волн в упругой среде с микроструктурой. А именно, сохраним высшие степени в упругом потенциале (2.2) (по аналогии с подходом [1, 2]). Очевидно, что при этом для энергетической стабильности модели необходимо вводить в потенциал (2.2) члены по крайней мере четвертой степени по компонентам микроповоротов. Как и в линейном приближении используем модель с единственным диссипативным коэффициентом β и ограничимся изотермическими процессами.

Пусть все поля зависят от времени и одной координаты $x = x_1$. Примем следующее представление для перемещений и микроповоротов: $u_i = \delta_{i2}u(t, x)$, $\varphi_i^0 = \delta_{i3}\varphi(t, x)$ и пусть упругий потенциал микроповоротов определяется рядом вплоть до четвертой степени относительного поворота $W(\varphi) = (\frac{1}{2}\zeta + \frac{1}{3}\zeta_1\varphi + \frac{1}{4}\zeta_2\varphi^2)\varphi^2$. При этом энергетическая устойчивость модели и локальная устойчивость состояния $\varphi = 0$ обеспечивается условием на коэффициенты $\zeta > 0$ и $\zeta_2 > 0$.

Динамические уравнения (1.2), (1.3) приводят к следующей системе уравнений для неизвестных функций $u(t, x)$, $\varphi(t, x)$:

$$\rho_0\partial_t^2 u - \tfrac{1}{2}\lambda_2\partial_x^2 u = -\tfrac{1}{2}\partial_x(\beta\partial_t\varphi + dW / d\varphi) \tag{3.1}$$

$$J\partial_t^2\varphi + \beta\partial_t\varphi + dW / d\varphi = -\tfrac{1}{2}J\partial_t^2\partial_x u \tag{3.2}$$

$$dW / d\varphi = (\zeta + \zeta_1\varphi + \zeta_2\varphi^2)\varphi$$

В широком классе случаев можно считать члены в правой части уравнения (3.1) малыми по сравнению с членами в левой части. Это предположение справедливо для процессов, при которых упругие напряжения значительно превышают упругие силы для микроповоротов, характеризуемые величиной $dW/d\varphi$, и вязкую диссипацию, характеризуемую величиной $\beta\partial_t\varphi$.

Тогда систему (3.1), (3.2) можно решать методом последовательных приближений: взять некоторое решение уравнения (3.1) для u с нулевой правой частью и подставить его в правую часть уравнения (3.2), затем найти решение уравнения (3.2) для φ и подставить его в правую часть уравнения (3.1) и так далее.

Например, возьмем решение типа бегущей волны

$$u = -a_0\cos(\omega t - kx), \quad \omega = kV, \quad V = (\lambda_2 / (2\rho_0))^{-1} \tag{3.3}$$

После подстановки этого выражения в (3.2) получим уравнение Дюффинга для осциллятора с нелинейно-упругим восстанавливающим моментом и линейно-вязким трением, на который действует внешняя гармоническая сила. После ряда переобозначений это уравнение приобретает вид

$$\partial_\eta^2\Phi + \lambda\partial_\eta\Phi + (\varkappa_0 + \varkappa_1\Phi + \Phi^2)\Phi = A_0\sin(2\pi(\eta - \eta_0))$$

$$\varphi(t, x) = \zeta_2^{-\frac{1}{2}}J^{\frac{1}{2}}(2\pi)^{-1}\omega\Phi(\eta, x), \quad \eta = (2\pi)^{-1}\omega t \tag{3.4}$$

$$\eta_0 = (2\pi)^{-1}kx, \quad \lambda = 2\pi\beta\omega^{-1}J^{-1}, \quad \varkappa_0 = 2\pi\zeta J^{-\frac{1}{2}}\omega^{-1}\zeta_2^{-\frac{1}{2}}$$

$$\varkappa_1 = 2\pi\zeta_1 J^{-\frac{1}{2}}\omega^{-1}\zeta_2^{-\frac{1}{2}}, \quad A_0 = 2\pi^2 k a_0\omega\zeta_2^{\frac{1}{2}}J^{-\frac{1}{2}}$$

Динамика нелинейного осциллятора (3.4) полностью характеризуется отображением Пуанкаре в фазовой плоскости Φ, $\partial_\eta\Phi$, связывающим точки на траекториях через период:

$$M: (\Phi(0, x), \partial_\eta\Phi(0, x)) \to (\Phi(1, x), \partial_\eta\Phi(1, x))$$

Очевидно, что отображение M уменьшает фазовый объем с множителем $e^{-\lambda}$. Поэтому в общем случае точка фазовой плоскости при последовательном применении отображения Пуанкаре притягивается к некоторому аттрактору с нулевым фазовым объемом. Аттракторы могут состоять из конечного или бесконечного числа точек – простой и странный аттракторы соответственно. В случае простого аттрактора реализуется устойчивое периодическое решение, период которого кратен периоду упругой волны (3.3). Для странного аттрактора реализуется квазистохастическое поведение микроповоротов, которое однако характеризуется вполне определенными спектральными характеристиками, не зависящими от начальных условий.

Обсудим возможность перестроек аттрактора при изменении управляющих параметров. Так как свойства среды фиксированы, в рассматриваемой задаче есть два варьируемых параметра: амплитуда a_0 и частота ω упругой волны. Однако, поскольку отображение Пуанкаре строго уменьшает фазовый объем, не могут реализовываться многие перестройки, описанные для двупараметрических систем [5], например бифуркации утроения периода. Для периодических решений могут реализовываться только перестройки, когда собственное значение производного отображения последования проходит через +1 или через –1 [5]. В первом случае периодическое решение теряет устойчивость, во втором происходит бифуркация удвоения периода [6, 7].

Итак, при изменении частоты и амплитуды может происходить последовательность бифуркаций удвоения некоторого исходного периода (который не обязательно кратен двум), потеря устойчивости периодического решения с образованием некоторого нового устойчивого периодического решения или странного аттрактора, а также перестройка странного аттрактора. Численное исследование аналогичной задачи было осуществлено в [8].

Аналитически аттрактору соответствует решение уравнения (3.4) вида $\Phi = \Phi_0(\eta - \eta_0)$, где Φ_0 в широком ряде случаев может быть периодической функцией с целым периодом n. Если подставить это решение в правую часть уравнения (3.1), то получается уравнение для поправки первого порядка к основной волне (3.3):

$$\rho_0\partial_t^2\Delta u - \tfrac{1}{2}\lambda_2\partial_x^2\Delta u = -\tfrac{1}{2}\partial_x(\beta\partial_t\varphi + dW/d\varphi) = F(t - V^{-1}x)$$

Легко найти решение этого уравнения

$$\Delta u = \lambda_2^{-1}VxF_1(t - V^{-1}x), \quad F_1 = \tfrac{1}{2}J\partial_t(\varphi + \tfrac{1}{2}\partial_x u) \tag{3.5}$$

Напомним, что если рассматривать некоторую затухающую волну $u = \exp(-\delta x)\times \times\cos(\omega_1 t - k_1 x)$, $\delta > 0$ в приближении слабой диссипации, то поправка, обусловленная диссипацией, имеет следующий вид

$$\Delta u = -\delta x\cos(\omega_1 t - k_1 x)$$

Сравнение этого выражения с (3.5) позволяет интерпретировать найденную поправку к волне (3.3), как описывающую поглощение исходной волны и как перекачку ее энергии в волны других частот. Более конкретно, если Φ_0 – периодическая функция с целым периодом n, то поправка Δu содержит спектр частот $(m\omega/n)$ для произвольных целых m. Иными словами, нелинейность микровращений может приводить к тому, что упругая волна генерирует вторичные процессы с меньшими частотами, соизмеримыми с исходной частотой. Это качественно объясняет экспериментальные результаты [9, 10], где наблюдалась трансформация спектра сигнала – не просто появление более низких частот, как это было при полевых наблюдениях [11], но четко заметный эффект удвоения и утроения периода. В упоминаемых работах изучались ультразвуковые [9, 10] и сейсмические волны [11].

Описанная выше модель возникновения устойчивого нестационарного режима микровращений дает новый механизм перекачки энергии трансляционных движений среды в другие участки спектра путем возбуждения внутренних степеней свободы. Другие механизмы исследовались ранее в работах [1, 2, 12, 13].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Динариев О.Ю., Николаевский В.Н.* Нестационарный режим микровращений // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 5. С. 175–180.
2. *Динариев О.Ю., Николаевский В.Н.* Ползучесть горных пород как источник сейсмического шума // Докл. РАН. 1993. Т. 331. № 6. С. 739–741.

3. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1973. 536 с.
4. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 С.
5. *Арнольд В.И., Афраймович В.С., Ильяшенко Ю.С., Шильников Л.П.* Теория бифуркаций // Итоги науки и техники. Сер.: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1986. Т. 5. С. 5–218.
6. *Фейгенбаум М.* Универсальность в поведении нелинейных систем // Успехи физ. наук. 1983. Т. 141. Вып. 2. С. 343–374.
7. *Вул Е.Б., Синай Я.Г., Ханин К.М.* Универсальность Фейгенбаума и термодинамический формализм // Успехи мат. наук. 1984. Т. 39. Вып. 3. С. 3–37.
8. *Белоненко В.Н., Динариев О.Ю., Мосолов А.Б.* Численный анализ нелинейной устойчивости колебаний плиты, лежащей на слое вязкой сжимаемой жидкости // ПМТФ. 1986. № 4. С. 141–145.
9. *Гущин В.В., Заславский Ю.М., Рубцов С.Н.* Трансформация спектра высокочастотного импульса при распространении в поверхностном слое грунта. Препр. Нижегор. н.-и. радиофиз. ин-та. № 395. Нижний Новгород, 1994. 20 С.
10. *Бубнов Е.Я., Заславский Ю.М., Рубцов С.Н.* Зондирование подповерхностной неоднородности импульсным сейсмическим источником. Препр. Нижегор. н.-и. радиофиз. ин-та. № 401. Нижний Новгород, 1994. 10 С.
11. *Вильчинская Н.А., Николаевский В.Н.* Акустическая эмиссия и спектр сейсмических сигналов // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1984. № 5. С. 91–100.
12. *Крылов А.Л., Николаевский В.Н., Эль Г.А.* Математическая модель нелинейной генерации ультразвука сейсмическими волнами // Докл. АН. 1991. Т. 318. № 6. С. 1340–1344.
13. *Ерофеев В.И.* Синхронные взаимодействя продольных волн и волн вращения в нелинейно-упругой среде Коссера // Акуст. ж. 1994. Т. 40. № 2. С. 247–252.

Москва

Поступила в редакцию
12.IV.1996