МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1997

УДК 539.3

 Э.А. ЛЕОНОВА

О НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧАХ СТАТИКИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Существует широкий класс важных для практики проблем о напряженно-деформированном состоянии упругодеформируемых тел, которые в математической постановке не сводятся к классическим первой и второй основным задачам и смешанным краевым задачам теории упругости и термоупругости [1, 2]. Поверхность тела может включать недоступные участки, так что на них не могут быть заданы ни вектор перемещения, ни вектор напряжения. В то же время на остальной части граничной поверхности могут быть в результате прямых измерений с определенной точностью известны оба вектора, например, вектор перемещения, измеренный на свободной от нагрузок части границы. Подобные задачи для упругого тела с заданием на доступном участке поверхности переопределенных граничных условий были рассмотрены в [3, 4].

Задачи теории упругости и термоупругости с переопределенными на части границы условиями и неизвестными условиями на оставшейся части границы относятся к некорректным задачам математической физики.

Условно корректные задачи, некорректные по Адамару, корректные по Тихонову, для эллиптических уравнений, в частности, задача Коши для уравнения Лапласа, явились предметом значительного числа исследований [5–10]. Для многих проблем установлены классы корректности и разработаны методы получения устойчивых решений.

В публикуемой работе задача линейной теории упругости и несвязанной термоупругости с указанным типом граничных условий приводится к задаче Коши для уравнения Лапласа.

1. Исходная задача. Однородное изотропное упругое тело, занимающее область $\overline{D} \subset E^m$ евклидова пространства E^m, $m = 2, 3$, ограниченную поверхностью $S = S_0 \cup S_1$, не обязательно связной, находится под действием известных полей массовых сил $\mathbf{f}(x)$, температуры $\vartheta(x)$, $x \in E^m$ и поверхностных внешних воздействий, из которых в результате прямых измерений известны вектор перемещения $\mathbf{u}(x)$, $x \in S_0$ и вектор напряжения $\mathbf{p}^{(n)}(x)$, $x \in S_0$. Все внешние воздействия на тело таковы, что обеспечивают статическое или квазистатическое его деформирование (время-параметр в записи всюду опускается) при малых отклонениях $\mathbf{u}(x)$, $\vartheta(x)$, $\nabla\mathbf{u}(x)$, $\nabla\vartheta(x)$; $x \in \overline{D}$ от естественного состояния $\mathbf{u}(x) = 0$, $\vartheta(x) = 0$, $\nabla\mathbf{u}(x) = 0$, $\nabla\vartheta(x) = 0$; $x \in \overline{D}$. Определению в рамках классической симметричной линейной теории упругости и несвязанной теории термоупругости подлежат характеристики напряженно-деформированного состояния внутри области и на недоступной части его границы.

Уравнения несвязанной теории термоупругости [1, 2] запишем в виде, преобразованном для одновременного анализа случаев сжимаемого и механически несжимаемого $k^{-1} = 0$ материала

$$\nabla^2\mathbf{u} + (2+\varkappa)\nabla\sigma + 2\mathbf{f} + \alpha\nabla\vartheta = 0 \tag{1.1}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} - 3(\varkappa\sigma + \alpha\vartheta) = 0, \quad \varkappa = 2\mu/3k; \quad x \in \overline{D}$$

Безразмерные σ и $\mathbf{f}$ – среднее гидростатическое напряжение и вектор объемных сил, отнесенные к модулю сдвига 2μ.

Граничные условия $\mathbf{p}^{(n)} = 2\mu\mathbf{p}^s(x)$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}^s(x)$; $x \in S_0$ для системы (1.1) преобразуются к виду

$$(1-\varkappa)\sigma\mathbf{n} + \mathbf{n}\times\boldsymbol{\omega} + \mathbf{n}\cdot\nabla\mathbf{u} = \mathbf{p}^s(x) + \alpha\vartheta^s(x)\mathbf{n}$$

$$2\boldsymbol{\omega} = \nabla\times\mathbf{u} \tag{1.2}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^s(x); \quad x \in S_0 \tag{1.3}$$

Таким образом, напряженно-деформированное состояние тела определяется в результате решения следующей краевой задачи.

Найти в области $D \cup S_1$ решение $\{\mathbf{u}, \sigma\}$ системы уравнений (1.1), удовлетворяющее условиям (1.2), (1.3).

Геометрические характеристики области $\overline{D}$, заданные функции $\mathbf{f}(x)$, $\vartheta^s(x)$; $x \in \overline{D}$ и согласованная пара $\{\mathbf{p}^s(x), \mathbf{u}^s(x)\}$; $x \in S_0$, обеспечивающие существование решения, предполагаются удовлетворяющими соответствующим ограничениям, различным в зависимости от выбора класса функций для искомого решения.

2. Напряженно-деформированное состояние окрестности границы. Тонкий слой, прилегающий к $S_0 \subset S$ будем изучать в системе координат, образованный произвольной сетью координатных линий на поверхности q^1, q^2 и конгруэнцией нормалей. Пусть регулярный кусок S_0 задается в виде $\mathbf{x} = \mathbf{r}(q^1, q^2)$. Локальный базис $\mathbf{r}_\alpha$; $\alpha = 1, 2$, $x \in S_0$ в обыкновенной точке $x \in S_0$, радиус-вектор $\mathbf{x}$ близкой к ней точки $x \in D$, локальный ковариантный базис $\mathbf{x}_i$ ($i = 1, 2, 3$) в этой точке и вектор перемещения $\mathbf{u}(x) \in \mathbf{C}^2(\overline{D}) \cap \mathbf{C}^3(D)$ запишутся в виде

$$\begin{aligned}
&\mathbf{x} = \mathbf{r}(q^1, q^2) + z\mathbf{n}(q^1, q^2), \quad \mathbf{n} = a^{-1/2}\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 \\
&\mathbf{x}_\alpha = \mathbf{r}_\alpha - zb_\alpha^\beta\mathbf{r}_\beta, \quad \mathbf{x}^\alpha = \chi^{-1}[\mathbf{r}^\alpha + z(b_\beta^\alpha\mathbf{r}^\beta - 2H\mathbf{r}^\alpha)] \\
&\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}^3 = \mathbf{n}, \quad \chi = 1 - 2H + Kz^2 \\
&\mathbf{u} = \mathbf{u}^s(q^1, q^2) + z\mathbf{u}_3(q^1, q^2) + z^2\mathbf{u}_4(q^1, q^2) \\
&\mathbf{r}^\alpha = a^{\alpha\beta}\mathbf{r}_\beta, \quad a = \det\|a_{\alpha\beta}\|, \quad 2H = b_\alpha^\alpha, \quad K = b_1^1 b_2^2 - b_2^1 b_1^2
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь и далее $\mathbf{r}^\alpha$ – взаимный базис на S_0, $m = 3, a^{\alpha\beta}\mathbf{r}_\alpha\mathbf{r}_\beta$ – поверхностный метрический тензор, $b_\alpha^\beta\mathbf{r}^\alpha\mathbf{r}_\beta$ – тензор кривизны, ∇^s, $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ – поверхностные набла-оператор и символы Кристоффеля.

Найдем характеристики деформированного состояния поверхностного слоя окрестности S_0 по известным $\mathbf{u}^s(x)$ и $\mathbf{p}^s(x)$; $x \in S_0$. Для этого вычислим из (2.1) и (1.1):

$$3\varkappa\sigma = \nabla^s\cdot\mathbf{u}^s + \mathbf{n}\cdot\mathbf{u}_3 - 3\alpha\vartheta^s + z(\mathbf{r}^\alpha\cdot\mathbf{u}_{3\alpha} + b_\beta^\alpha\mathbf{r}^\beta\cdot\mathbf{u}_\alpha^s + 2\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}_4 - 3\alpha\vartheta_n^s) \tag{2.2}$$

$$2\boldsymbol{\omega} = \nabla^s\times\mathbf{u}^s + \mathbf{n}\times\mathbf{u}_3 + z(\mathbf{r}^\alpha\times\mathbf{u}_{3\alpha} + b_\beta^\alpha\mathbf{r}^\beta\times\mathbf{u}_\alpha^s + 2\mathbf{n}\times\mathbf{u}_4)$$

Найдем значения σ и $\boldsymbol{\omega}$ на S_0. Первое из соотношений (2.2) содержит две неизвестные скалярные величины: σ и $\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}_3$. Можно заметить, что оно и нормальная проекция (1.2) при учете (1.3) образуют систему двух линейных алгебраических уравнений. Решение этой системы единственно без дополнительных ограничений на исходные данные задачи и имеет вид

$$\sigma^s = [\mathbf{p}^s\cdot\mathbf{n} + \nabla^s\cdot\mathbf{u}^s - 2\alpha\vartheta^s](1+2\varkappa)^{-1} \tag{2.3}$$

$$\mathbf{u}_3\cdot\mathbf{n} = [3\varkappa\mathbf{p}^s\cdot\mathbf{n} - (1-\varkappa)\nabla^s\cdot\mathbf{u}^s + 3\alpha\vartheta^s](1+2\varkappa)^{-1} \tag{2.4}$$

Второе из соотношений (2.2) и проекция (1.2) на касательную плоскость с учетом (1.3) образуют систему двух линейных векторных уравнений относительно неизвестных $\boldsymbol{\omega}^s$ и $\mathbf{u}_{3\tau} = \mathbf{u}_3 - (\mathbf{u}_3\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$. Решение системы, также единственное без дополнительных ограничений, дает в явном виде значения

$$\boldsymbol{\omega}^s = \mathbf{n}\times\mathbf{p}^s_\tau + e^{\alpha\beta}a^{-1/2}\,{}^1\!/_2(\mathbf{u}^s_\alpha\cdot\mathbf{r}_\beta)\mathbf{n} + e^{\beta\alpha}a^{-1/2}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}^s_\alpha)\mathbf{r}_\beta \tag{2.5}$$

$$e^{11} = e^{22} = 0,\quad e^{12} = 1,\quad e^{21} = -1$$

$$\mathbf{u}_{3\tau} = 2\mathbf{p}^s_\tau - \mathbf{r}^\alpha(\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}^s_\alpha),\quad x\in S_0 \tag{2.6}$$

Полученные формулы (2.3)–(2.6) позволяют на участках границы, где известны и вектор перемещения, и вектор напряжения, вычислить нормальную производную вектора перемещения

$$\mathbf{u}^s_n = \mathbf{n}[3\varkappa\mathbf{p}^s\cdot\mathbf{n} - (1-\varkappa)\nabla^s\cdot\mathbf{u}^s + 3\alpha\vartheta^s](1+2\varkappa)^{-1} + 2\mathbf{p}^s_\tau - \mathbf{r}^\alpha(\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}^s_\alpha),\quad x\in S_0 \tag{2.7}$$

и полностью определить тензор деформации $\varepsilon_{ij}x^ix^j$:

$$2\varepsilon^s_{\alpha\beta} = \mathbf{r}_\alpha\cdot\mathbf{u}^s_\beta + \mathbf{r}_\beta\cdot\mathbf{u}^s_\alpha,\quad \varepsilon^s_{\alpha3} = \mathbf{r}_\alpha\cdot\mathbf{p}^s,\quad \varepsilon_{33} = \mathbf{u}_3\cdot\mathbf{n};\quad x\in S_0$$

Найдем выражение нормальной производной от σ на границе через $\mathbf{u}^s(x)\in \mathbf{C}^2(S_0)$ и $\mathbf{p}^s(x)\in \mathbf{C}^1(S_0)$. Из (2.2) и (1.1) получим соотношения

$$3\varkappa\sigma^s_n - 2\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}_4 - \mathbf{r}^\alpha\cdot\mathbf{u}_{3\alpha} - b^\alpha_\beta\mathbf{r}^\beta\cdot\mathbf{u}^s_\alpha + 3\alpha\vartheta^s_n = 0$$

$$2(1+2\varkappa)\sigma^s_n + \mathbf{n}\cdot\nabla^{s2}\mathbf{u}^s - b^\beta_\alpha\mathbf{r}^\alpha\cdot\mathbf{u}^s_\beta - 2H\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}_3 - \mathbf{r}^\alpha\cdot\mathbf{u}_{3\alpha} + 2\mathbf{f}^s\cdot\mathbf{n} + 4\alpha\vartheta^s_n = 0$$

$$\nabla^{s2}\mathbf{u}^s = a^{\alpha\beta}\mathbf{u}^s_{\alpha\beta} - a^{\alpha\gamma}\Gamma^\beta_{\alpha\gamma}\mathbf{u}^s_\beta;\quad x\in S_0 \tag{2.8}$$

Подставляя в (2.8) значение $\mathbf{u}_3\cdot\mathbf{n}$ из (2.4) и $\mathbf{u}_{3\alpha}$, вычисленное по (2.4), (2.6), получим в явном виде σ^s_n и $\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}_4$ через $\mathbf{u}^s(x)$ и $\mathbf{p}^s(x)$:

$$\sigma^s_n = [\nabla^s\cdot\mathbf{p}^s_\tau - \mathbf{n}\cdot\nabla^{s2}\mathbf{u}^s + b^{\alpha\beta}\varepsilon^s_{\alpha\beta} - \mathbf{f}^s\cdot\mathbf{n} - 2\alpha\vartheta^s_n](1+2\varkappa)^{-1}$$

$$2\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}_4 = [(1-\varkappa)(\mathbf{n}\cdot\nabla^{s2}\mathbf{u}^s - 2H\nabla^s\cdot\mathbf{u}^s) - (2+\varkappa)b^{\alpha\beta}\varepsilon^s_{\alpha\beta} - \tag{2.9}$$

$$-(2+\varkappa)\nabla^s\cdot\mathbf{p}^s_\tau + 6\varkappa H\mathbf{p}^s\cdot\mathbf{n} - 3\varkappa\mathbf{f}^s\cdot\mathbf{n} + 3\alpha(\vartheta^s_n + 2H\vartheta^s)](1+2\varkappa)^{-1}$$

3. Состояние внутри области. Полученные зависимости (2.3)–(2.9) позволяют свести задачу (1.1)–(1.3) к задаче Коши для эллиптических уравнений в традиционной форме.

Краевая задача. Для сжимаемого $\varkappa > 0$ материала задача может быть поставлена и в перемещениях, и как частный случай общей $\varkappa \geqslant 0$ задачи.

1. Пусть $\varkappa > 0$. Тогда задача (1.1)–(1.3) допускает формулировку в перемещениях. В области $D\cup S_1$ найти решение уравнения Ляме [1, 2]:

$$\varkappa\nabla^2\mathbf{u} + {}^1\!/_3(2+\varkappa)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} + 2\varkappa\mathbf{f} - 2\alpha\nabla\vartheta = 0 \tag{3.1}$$

удовлетворяющее условиям

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^s(x),\quad \mathbf{u}_{,n} = \mathbf{u}^s_n(x);\quad x\in S_0 \tag{3.2}$$

где $\mathbf{u}^s_n$ выражено через заданные $\mathbf{u}^s(x)$ и $\mathbf{p}^s(x)$ соотношением (2.7), $\mathbf{u}^s\in\mathbf{C}^1(S_0)$, $\mathbf{p}^s\in\mathbf{C}(S_0)$.

2. Общий случай $\varkappa \geqslant 0$. Задача (1.1)–(1.3) при $\mathbf{u}^s\in\mathbf{C}^2(S_0)$, $\mathbf{p}^s\in\mathbf{C}^1(S_0)$, $\mathbf{f}\in\mathbf{C}^1(\overline{D})$, $\vartheta\in\mathbf{C}^2(\overline{D})$ может быть представлена в виде следующей краевой задачи. В области $D\cup S_1$ найти решение системы уравнений

$$\nabla^2\sigma = -[\nabla\cdot\mathbf{f} + 2\alpha\nabla^2\vartheta](1+2\varkappa)^{-1},\quad x\in D$$

$$\nabla^2\mathbf{u} = -[(2+\varkappa)\nabla\sigma + 2\mathbf{f} + \alpha\nabla\vartheta] \tag{3.3}$$

удовлетворяющее условиям

$$\sigma = \sigma^s(x),\quad \sigma_{,n} = \sigma^s_n(x);\quad x\in S_0 \tag{3.4}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^s(x), \quad \mathbf{u}_{,n} = \mathbf{u}_n^s(x); \quad x \in S_0 \tag{3.5}$$

где σ^s и σ_n^s выражены через $\mathbf{u}^s$ и $\mathbf{p}^s$ формулами (2.3) и (2.9), а $\mathbf{u}_n^s$ – формулой (2.7).

Метод решения. Структура задачи (3.3)–(3.5) дает метод ее решения. Первое уравнение системы (3.3), являющееся следствием (1.1), и граничные условия для него, т.е. (3.4), (2.3), (2.9) не зависят от $\mathbf{u}(x)$, $x \in D \cup S_1$ и содержат только заданные на S_0 функции, поэтому краевая задача для σ независима. После того, как ее решение найдено, решается краевая задача для второго уравнения (3.3) – векторного уравнения Пуассона – с известной правой частью и граничными условиями (3.5).

Теорема единственности. 1. Случай $\varkappa > 0$ при $\mathbf{u}^s \in \mathbf{C}^1(S_0)$, $\mathbf{p}^s = \mathbf{C}(S_0)$, $\mathbf{f} \in \mathbf{C}(\overline{D})$, $\vartheta \in \mathbf{C}^1(\overline{D})$. Пусть $\mathbf{u}^{(1)}(x)$, $\mathbf{u}^{(2)}(x) \in \mathbf{C}^1(\overline{D}) \cap \mathbf{C}^2(D)$ – два решения уравнения (3.1), удовлетворяющие условиям (3.2). Тогда $\mathbf{u}^{(1)}(x) \equiv \mathbf{u}^{(2)}(x)$. Действительно, для $\mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{u}^{(1)} - \mathbf{u}^{(2)}$ имеем краевую задачу

$$\varkappa \nabla^2 \mathbf{u}^{(0)} + \tfrac{1}{3}(2+\varkappa)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u}^{(0)} = 0, \quad x \in D$$

$$\mathbf{u}^{(0)}(x) = 0, \quad \mathbf{u}_{,n}^{(0)}(x) = 0; \quad x \in S_0$$

решение которой $\mathbf{u}^{(0)} \equiv 0$ единственно [7]. Следовательно, $\mathbf{u}^{(1)}(x) \equiv \mathbf{u}^{(2)}(x)$.

2. Случай $\varkappa \geqslant 0$ при $\mathbf{u}^s \in C^2(S_0)$, $\mathbf{p}^s \in C^1(S_0)$, $\mathbf{f} \in \mathbf{C}^2(\overline{D})$, $\vartheta \in C^3(\overline{D})$. Пусть $\{\mathbf{u}^{(1)}, \sigma^{(1)}\}$, $\{\mathbf{u}^{(2)}, \sigma^{(2)}\}$, $\mathbf{u}^{(1)}(x)$, $\mathbf{u}^{(2)}(x) \in \mathbf{C}^2(\overline{D}) \cap \mathbf{C}^3(D)$; $\sigma^{(1)}(x), \sigma^{(2)}(x) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D)$ – два решения задачи (3.3)–(3.5), где σ^s и σ_n^s выражены через $\mathbf{u}^s$ и $\mathbf{p}^s$ соотношениями (2.3) и (2.9), а $\mathbf{u}_n^s$ – соотношением (2.7). Тогда $\mathbf{u}^{(1)}(x) \equiv \mathbf{u}^{(2)}(x)$, $\sigma^{(1)}(x) \equiv \sigma^{(2)}(x)$. Действительно, для $\sigma^{(0)} = \sigma^{(1)} - \sigma^{(2)}$ имеем задачу Коши для уравнения Лапласа

$$\nabla^2 \sigma^{(0)} = 0, \quad x \in D; \quad \sigma^{(0)} = 0, \quad \sigma_{,n}^{(0)} = 0, \quad x \in S_0$$

Решение ее $\sigma^{(0)} \equiv 0$ единственно [7]. Следовательно, $\sigma^{(1)}(x) \equiv \sigma^{(2)}(x)$. Для $\mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{u}^{(1)} - \mathbf{u}^{(2)}$ получим задачу

$$\nabla^2 \mathbf{u}^{(0)} = 0, \quad x \in D; \quad \mathbf{u}^{(0)} = 0, \quad \mathbf{u}_{,n}^{(0)} = 0, \quad x \in S_0$$

Решение ее $\mathbf{u}^{(0)} \equiv 0$ также единственно. Следовательно, $\mathbf{u}^{(1)}(x) \equiv \mathbf{u}^{(2)}(x)$.

Условия на $\mathbf{f}$, ϑ, $\mathbf{u}^s$, $\mathbf{p}^s$ достаточны для представления вектора перемещения через ньютонов скалярный и векторный потенциалы в виде

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{u}_0(x) + (2+\varkappa)\frac{1}{4\pi}\int_D \frac{\nabla\sigma_0}{|x-\xi|}\,d\xi + \mathbf{u}_f(x) + \mathbf{u}_\vartheta(x)$$

$$\mathbf{u}_f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_D \frac{\mathbf{f}(\xi)}{|x-\xi|}\,d\xi + \left(\frac{2+\varkappa}{1+2\varkappa}\right)\frac{1}{4\pi}\int_D \frac{\nabla\sigma_f}{|x-\xi|}\,d\xi$$

$$\mathbf{u}_\vartheta(x) = \frac{\alpha}{4\pi}\int_D \frac{\nabla\vartheta}{|x-\xi|}\,d\xi + \left(\frac{2+\varkappa}{1+2\varkappa}\right)\frac{\alpha}{2\pi}\int_D \frac{\nabla\sigma_\vartheta}{|x-\xi|}\,d\xi$$

$$\sigma_f = \frac{1}{4\pi}\int_D \frac{\nabla\cdot\mathbf{f}}{|x-\xi|}\,d\xi, \quad \sigma_\vartheta = \frac{1}{4\pi}\int_D \frac{\nabla^2\vartheta}{|x-\xi|}\,d\xi$$

где $\sigma_0(x)$ и $\mathbf{u}_0(x)$ – решения соответствующих задач:

$$\nabla^2\sigma_0 = 0, \quad x \in D; \quad \sigma_0 = \sigma_0^s, \quad \sigma_{0,n} = \sigma_{0n}^s, \quad x \in S_0$$

$$\nabla^2\mathbf{u}_0 = 0, \quad x \in D; \quad \mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0^s, \quad \mathbf{u}_{0,n} = \mathbf{u}_{0n}^s, \quad x \in S_0$$

Замечание. Условия на $\mathbf{f}$, ϑ, $\mathbf{u}^s$, $\mathbf{p}^s$ могут быть значительно ослаблены без изменения принципиальных элементов доказательств.

4. Пример. Полый шар в центрально-симметричном температурном поле при $\mathbf{f} \equiv 0$ под действием центрально-симметричной поверхностной нагрузки внутри полости. На свободной от нагрузок внешней поверхности $R = R_2$ шара измеряется вектор перемещения. По результатам измерения $\mathbf{u}^s = u^{(n)}\mathbf{n}$, $u_\alpha^{(n)} = u_\beta^{(n)} = 0$; ϑ^s, $\overset{s}{\vartheta}_n$ требуется определить термоупругое состояние шарового слоя и внутренней его границы $R = R_1$.

Непосредственное решение. 1. При $\varkappa > 0$ имеем для уравнения Ляме (3.1) в сферической системе координат R, θ, φ в безразмерных $R' = R/R_2$, $u' = u_R/R_2$, $\sigma'_{kl} = \sigma_{kl}/2\mu$ (штрихи далее всюду опускаются) краевую задачу с условиями:

$$u(1) = u_R^s, \quad u_\theta(1) = u_\varphi(1) = 0 \tag{4.1}$$

$$\sigma_{RR}(1) = \sigma_{R\theta}(1) = \sigma_{R\varphi}(1) = 0$$

Общее решение $\mathbf{u} = (u, 0, 0)$ уравнения имеет вид

$$u = c_1 R + c_2 R^{-2} - (1+2\varkappa)^{-1} u_\vartheta(R)$$

$$u_\vartheta(R) = 3\alpha R^{-2} \int_R^1 \vartheta R^2 dR \tag{4.2}$$

Вычисляя по (4.2) тензор напряжений, найдем

$$\sigma_{RR} = \frac{1}{\varkappa} c_1 - 2c_2 \frac{1}{R^3} + \frac{2}{(1+2\varkappa)} \frac{u_\vartheta(R)}{R}, \quad \sigma_{R\theta} = \sigma_{R\varphi} = \sigma_{\theta\varphi} = 0 \tag{4.3}$$

Произвольные константы определяются как решение системы уравнений, образованной (4.2), (4.3) при удовлетворении граничных условий (4.1) $c_1 = 2\varkappa\varkappa_1 \overset{s}{u}_R$, $c_2 = \varkappa_1 \overset{s}{u}_R$, $\varkappa_1 \equiv (1 + 2\varkappa)^{-1}$.

Таким образом, напряженно-деформированное состояние описывается соотношениями

$$u = \varkappa_1[u_R^s(2\varkappa R + R^{-2}) - u_\vartheta(R)] \tag{4.4}$$

$$\sigma_{RR} = 2\varkappa_1[u_R^s(1 - R^{-3}) + R^{-1} u_\vartheta(R)]$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \varkappa_1[u_R^s(2 + R^{-3}) - R^{-1} u_\vartheta(R) - 3\alpha\vartheta(R)]$$

$$\sigma = 2\varkappa_1(u_R^s - \alpha\vartheta(R)), \quad \sigma_{R\theta} = \sigma_{R\varphi} = \sigma_{\theta\varphi} = 0$$

2. При $\varkappa = 0$ второе уравнение системы (1.1) решается независимо. Его решение с одной произвольной постоянной, определяемой из первого граничного условия (4.1), будет

$$u = u_R^s R^{-2} - u_\vartheta(R) \tag{4.5}$$

Вычисляя девиатор напряжений и подставляя в уравнение равновесия, которое приобретает вид

$$\sigma_{RR,R} + 2R^{-1}(\sigma_{RR} - \sigma_{\varphi\varphi}) = 0, \quad \sigma = \sigma(R)$$

получаем дифференциальное уравнение первого порядка и его решение с произвольной константой c:

$$\sigma = -2\alpha\vartheta(R) + c \tag{4.6}$$

Вычисляя по (4.5), (4.6) σ_{RR} и удовлетворяя второму граничному условию (4.1), находим $c = 2\overset{s}{u}_R$ и тензор напряжений

$$\sigma_{RR} = 2[u_R^s(1 - R^{-3}) + R^{-1} u_\vartheta(R)] \tag{4.7}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = u_R^s(2 + R^{-3}) - R^{-1}u_\vartheta(R) - 3\alpha\vartheta(R)$$

$$\sigma = 2(u_R^s - \alpha\vartheta(R)), \quad \sigma_{R\theta} = \sigma_{R\varphi} = \sigma_{\theta\varphi} = 0$$

Решение по методу п. 3. Краевая задача (3.3)–(3.5) в рассматриваемом примере принимает вид следующей задачи для σ:

$$\nabla^2(\sigma + 2\alpha\varkappa_1\vartheta) = 0, \quad R_1 < R < 1; \quad \sigma(1) = \sigma^s, \quad \sigma_{,R}(1) = -\sigma_n^s \tag{4.8}$$

с последующим решением задачи для u:

$$\nabla^2 u - \frac{2}{R^2}u = -[(2+\varkappa)\sigma_{,R} + \alpha\vartheta_{,R}], \quad \nabla^2 = \frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}R^2\frac{d}{dR}$$

$$u(1) = u_R^s, \quad u_{,R}(1) = u_n^s \tag{4.9}$$

Вычисляя по $u^s = u^{(n)}n$, $p^s = 0$ значения

$$\nabla^s \cdot u^s = -u^{(n)}2H = 2u_R^s, \quad n \cdot u_\alpha^s = 0$$

$$b^{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}^s = -\tfrac{1}{2}(b_\gamma^\alpha b_\alpha^\gamma + b_\gamma^\beta b_\beta^\gamma)u^{(n)} = -b_\gamma^\alpha b_\alpha^\gamma u^{(n)}$$

$$n \cdot \nabla^{2s}u^s = a^{\alpha\beta}u_{\alpha\beta}^{(n)} - a^{\alpha\gamma}\Gamma_{\alpha\gamma}^\beta u_\beta^{(n)} - u^{(n)}b_\beta^\gamma b_\gamma^\beta = -b_\gamma^\alpha b_\alpha^\gamma u^{(n)}$$

и подставляя в (2.3) и (2.9), получим

$$\sigma^s = 2\varkappa_1(u_R^s - \alpha\vartheta^s), \quad \sigma_n^s = -2\alpha\varkappa_1\vartheta_n^s \tag{4.10}$$

а из (2.7) найдем

$$u_n^s = \varkappa_1[-2(1-\varkappa)u_R^s + \alpha\vartheta^s] \tag{4.11}$$

Интегрируя уравнение (4.8), находим

$$\sigma = c_1R^{-1} + c_2 - 2\alpha\varkappa_1\vartheta(R)$$

Удовлетворяя граничным условиям (4.8), (4.10), получаем значения констант интегрирования $c_1 = 0$, $c_2 = 2\varkappa_1 u_R^s$ и, следовательно, решение краевой задачи (4.8):

$$\sigma = 2\varkappa_1 u_R^s - \alpha\vartheta(R) \tag{4.12}$$

Подставляя (4.12) в уравнение (4.9), находим

$$u = c_1R + c_2R^{-2} - 3\alpha\varkappa_1R^{-2}\int_R^1 \vartheta R^2 dR$$

Из граничных условий (4.9), (4.11) имеем $c_2 = \varkappa_1 u_R^s$, $c_1 = 2\varkappa\varkappa_1 u_R^s$ и получаем решение краевой задачи (4.9)

$$u = \varkappa_1[u_R^s(2\varkappa R + R^{-2}) - u_\vartheta(R)] \tag{4.13}$$

Итак, (4.12), (4.13) – искомое решение. Тензор напряжений получается из него дифференцированием. Сравнение (4.12), (4.13) с непосредственным решением (4.4) при $\varkappa > 0$, (4.7), (4.5) при $\varkappa = 0$ показывают их совпадение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1990. 310 с.
2. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
3. *Фомин А.В., Прейсс А.К.* Определение термоупругого напряженного состояния элемента конструкции по данным измерений на части его поверхности // Машиноведение. 1982. № 1. С. 79–85.

4. *Фомин А.В.* Определение напряженного состояния в объеме детали по известным перемещениям или напряжениям на части ее поверхности // Машиноведение. 1982. № 4. С. 67–73.
5. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 285 с.
6. *Лаврентьев М.М.* О некорректных задачах математической физики. Новосибирск.: Изд-во АН СССР, 1962. 92 с.
7. *Ландис Е.М.* Некоторые вопросы качественной теории эллиптических уравнений второго порядка // Успехи мат. наук. Т. 18. Вып. 1. С. 3–62.
8. *Морозов В.А.* Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. М.: Изд-во МГУ, 1974. 359 с.
9. *Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.
10. *Латтес Р., Лионс Ж.-Л.* Метод квазиобращения и его приложения. М.: Мир, 1970. 336 с.

Москва

Поступила в редакцию
11.IX.1996