МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1997

УДК 531.4

 Д.В. БАЛАНДИН

МАКСИМАЛЬНОЕ СМЕЩЕНИЕ КОНТЕЙНЕРА В СИСТЕМЕ С СУХИМ ТРЕНИЕМ

В практике защиты объектов от ударных возмущений широко применяются изоляторы типа сухого трения. Это объясняется, в частности, тем, что они обеспечивают заданный уровень максимального абсолютного ускорения защищаемого объекта при минимуме максимального его отклонения. В работе [1] было показано, что изолятор типа сухого трения обеспечивает предельно возможное минимальное гарантированное значение максимального отклонения объекта при защите его от ударных возмущений, интеграл от модуля которых ограничен. Необходимо подчеркнуть, что отмеченный факт касается лишь системы с одной степенью свободы. Для многомассовых систем задачи оптимальной гарантированной защиты от ударов практически не рассматривались. Очевидно, что система с одной степенью свободы является существенным упрощением реальной ситуации и не всегда адекватно отражает действительность. В публикуемой статье предпринята попытка изучения систем с многими степенями свободы и получения оценок для их динамических характеристик.

1. Одномассовая система. Вначале напомним некоторые факты, касающиеся системы с одной степенью свободы. Рассмотрим механическую систему следующего вида. Твердое тело, называемое в дальнейшем контейнер, связано посредством изолятора с другим твердым телом, называемым основанием, движущимся вдоль заданного направления по некоторому закону. Уравнение движения контейнера может быть представлено в форме

$$m_0\ddot{x}+u=-m_0\ddot{\xi}(t), \quad x(0)=\dot{x}(0)=0 \tag{1.1}$$

Здесь x – координата контейнера относительно основания, m_0 – масса контейнера, $\ddot{\xi}(t)$ – ускорение основания относительно некоторой инерциальной системы отсчета, $-u$ – сила, действующая между основанием и контейнером, создаваемая изолятором.

Будем полагать, что функция $\ddot{\xi}(t)$, описывающая движение основания, заранее неизвестна. Обозначим $v(t)=-\ddot{\xi}(t)$. Относительно функции $v(t)$ будем считать, что это кусочно-непрерывная функция, удовлетворяющая неравенству

$$\int_0^{\infty}|v(t)|\,dt\leqslant J_0 \tag{1.2}$$

Класс всевозможных функций $v(t)$, удовлетворяющих приведенным условиям, обозначим D. Если функция $v(t)$ является знакоопределенной, то принадлежность ее классу D физически означает ограниченность приращения скорости основания.

Сформулируем задачу оптимальной изоляции объекта массы m_0. Введем в рассмотрение функционал, характеризующий качество изоляции и определяющий максимальное смещение корпуса относительно основания

$$S(u,v)=\sup_{t\in[0,\infty)}|x(t;u,v)| \tag{1.3}$$

где $x(t;\, u, v)$ – решение задачи Коши уравнения (1.1) с заданным типом изолятора, определяющим силу u и заданным ударным возмущением $v(t)$ из класса D. В качестве класса U допустимых изоляторов будем рассматривать такие, которые создают силу $u = u(x, \dot{x}, t)$ и удовлетворяют неравенству

$$|u(x, \dot{x}, t)| \leqslant u_0 \tag{1.4}$$

Задача оптимальной изоляции состоит в том, чтобы найти изолятор из класса U, создающий силу $u^0(x, \dot{x}, t)$, такой, что

$$\sup_{v \in D} S(u^0, v) = \min_{u \in U} \sup_{v \in D} S(u, v) \tag{1.5}$$

В равенствах (1.3), (1.5) вместо операции max использована операция sup. Это связано с необходимостью корректной математической постановки задачи, поскольку максимальное значение функции $|x(t;\, u, v)|$ на бесконечном интервале $[0, \infty)$, а функционала $S(u, v)$ на указанном классе D может, вообще говоря, и не достигаться, тогда как точная верхняя грань (sup) всегда может быть вычислена.

Физический смысл этой задачи легко понять, если обратить внимание на то, что ускорение контейнера относительно инерциальной системы отсчета (абсолютное ускорение), равное $\ddot{x} + \ddot{\xi}$ совпадает согласно (1.1) с u/m_0. Таким образом, ограничение (1.4), по существу, эквивалентно ограничению на модуль абсолютного ускорения контейнера. Функционал (1.3) определяет максимальное отклонение контейнера относительно основания. Итак, смысл поставленной задачи состоит в том, чтобы построить оптимальный изолятор, обеспечивающий заданное ограничение на абсолютное ускорение объекта защиты (в данном случае контейнера) при минимальном максимуме смещения контейнера относительно основания. Если обозначить

$$S^0 = \sup_{v \in D} S(u^0, v)$$

то величина S^0 определяет гарантированный минимум смещения контейтера, который не может быть превышен при любом возмущении из класса D. Более того, величина S^0 является минимально возможной в том смысле, что при любом другом изоляторе, отличном от оптимального (u^0), уменьшить максимальное смещение контейнера нельзя.

Что нам дает решение этой задачи? При заданном ограничении на абсолютное ускорение возникает возможность оценить потребные габариты, в которых будет перемещаться контейнер. Такая оценка является очень важной с практической точки зрения. В самом деле, в отсутствии этой оценки можно либо существенно завысить потребные габариты, что в итоге может привести к нерациональному размещению соседних объектов, либо наоборот, занизить эти габариты, что может привести к соударениям с соседними объектами.

Поставленная выше задача (1.5) была впервые решена в [1]. Оказалось, что оптимальным изолятором является изолятор типа сухого трения, максимальная сила трения покоя в котором равна u_0. При этом оптимальное гарантированное смещение контейнера

$$S^0 = m_0 J_0^2 / (2u_0) \tag{1.6}$$

Заметим, что рассмотренная выше модель виброизоляции является упрощенной. В самом деле, исходная цель изоляции не может состоять в защите от ударных возмущений одного только контейнера. Очевидно, молчаливо предполагается, что объект защиты находится в самом этом контейнере. Это могут быть какие-либо чувствительные приборы, элементы автоматики и т. п. Интуитивно ясно, что упрощение реальной системы и замена сложного по своей структуре объекта защиты одним единственным контейнером возможна при некоторых дополнительных предположениях. Такая замена, по-видимому, возможна, когда масса подвижных элементов много меньше массы контейнера. В этом случае можно ожидать, что подвижные элементы, связанные с контейнером упругой связью, не окажут сколь-нибудь заметного влияния ни на его максимальное смещение, ни на его абсолютное ускорение. С другой стороны, если массы объектов, помещенных в контейнер, не слишком малы по сравнению с массой контейнера, то их влияние может уже сказаться на максимальном его смещении. Поэтому представляется интересным и важным дать количественные оценки такого влияния. Перейдем к описанию математической модели и постановке рассматриваемой далее задачи.

2. Многомассовая система. Будем далее считать, что к контейнеру массы m_0 посредством упругодиссипативных связей прикреплена некоторая механическая система n материальных точек. Будем также считать, что каждая материальная точка массой m_i ($i = 1, ..., n$) может перемещаться только вдоль направления, совпадающего с направлением движения основания. Пусть y_i ($i = 1, 2, ..., n$) координаты материальных точек относительно контейнера. Выведем уравнения движения системы материальных точек и контейнера. Воспользуемся уравнениями Лагранжа. Запишем выражение для кинетической энергии K контейнера и материальных точек

$$K = \frac{m_0(\dot{x}+\dot{\xi})^2}{2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i(\dot{x}+\dot{\xi}+\dot{y}_i)^2}{2}$$

Будем считать, что потенциальная энергия Π системы материальных точек может быть представлена в виде

$$\Pi = \Pi_0 + \Pi_1(\mathbf{y})$$

где Π_0 – некоторая константа, $\mathbf{y}$ – вектор с компонентами $(y_1, ..., y_n)$, а функция $\Pi_1(\mathbf{y})$ обладает следующими свойствами: $\Pi_1(\mathbf{0}) = 0$, $\Pi_1(\mathbf{y}) > 0$ для $|\mathbf{y}| \neq 0$, $\partial\Pi_1/\partial y_i = 0$ при $\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Пусть, кроме того, в системе действуют демпфирующие силы $-f_i(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}})$, удовлетворяющие условию $-\Sigma_i f_i(\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}})\dot{y}_i \leqslant 0$ ($f_i(\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}})$ – непрерывные функции, удовлетворяющие условиям $f_i(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) = 0$ при $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{0}$). Записывая уравнения Лагранжа при сделанных предположениях, получим

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(\ddot{x}+\ddot{\xi}+\ddot{y}_i) + m_0(\ddot{x}+\ddot{\xi}) = -u$$

$$m_i(\ddot{x}+\ddot{\xi}+\ddot{y}_i) + \frac{\partial\Pi_1}{\partial y_i} = -f_i(\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}}) \quad (i = 1,\ldots,n)$$

Преобразуя систему дифференциальных уравнений, далее имеем

$$m_0\ddot{x} = -u + \Phi(\mathbf{y}) + G(\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}}) - m_0\ddot{\xi} \tag{2.1}$$

$$m_i\ddot{y}_i + \frac{\partial\Pi_1}{\partial y_i} + f_i(\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}}) = \frac{m_i}{m_0}\{u - \Phi(\mathbf{y}) - G(\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}})\} \quad (i = 1,\ldots,n)$$

$$\Phi(y) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\Pi_1}{\partial y_i}, \quad G(\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}}) = \sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}})$$

Будем считать, что изолятор u, включенный между контейнером и основанием, есть изолятор типа сухого трения, т. е.

$$u = u(\dot{x}) = \begin{cases} u_0\,\mathrm{sign}(\dot{x}), & \dot{x} \neq 0 \\ \nu, & \dot{x} = 0, \ |\nu| \leqslant u_0 \\ u_0\,\mathrm{sign}(\nu), & \dot{x} = 0, \ |\nu| > u_0 \end{cases}$$

где $\nu = \Phi(\mathbf{y}) + G(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) - m_0\ddot{\xi}$. С целью упрощения записи введем обозначения

$$R(\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}})=\Phi(\mathbf{y})+G(\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}}),\quad \varphi_i(\mathbf{y})=\frac{\partial\Pi_1}{\partial y_i},\quad \mu_i=\frac{m_i}{m_0},\quad \upsilon(t)=-\ddot{\xi}(t)$$

Тогда уравнения (2.1) примут вид

$$m_0\ddot{x}=-u(\dot{x})+R(\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}})+m_0\upsilon(t) \tag{2.2}$$

$$m_i\ddot{y}_i+f_i(\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}})+\varphi_i(\mathbf{y})=\mu_i[u(\dot{x})-R(\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}})]\quad (i=1,\dots,n) \tag{2.3}$$

За исходное состояние примем положение равновесия невозмущенной системы:

$$x(0)=0,\ \mathbf{y}(0)=\mathbf{0},\ \dot{x}(0)=0,\ \dot{\mathbf{y}}(0)=\mathbf{0}$$

Поставим следующую задачу: оценить максимальное смещение контейнера в системе, описываемой уравнениями (2.2), (2.3) при действии возмущений из класса D. В математической форме это означает, что необходимо получить оценки на величину

$$S^0=\sup_{\upsilon\in D}\sup_{t\in[0,\infty)}|x(t;\upsilon)|$$

где $x(t;\upsilon)$ находится из решения системы (2.2), (2.3) при заданном возмущении $\upsilon(t)$. Пержде чем приступать к исследованию поставленной задачи отметим два предельных случая. Первый случай, когда $m_i/m_0\ll 1$ ($i=1,\dots,n$) и в пределе все $\mu_i\to 0$, тогда с учетом наложенных выше ограничений на функции $\Pi_1(\mathbf{y})$ и $f_i(\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}})$, получаем $R(\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}})\equiv$ $\equiv 0$ для $t\geqslant 0$. Следовательно, искомая оценка совпадает с выражением (1.6). Второй случай: очень слабая связь системы материальных точек и контейнера, т. е. $R(\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}})\to$ $\to 0$. В этом случае искомая оценка также совпадает с (1.6). Будем в дальнейшем строить оценку для S^0 с учетом этих двух предельных случаев.

3. Оценки максимального смещения. Прежде чем получить оценку для величины S^0, приведем ряд предварительных оценок. Воспользуемся сначала приемом, предложенным в [2] для оценивания максимальной энергии механической системы, подверженной ударным возмущениям, интеграл от абсолютной величины которых ограничен. Введем в рассмотрение функцию

$$E(t;\upsilon)=\frac{m_0\dot{x}^2}{2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i(\dot{x}+\dot{y}_i)^2}{2}+\Pi_1(\mathbf{y})$$

определяющую с точностью до постоянной Π_0 полную механическую энергию всей системы (система материальных точек и контейнер) в ее движении относительно основания. Согласно известной теореме аналитической механики [3] имеем

$$\frac{dE(t;\upsilon)}{dt}=-u(\dot{x})\dot{x}-\sum_{i=1}^{n}f_i(\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}})\dot{y}_i+\left[m_0\dot{x}+\sum_{i=1}^{n}m_i(\dot{x}+\dot{y}_i)\right]\upsilon(t) \tag{3.1}$$

Первые два слагаемых в правой части выражения (3.1) определяют работу диссипативных сил, а последнее слагаемое дает работу сил инерции. Поскольку по определению диссипативных сил

$$-u(\dot{x})\dot{x}-\sum_{i=1}^{n}f_i(\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}})\dot{y}_i\leqslant 0$$

то справедливы неравенства

$$\frac{dE(t;\upsilon)}{dt}\leqslant\left|\left[m_0\dot{x}+\sum_{i=1}^{n}m_i(\dot{x}+\dot{y}_i)\right]\upsilon(t)\right|\leqslant\left|m_0\dot{x}+\sum_{i=1}^{n}m_i(\dot{x}+\dot{y}_i)\right||\upsilon(t)| \tag{3.2}$$

В дальнейшем для сокращения записи введем переменную $X_c=[m_0x+\Sigma_i m_i(x+$ $+y_i)](m_0+\Sigma_i m_i)^{-1}$, определяющую координату центра масс всей системы относительно основания. Таким образом, неравенство (3.2) можно записать в виде

$$dE(t;\upsilon)/dt \leqslant (m_0+m_+)\left|\dot{X}_c\right|\left|\upsilon(t)\right| \tag{3.3}$$

Здесь $m_+ = \Sigma_i m_i$ – суммарная масса всех материальных точек. Заметим, что кинетическая энергия материальной точки с массой, равной $m_0 + m_+$, помещенной в центр масс, не превосходит полной кинетической энергии системы, т. е. справедливо неравенство

$$\frac{(m_0+m_+)\dot{X}_c^2}{2} \leqslant \frac{m_0\dot{x}^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{x}+\dot{y}_i)^2$$

а с учетом положительной определенности функции $\Pi_1(\mathbf{y})$ имеем

$$\frac{(m_0+m_+)\dot{X}_c^2}{2} \leqslant E(t;\upsilon)$$

Откуда следует

$$\left|\dot{X}_c\right| \leqslant \sqrt{\frac{2E(t;\upsilon)}{(m_0+m_+)}} \tag{3.4}$$

Рассматривая совместно неравенства (3.3) и (3.4), получим

$$dE(t;\upsilon)/dt \leqslant \sqrt{2(m_0+m_+)E(t;\upsilon)}|\upsilon(t)|$$

Интегрируя это неравенство на отрезке $[0, t]$ с учетом нулевых начальных условий и равенства $\Pi_1(\mathbf{0}) = 0$, будем иметь

$$\sqrt{E(t;\upsilon)} \leqslant \sqrt{\frac{m_0+m_+}{2}}\int_0^t |\upsilon(t)|dt \quad \forall t \geqslant 0, \quad \forall \upsilon(\cdot)\in D$$

Далее с учетом неравенства (1.2) получим

$$E(t;\upsilon) \leqslant \frac{(m_0+m_+)}{2}J_0^2 \tag{3.5}$$

а с учетом (3.4):

$$|\dot{X}_c| \leqslant \int_0^t |\upsilon(t)|dt \tag{3.6}$$

Заметим, что неравенство (3.5) было ранее получено в [2].

Проинтегрируем теперь равенство (3.1) на отрезке $[0, t]$ и получим

$$E(t;\upsilon) = (m_0+m_+)\int_0^t \dot{X}_c(t;\upsilon)\upsilon(t)dt - \int_0^t \dot{x}u(\dot{x})dt - \int_0^t \sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}})\dot{y}_i dt$$

Поскольку $E(t;\upsilon) \geqslant 0$ и $\Sigma_i f_i(\mathbf{y}, \dot{y})\dot{y}_i \geqslant 0$, то справедливо неравенство

$$(m_0+m_+)\int_0^t \dot{X}_c(t;\upsilon)\upsilon(t)dt \geqslant \int_0^t \dot{x}u(\dot{x})dt$$

а с учетом того, что $\dot{x}u(\dot{x}) \geqslant 0$, справедливо также неравенство

$$(m_0+m_+)\int_0^t |\dot{X}_c(t;\upsilon)||\upsilon(t)|dt \geqslant \int_0^t \dot{x}u(\dot{x})dt \tag{3.7}$$

Рассмотрим интеграл в правой части (3.7). С учетом определения силы сухого трения имеем

$$\int_0^t \dot{x}u(\dot{x})dt = u_0\int_0^t |\dot{x}(t;\upsilon)|dt$$

С другой стороны, справедливы неравенства

$$|x(t;v)|=\left|\int_0^t \dot{x}(t;v)dt\right|\leqslant \int_0^t|\dot{x}(t;v)|dt \tag{3.8}$$

Следовательно

$$\sup_{t\in[0,\infty)}|x(t;v)|\leqslant \int_0^\infty|\dot{x}(t;v)|dt \tag{3.9}$$

Обратимся теперь к интегралу, стоящему в левой части неравенства (3.7). С учетом (3.6) имеем

$$\int_0^t\left|\dot{X}_c(t;v)\right|\left|v(t)\right|dt\leqslant \int_0^t\left|v(t_1)\right|\left|\int_0^{t_1}\right|\dot{v}(\tau)\left|d\tau dt_1\right. \tag{3.10}$$

Возьмем последний интеграл по частям и получим

$$\int_0^t\left|v(t_1)\right|\left|\int_0^{t_1}\right|v(\tau)\left|d\tau dt_1\right.=\frac{1}{2}\left(\int_0^t|v(\tau)|d\tau\right)^2 \tag{3.11}$$

Итак, с учетом (3.8), (3.10), (3.11) неравенство (3.7) можно представить в виде

$$\frac{(m_0+m_+)}{2}\left(\int_0^t|v(\tau)|d\tau\right)^2\geqslant u_0\int_0^t|\dot{x}(t;v)|dt$$

Далее, с учетом (1.2) и (3.9) получим

$$S^0\leqslant\frac{(m_0+m_+)}{2u_0}J_0^2 \tag{3.12}$$

Итак, первая оценка получена. Она показывает, что смещение контейнера не превосходит величины $(m_0+m_+)J_0^2/(2u_0)$. Эта величина соответствует равенству (1.6) как если бы к контейнеру все точечные массы были прикреплены жестко. Однако, если связь системы материальных точек с ним достаточно слабая, то полученная оценка может оказаться слишком грубой. Попытаемся теперь уточнить полученную оценку. Наметим ход дальнейших рассуждений. Введем обозначение

$$\eta(t;v)=R[\mathbf{y}(t;v),\ \dot{\mathbf{y}}(t;v)]$$

Функция $\eta(t;\ v)$ задает текущее значение силовой связи системы материальных точек и контейнера, отвечающее данному возмущению $v(t)$. Предположим, удалось дать оценку для $\eta(t;\ v)$, т. е. удалось указать такое η_0, что $|\eta(t;\ v)|\leqslant\eta_0$ для любых $t\geqslant 0$ и $v(\cdot)\in D$. Пусть η_0 таково, что справедливо неравенство $u_0>\eta_0$. Покажем, как с учетом этого неравенства можно уточнить оценку для S^0.

Рассмотрим уравнение (2.2). Для кинетической энергии контейнера $E_1(t;\ v)=m_0\dot{x}^2/2$ справедливы следующие соотношения

$$dE_1(t;v)/dt=[-u(\dot{x})+R(\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}})]\dot{x}+m_0v(t)\dot{x}$$

$$m_0\int_0^t v(t)\dot{x}dt-\int_0^t[u(\dot{x})-R(\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}})]\dot{x}dt=E_1(t;v)\geqslant 0$$

С учетом же неравенства $u_0>\eta_0$ имеем

$$\int_0^t[u(\dot{x})-R(\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}})]\dot{x}dt\geqslant(u_0-\eta_0)\int_0^t|\dot{x}(t;v)dt$$

и, следовательно

$$m_0\int_0^t|v(t)||\dot{x}|dt\geqslant(u_0-\eta_0)\int_0^t|\dot{x}(t;v)|dt$$

Повторяя далее рассуждения, приведенные выше, по отношению к неравенству (3.7), получим искомую оценку

$$S^0 \leqslant \tfrac{1}{2} m_0 J_0^2 / (u_0 - \eta_0) \tag{3.13}$$

Подчеркнем, что данная оценка справедлива лишь в том случае, если для любого возмущения $v(\cdot) \in D$ выполняется неравенство

$$|\eta(t;v)| \leqslant \eta_0 \tag{3.14}$$

а само значение η_0 удовлетворяет неравенству

$$\eta_0 < u_0 \tag{3.15}$$

Попытаемся далее выяснить чему равно η_0. Покажем сначала, что с учетом неравенства (3.15) для любого возмущения $v(\cdot) \in D$ справедливо

$$\int_0^\infty |u[\dot{x}(t,v)] - R(\mathbf{y}(t;v), \dot{\mathbf{y}}(t;v))| \, dt \leqslant m_0 J_0 \tag{3.16}$$

Для сокращения записи в дальнейших рассуждениях обозначим

$$p(t;v) = \{u[\dot{x}(t;v)] - R[\mathbf{y}(t;v), \dot{\mathbf{y}}(t;v)]\} / m_0$$

Рассмотрим произвольное возмущение $v(t)$ из класса D и отрезок $[t_i, t_{i+1}]$, внутри которого скорость контейнера $\dot{x}(t; v) \neq 0$, а на его концах равна нулю, т. е. $\dot{x}(t_i, v) = \dot{x}(t_{i+1}; v) = 0$. Проинтегрируем на этом отрезке уравнение (2.2) и получим

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} p(t;v)\, dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} v(t)\, dt$$

С учетом (3.15) будем иметь следующие соотношения

$$\left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} p(\tau;v)\, d\tau \right| = \int_{t_i}^{t_{i+1}} |p(t;v)|\, dt = \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} v(t)\, dt \right| \leqslant \int_{t_i}^{t_{i+1}} |v(t)|\, dt \tag{3.17}$$

Выделим теперь отрезки $[t_j, t_{j+1}]$, на которых скорость контейнера $\dot{x}(t; v) \equiv 0$. Это есть возможные участки "продолжительных остановок" контейнера в связи с наличием в системе сухого трения. Для таких участков справедливо равенство $p(t; v) = v(t)$ и, значит

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} |p(t;v)|\, dt = \int_{t_j}^{t_{j+1}} |v(t)|\, dt \tag{3.18}$$

Последовательно суммируя неравенства (3.17) и равенства (3.18), получим неравенство

$$\int_0^\infty |p(t;v)|\, dt \leqslant \int_0^\infty |v(t)|\, dt \leqslant J_0 \tag{3.19}$$

В силу произвольного выбора возмущения $v(t)$ неравенство (3.19) справедливо для любого возмущения $v(\cdot) \in D$, что и дает (3.16).

Далее для нахождения η_0 рассмотрим систему (2.3), которую представим в виде

$$m_i \ddot{y}_i + f_i(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) + \varphi_i(\mathbf{y}) = m_i p(t;v) \tag{3.20}$$

Введем к рассмотрению функцию

$$E_2(t;v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \dot{y}_i^2}{2} + \Pi_1(\mathbf{y})$$

определяющую полную механическую энергию системы материальных точек в их движении относительно контейнера. Применяя указанный выше подход к оценке механической энергии для системы (3.20) с учетом (3.19), получим

$$E_2(t;v) \leqslant m_+ J_0^2 / 2$$

Таким образом, для нахождения значения η_0 необходимо решить следующую экстремальную задачу: максимизировать по $\mathbf{y}$, $\dot{\mathbf{y}}$ функцию $|R(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}})|$ при ограничении

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \dot{y}_i^2}{2} + \Pi_1(\mathbf{y}) \leqslant \frac{m_+ J_0^2}{2} \tag{3.21}$$

Обозначим Γ_0 множество таких $\{\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}\}$, для которых справедливо неравенство (3.21). Задача принимает вид: найти

$$\eta_0 = \max_{\{\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}\} \in \Gamma_0} |R(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}})|$$

Заметим, что для нахождения η_0 могут быть использованы хорошо разработанные численные методы оптимизации функций многих переменных [4].

Запишем теперь общую оценку на величину максимального смещения с учетом оценок (3.12) и (3.13). Введем следующие обозначения $m_+/m_0 = \varepsilon$, $\eta_0/u_0 = \gamma$. Первая дробь дает отношение суммарной массы материальных точек m_+ к массе контейнера m_0, а вторая – отношение максимальной реакции связи системы материальных точек к максимальной силе сухого трения. С учетом введенных параметров ε и γ оценки (3.12) и (3.13) можно переписать в виде

$$S^0 \leqslant s_0(1 + \varepsilon) \tag{3.22}$$

$$S^0 \leqslant s_0(1 - \gamma)^{-1}, \quad \gamma < 1 \tag{3.23}$$

где $s_0 = m_0 J_0^2/(2u_0)$. Теперь попробуем объединить эти оценки в единую оценку. Выясним, при каких условиях оценка (3.22) лучше оценки (3.23). Сравним между собой $(1 + \varepsilon)$ и $(1 - \gamma)^{-1}$. Элементарный анализ показывает, что

$$1+\varepsilon \leqslant \frac{1}{1-\gamma} \quad \text{при} \quad \gamma \geqslant \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$$

$$1+\varepsilon > \frac{1}{1-\gamma} \quad \text{при} \quad \gamma < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$$

Поскольку $\varepsilon/(1 + \varepsilon) < 1$, то единая оценка σ_0 имеет вид

$$S^0 \leqslant \sigma_0 = s_0 \begin{cases} (1-\gamma)^{-1}, & \gamma < \varepsilon(1+\varepsilon)^{-1} \\ 1+\varepsilon, & \gamma \geqslant \varepsilon(1+\varepsilon)^{-1} \end{cases} \tag{3.24}$$

Заметим, что s_0 определяет максимальное смещение контейнера в отсутствии связанной с ним системы материальных точек. Отметим также, что единая оценка (3.24) хорошо учитывает указанные выше различные предельные случаи. В самом деле, если масса системы материальных точек мала по сравнению с массой контейнера ($\varepsilon \ll 1$), то оценка $\sigma_0 \approx s_0$. В этом случае влиянием системы на максимальное смещение контейнера можно пренебречь. Если связь системы материальных точек с контейнером достаточно слабая ($\gamma \ll 1$), то $\sigma_0 \approx s_0$. В этом случае влиянием системы материальных точек на максимальное смещение контейнера также можно пренебречь. Наконец, если связь достаточно сильная ($\gamma \geqslant \varepsilon/(\varepsilon + 1)$), то $\sigma_0 \approx s_0(1 + \varepsilon)$. В этом случае максимальное смещение контейнера зависит как от его массы, так и от суммарной массы системы материальных точек.

4. Линейная система материальных точек. Рассмотрим теперь частный случай, когда система материальных точек является линейной. Линейность системы позволяет получить аналитические выражения для приведенных выше оценок.

Пусть потенциальная энергия системы материальных точек имеет вид $\Pi_1(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T C\mathbf{y}/2$, где C – положительно определенная симметрическая $(n \times n)$-матрица, определяющая упругость связей; $\mathbf{y}$ – вектор-столбец с компонентами $\{y_1, ..., y_n\}$, $\mathbf{y}^T$ – вектор-строка; верхний индекс T здесь и ниже определяет операцию транспонирования.

Пусть диссипативные связи в системе выражаются функцией Релея $F(\dot{\mathbf{y}}) = \dot{\mathbf{y}}^T B\dot{\mathbf{y}}/2$, где B – неотрицательно определенная симметрическая $(n \times n)$-матрица. При сделанных предположениях уравнения всей системы, аналогичные (2.2) и (2.3) могут быть записаны в матричном виде

$$m_0\ddot{x} = -u(\dot{x}) + R(\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}}) + m_0 v(t)$$

$$M\ddot{\mathbf{y}} + B\dot{\mathbf{y}} + C\mathbf{y} = M\mathbf{e}[u(\dot{x}) - R(\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}})/m_0$$

здесь M – диагональная $(n \times n)$-матрица с диагональными элементами m_i ($i = 1, ..., n$), а $\mathbf{e}$ – n-мерный вектор с компонентами $\{1, 1...,1\}$. Сила связи системы таких точек с контейнером в данном случае имеет вид

$$R(\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}}) = \mathbf{r}^T\mathbf{y} + \mathbf{q}^T\dot{\mathbf{y}} = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial\Pi_1(\mathbf{y})}{\partial y_i} + \frac{\partial F(\dot{\mathbf{y}})}{\partial \dot{y}_i}\right]$$

здесь $\mathbf{r}^T$, $\mathbf{q}^T$ – вектор-строки, компоненты которых таковы: $\{r_j\} = \Sigma_i c_{ij}$, $\{q_j\} = \Sigma_i b_{ij}$; c_{ij}, b_{ij} – элементы матриц C и B соответственно.

Для нахождения оценки η_0 рассмотрим систему уравнений

$$M\ddot{\mathbf{y}} + B\dot{\mathbf{y}} + C\mathbf{y} = M\mathbf{e}w(t) \tag{4.1}$$

причем $w(\cdot) \in D$, т. е.

$$\int_0^\infty |w(t)|\,dt \leqslant J_0 \tag{4.2}$$

Имеем следующую оптимизационную задачу: найти

$$\eta_0 = \max_{\{\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}}\}}\left|\mathbf{r}^T\mathbf{y} + \mathbf{q}^T\dot{\mathbf{y}}\right|$$

при ограничении

$$\dot{\mathbf{y}}^T M\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{y}^T C\mathbf{y} \leqslant m_+ J_0^2$$

Используя известное правило множителей Лагранжа [4] для решения экстремальных задач с органичением и опуская простые преобразования, находим

$$\eta_0 = \eta_0' = J_0[m_+\{\mathbf{r}^T C^{-1}\mathbf{r} + \mathbf{q}^T M^{-1}\mathbf{q}\}]^{1/2} \tag{4.3}$$

Поскольку уравнение (4.1) линейное, то существует и другой способ получения оценки η_0. Решение уравнения (4.1) с нулевыми начальными условиями можно представить в виде [5]:

$$\mathbf{y}(t; w) = \int_0^t \Theta(t-\tau)M\mathbf{e}w(\tau)\,d\tau$$

где фундаментальная матрица решений $\Theta(t)$ находится из матричного дифференциального уравнения

$$M\ddot{\Theta} + B\dot{\Theta} + C\Theta = 0, \quad \Theta(0) = 0, \quad \dot{\Theta}(0) = E$$

(E – единичная $n \times n$-матрица). Следуя далее работе [6], находим, что

$$\eta_0 = \eta_0'' = J_0 \sup_{t\in[0,\infty)} |\Psi(t)|, \quad \Psi(t) = [\mathbf{r}^T\Theta(t) + \mathbf{q}^T\dot{\Theta}(t)]M\mathbf{e} \tag{4.4}$$

Заметим, что для любых возмущений $w(t)$, удовлетворяющих (4.2), оценка (4.4) для $|\mathbf{r}^T\mathbf{y} + \mathbf{q}^T\dot{\mathbf{y}}|$, как показано в [6], является точной в том смысле, что

$$\sup_{w\in D} |\mathbf{r}^T\mathbf{y}(t;w) + \mathbf{q}^T\dot{\mathbf{y}}(t;w)| = \eta_0''$$

тогда как равенство (4.3) дает лишь оценку сверху, поэтому $\eta_0'' \leqslant \eta_0'$. Из соотношений (3.24) видно, что чем точнее удается оценить силу связи системы материальных точек и контейнера, тем точнее будет и оценка для максимального смещения контейнера. С этой точки зрения целесообразно использовать оценку η_0'', а не η_0'.

С другой стороны, величину η_0' гораздо проще вычислить, чем η_0''. В самом деле, для нахождения η_0' требуется лишь найти C^{-1}, тогда как для нахождения η_0'' требуется найти фундаментальную матрицу $\Theta(t)$, а затем вычислить $\sup_t|\Psi(t)|$. Исходя из соображений сокращения вычислительных затрат, полезнее использовать оценку η_0'.

5. Примеры. Приведем ряд примеров нахождения оценок η_0' и σ_0. Для упрощения вычислений будем считать, что система материальных точек состоит всего из одной точки. Эта точка прикрепляется к контейнеру посредством линейной упругодиссипативной связи.

Пусть силовая связь точки и контейнера $R(y, \dot{y}) = b\dot{y} + cy$, а масса материальной точки равна m, тогда в соответствии с предыдущим разделом имеем

$$\eta_0' = J_0[mc + b^2]^{1/2}, \quad \eta_0'' = J_0 m \sup_{t\in[0,\infty)} |\Psi(t)|$$

$$\Psi(t) = b\dot{\theta}(t) + c\theta(t)$$

$$\theta(t) = e^{-\alpha t}\left[\frac{e^{\beta t} - e^{-\beta t}}{2\beta}\right], \quad \alpha = \frac{b}{2m}, \quad \beta = \frac{\sqrt{b^2 - 4mc}}{2m}$$

Здесь β – комплексная величина, если $b^2 - 4mc < 0$. Выпишем выражение для функции $\Psi(t)$ в случае, когда $b^2 - 4mc < 0$:

$$\Psi(t) = e^{-\alpha t}\left\{\frac{c - \alpha b}{|\beta|}\sin|\beta|t + b\cos|\beta|t\right\}$$

Из последнего соотношения видно, что аналитического выражения для $\sup_t|\Psi(t)|$, вообще говоря, не существует, и для его нахождения необходимо использовать численные методы оптимизации.

Интересно отметить случай, когда оценки η_0' и η_0'' совпадают. Положим $b = 0$, т. е. материальная точка связана с контейнером только упругой связью. Имеем $\eta_0' = J_0(mc)^{1/2}$. С другой стороны,

$$\theta(t) = \sqrt{m/c}\,\sin\left(\sqrt{c/m}\,t\right), \quad \sup_t|\Psi(t)| = (mc)^{1/2}$$

а, значит, $\eta_0'' = J_0(mc)^{1/2}$.

Запишем оценку (3.24) максимального смещения контейнера для последнего случая

$$S^0 \leqslant \sigma_0 = \frac{m_0 J_0^2}{2u_0}\begin{cases}[1 - J_0 m\omega_0 / u_0]^{-1}, & J_0(m + m_0)\omega_0 / u_0 < 1\\ 1 + m/(m + m_0), & J_0(m + m_0)\omega_0 / u_0 \geqslant 1\end{cases}$$

здесь $\omega_0 = \sqrt{c/m}$. Из этой формулы видно, в каких случаях можно пренебречь влиянием материальной точки на движение контейнера. Наряду с физически очевидными случаями: масса материальной точки много меньше массы контейнера ($m/m_0 \ll 1$) и жесткость упругой связи мала ($c \to 0$); можно выделить и менее очевидный: величина ударного импульса J_0 достаточно мала, а сила сухого трения u_0 достаточно велика так, что справедливо $J_0(m + m_0)\omega_0/u_0 \ll 1$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант N 95-01-00138).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Болотник Н.Н.* Оптимизация амортизационных систем. М.: Наука, 1983. 257 с.
2. *Balandin D.V.* On maximum energy of mechanical systems under shock distrubances // Shock and Vibration, 1993. V. 1. No. 2. P. 135–144.
3. *Парс Л.* Аналитическая динамика. М.: Наука, 1971. 635 с.
4. *Гилл Ф., Мюррей У., Райт М.* Практическая оптимизация. М.: Мир, 1985. 509 с.
5. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974. 331 с.
6. *Баландин Д.В.* О накоплении возмущений в линейных и нелинейных системах при ударных воздействиях // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 1. С. 20–25.

Н. Новгород

Поступила в редакцию
1.VI.1996