МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1997

УДК 531.8

 В.И. МАТЮХИН

ЭФФЕКТ ДВИЖЕНИЯ УПРУГОГО ЗВЕНА МАНИПУЛЯТОРА КАК АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Решается задача стабилизации движений упругого манипулятора [1–6]. Рассматривается класс вязкоупругих деформаций звеньев манипулятора, обуславливающих диссипативные свойства системы. Изучается влияние этих свойств на устойчивость ее движений. В работе найдены такие достаточно общие и естественные свойства процесса вязкоупругих деформаций, при которых возникает следующий эффект. Именно, деформации системы исчезают через конечный интервал времени, т.е. каждое упругое звено манипулятора начинает двигаться по существу как абсолютно твердое тело. Эффект получен для манипулятора общего вида и практически для любого его возможного движения [3].

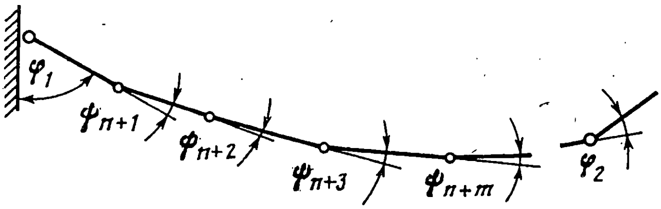
Введенная в работе динамическая модель в общем случае описывает движение деформируемых механических систем. В частных случаях (при наличии надлежащих свойств напряжений) в рамках этой модели движение системы будет происходить как движение системы твердых тел. Это позволяет с единых позиций описывать движение как деформируемых систем, так и систем твердых тел.

1. Введение. В решении многих задач динамики звено манипулятора рассматривается как абсолютно твердое тело, т.е. предполагается, что в процессе движения манипулятора его звенья не деформируются [1–3][1]. Это естественно, поскольку соответствующая динамическая модель оказывается относительно простой. В частности, для описания n-звенного манипулятора в этом случае можно использовать систему обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $2n$ (например, в форме уравнений Лагранжа второго рода, в форме уравнений Гамильтона, Эйлера и т.д. [1–6]). На этом пути в [1–3] получено эффективное решение задачи синтеза управления роботом манипулятором. Именно, построен универсальный закон управления, который обеспечивает устойчивость практически всех возможных (физически реализуемых) движений манипулятора.

В связи с этим естественный интерес представляет исследование динамики механических систем, элементы которых могут деформироваться в процессе движения. Речь может идти о нахождении таких условий, при которых деформации звеньев манипулятора будут достаточно малы или будут убывать в асимптотике. Подобная задача исследовалась в [5–6]. Именно, в [5] для описания динамики деформируемого звена манипулятора введена следующая конечномерная динамическая модель: m-звенник, содержащий абсолютно твердые тела, соединенные шарнирами произвольного вида. Введены обобщенные силы в этих шарнирах, соответствующие напряжениям в сечениях деформируемого звена. Показано, что за счет специальным образом введенных в систему элементов демпфирования деформации звеньев манипулятора будут достаточно малы. Этого же эффекта можно добиться при учете

---

[1] См. также: *Матюхин В.И.* Сильная устойчивость движений в лагранжевых системах // Тез. докл. Междунар. семинара "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления". М.: Ин-т проблем управления РАН, 1992. С. 22.



Фиг. 1

свойства вязкости (диссипативности) процесса деформаций в рассматриваемой системе[2]. Таким образом свойство вязкости процесса деформаций может рассматриваться как одно из необходимых свойств, при которых движения манипулятора будут устойчивыми.

В публикуемой работе установлен дополнительный эффект. Именно, найдены такие условия, при которых деформации манипулятора не только малы или убывают, а полностью исчезают уже через конечный интервал времени. Это будет выполнено, если процесс деформации звеньев манипулятора обладает дополнительными (достаточно общими и естественными) свойствами, которые будут введены ниже. Таким образом указанная динамическая модель в общем случае описывает движение деформируемых механических систем. В частных случаях (при наличии надлежащих свойств напряжений) в рамках этой модели движение системы будет происходить как движение системы твердых тел. Конечная цель настоящей работы состоит в том, чтобы разработать такое динамическое описание, которое позволяет с единых позиций описывать движение как деформируемых систем, так и систем твердых тел.

2. Постановка задачи. Для описания движений конечномерной динамической модели манипулятора п. 1 будем использовать систему уравнений Лагранжа второго рода [1–6]:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i(q,\dot q,t)+M_i \qquad (i=\overline{1,N}) \tag{2.1}$$

Здесь $N = nm$ – число степеней свободы системы; q – вектор-функция обобщенных координат $q = (q_1, ..., q_N)$, описывающих ее состояние, T – кинетическая энергия системы

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} a_{ik}(q)\dot q_i \dot q_k \tag{2.2}$$

$(Q_i + M_i)$ – обобщенные силы, в частности, силы веса звеньев манипулятора, другие силы сопротивления; M_i – управляющие силы (управления), силы упругих напряжений в деформируемых звеньях манипулятора.

Вектор-функцию обобщенных координат $q = (q_1, ..., q_N)$ будем представлять также в виде

$$q=(\varphi,\psi)=(\varphi_1,\ldots,\varphi_n,\ \psi_{n+1},\ldots,\psi_N) \tag{2.3}$$

где φ_i – состояния межзвенных шарниров манипулятора, ψ_i – состояния формальных шарниров (введенных для описания сосредоточенных упругих деформаций звеньев манипулятора). Эти шарниры – общего вида и могут описывать скручивание, растяжение, другие виды деформации звеньев манипулятора. В частности, переменные $\psi_{n+1}, ..., \psi_{n+m}$ могут описывать углы плоского изгиба первого звена манипулятора

---

[2] См. *Матюхин В.И.* Движение упругого звена манипулятора как абсолютно твердого тела // Тез докл. VI-го Междунар. семинара "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления". М.: Ин-т проблем управления, 1996. С. 123.

(обусловленного упругими деформациями звена), а переменная φ_1 может задавать угол его поворота (фиг. 1). Будем полагать, что состояние

$$\psi_i = 0 \quad (i = \overline{n+1, N}) \tag{2.4}$$

соответствует недеформированному состоянию звеньев манипулятора.

С учетом выбранных обобщенных координат, компоненты обобщенных сил $M_i (i = \overline{1,n})$ в (2.1) приобретают смысл управляющих сил (управлений), которые в каждом межзвенном шарнире создаются исполнительными приводами манипулятора. Допустимыми управлениями в системе (2.1) будем считать суммируемые на любом конечном интервале времени функции $M_i(t)$, удовлетворяющие неравенствам

$$|M_i(t)| \leqslant H_i, \quad H_i = \text{const} > 0 \ \ (i = \overline{1,n}) \tag{2.5}$$

для почти всех $t > 0$. Неравенства (2.5) введены для описания физических ограничений на величины возможных интенсивностей управляющих сил, развиваемых приводами системы.

Через $M_i (i = \overline{n+1, N})$ в (2.1) обозначены обобщенные силы, которые описывают напряжения, возникающие при деформациях звеньев манипулятора. Будем предполагать, что для этих обобщенных сил должны выполняться соотношения

$$|M_i(t)| \leqslant H_i, \quad H_i = \text{const} > 0 \ \ (i = \overline{n+1, N}) \tag{2.6}$$

которые аналогичны (2.5). Неравенства (2.6) введены для описания ограничений на величину напряжений в системе (2.1), соответствующих области допустимых значений деформаций и скоростей деформаций (например, области упругих деформаций звеньев манипулятора).

В общем случае цель управления механической системой можно задавать в форме [1–4]:

$$q_i = q_i^*(t) \ \ (i = \overline{1, N}) \tag{2.7}$$

где $q_i^*(t)$ – заданная программа изменения координаты q_i механической системы (2.1). Цель управления должна отвечать динамике объекта управления. Иначе говоря, функция $q^*(t) = (q_1^*(t), \ldots, q_N^*(t))$ из (2.7) должна удовлетворять системе уравнений (2.1) движения манипулятора, т.е. должны выполняться тождества [1–4]:

$$\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right]\Bigg|_{q=q^*(t)} \equiv Q_i(q^*(t), \dot{q}^*(t), t) + M_i^*(t) \ \ (i = \overline{1, N}) \tag{2.8}$$

Функции $M_i^*(t)$ $(i = \overline{1,n})$ в (2.8) играют роль программных управлений, а $M_i^*(t)$ $(i = \overline{n+1, N})$ являются напряжениями в звеньях манипулятора, соответствующими невозмущенному движению $q = q^*(t)$ системы. Функции $M_i^*(t)$ в (2.8) должны быть допустимыми, т.е. должны удовлетворять неравенствам (2.5), (2.6). Множество Ф функций $q = q^*(t)$, удовлетворяющих этим требованиям, будем называть множеством всех возможных или физически реализуемых движений манипулятора (как объекта управления (2.1) [1–4]).

Допустимой программой (2.7) изменения координат системы (2.1) в настоящей работе будет рассматриваться любая функция $q^* = q^*(t)$ из множества Ф, которая дополнительно удовлетворяет следующим формальным ограничениям [1–4]:

$$|M_i^*(t)| \leqslant H_i - \eta, \ \ |q_i^*(t)| \leqslant c, \ \ |\dot{q}_i^*(t)| \leqslant c, \ \ t \geqslant 0 \ \ (i = \overline{1, N}) \tag{2.9}$$

Множество таких функций обозначим через Φ_η^c. Введение параметров η и c позволяет существенно упростить доказательства приводимых ниже утверждений[3].

В качестве цели управления системой (2.1) будем рассматривать программы $q^*(t) \in \Phi_\eta^c$ вида

$$q^*(t) = (\varphi^*(t), 0) \in \Phi_\eta^c \tag{2.10}$$

Т.е. в качестве цели управления (2.7) будут рассматриваться любые такие (физически реализуемые) движения системы (2.1), которые соответствуют недеформированному состоянию звеньев манипулятора.

Задача синтеза универсальных законов управления системой (2.1) понимается как задача построения такой единой обратной (функциональной) связи вида

$$M_i = M_i^1(q, \dot q, q^*(t), \dot q^*(t), t) \quad (i = \overline{1,n}) \tag{2.11}$$

Связь (2.11) должна быть такова, что замена $q^* \to \overline{q}^*$ должна приводить к стабилизации нового движения $\overline{q}^* = \overline{q}^*(t)$. Иначе говоря, закон управления (2.11) должен быть универсальным, т.е. должен обеспечивать устойчивость любого заданного движения $q^*(t) = (\varphi^*(t), 0) \in \Phi_\eta^c$ системы (2.1) (по существу всех движений, которые практически реализуемы в системе (2.1) [1–4]).

Задача состоит в том, чтобы построить такой универсальный закон управления (2.11), а также найти такую зависимость

$$M_i = M_i^1(q, \dot q, q^*(t), \dot q^*(t), t) \quad (i = \overline{n+1, N}) \tag{2.12}$$

обобщенных сил M_i, обусловленных деформациями звеньев манипулятора, при которых дополнительно обеспечивается следующий эффект. Именно, по переменным $\psi_i (i = \overline{n+1, N})$ через некоторый конечный интервал времени $t = t_1$ должно быть обеспечено дополнительное условие вида

$$\psi_i(t) = 0, \quad t \geqslant t_1 \quad (i = \overline{n+1, N}) \tag{2.13}$$

Выполнение условия (2.13) означает, что деформации звеньев исчезают и упругий манипулятор через конечный интервал времени $t = t_1$ начинает двигаться по существу как манипулятор с абсолютно жесткими звеньями.

3. Схема решения задачи. Для решения поставленной задачи в качестве обратной связи (2.11) будет использоваться закон управления

$$M_i = M_i^1(\varphi, \dot\varphi, \varphi^*(t), \dot\varphi^*(t)) = -H_i \operatorname{sign}\left[\dot\varphi_i - \dot\varphi_i^* - f_i(\varphi_i - \varphi_i^*)\right] \quad (i = \overline{1,n}) \tag{3.1}$$

Закон (3.1) построен как решение задачи управления манипулятором с абсолютно твердыми звеньями [1–3], т.е. системой вида

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde T}{\partial \dot\varphi_i} - \frac{\partial \tilde T}{\partial \varphi_i} = \tilde Q_i(\varphi, \dot\varphi, t) + M_i \quad (i = \overline{1,n}) \tag{3.2}$$

Система (3.2) описывает движения рассматриваемого манипулятора, когда деформации его звеньев не учитываются, т.е. когда введены механические связи вида $\psi_i = 0$ $(i = \overline{n+1, N})$. Обозначения в (3.2) подобны обозначениям в (2.1).

---

[3] Параметр $\eta > 0$ множества Φ_η^c может быть выбран достаточно малым, а $c > 0$ большим $c < \infty$, $\eta < H_i$, $i = \overline{1,N}$ [1–3]. В этом случае множество Φ_η^c является достаточно широким и практически совпадает с множеством Φ всех возможных движений объекта управления (2.1). Т.е. множество Φ_η^c содержит практически все возможные (физически реализуемые) движения этого объекта [1–4].

При учете (3.1) система (3.2) принимает вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\dot{\varphi}_i}-\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\varphi_i}=\tilde{Q}_i(\varphi,\dot{\varphi},t)-H_i\,\mathrm{sign}\left[\dot{\varphi}_i-\dot{\varphi}_i^*-f_i(\varphi_i-\varphi_i^*)\right]\quad (i=\overline{1,n}) \tag{3.3}$$

Функции $f_i(\xi)$ в (3.3) построены так, что движение $\xi_i=0$, $\xi_i=\varphi_i-\varphi_i^*(t)$ системы

$$\dot{\xi}_i=f_i(\xi)\quad (i=\overline{1,n}) \tag{3.4}$$

является экспоненциально устойчивым. Экспоненциально устойчивое движение $\xi_i=0$ имеет, например, система (3.4) вида $\dot{\xi}_i=-\lambda_i\xi_i$, $\lambda_i=\mathrm{const}>0$ $(i=\overline{1,n})$. Идея построения закона управления вида (3.1) состояла в том, чтобы вывести манипулятор на движение в режиме (3.4) [1–5]. В этом случае устойчивость заданного движения системы (3.3) $\varphi_i=\varphi_i^*(t)$ будет следовать из предполагаемой устойчивости движения $\xi_i=0$ $(\xi_i=\varphi_i-\varphi_i^*(t))$ системы (3.4).

Для решения поставленной в п. 2 задачи в качестве зависимости (2.12) рассмотрим сначала зависимость

$$M_i=M_i^0(\psi_i,\dot{\psi}_i)=-k_i\dot{\psi}_i-k_i\lambda_i\psi_i\quad (i=\overline{n+1,N}) \tag{3.5}$$

$$k_i=\mathrm{const}>0,\quad \lambda_i=\mathrm{const}>0\quad (i=\overline{n+1,N})$$

Через $\psi_i,\dot{\psi}_i$ в (3.5) обозначены обобщенные координаты системы (2.1) и их производные, которые описывают деформации звеньев манипулятора. Слагаемые $-k_i\lambda_i\psi_i$ в (3.5) могут иметь физический смысл изгибающего момента упругих сил (если обобщенные координаты имеют смысл угла изгиба звена манипулятора). Слагаемые $-k_i\dot{\psi}_i$ в (3.5) позволяют учесть свойство вязкости процесса деформаций, и описывают соответствующие силы внутреннего трения. Числа k_i в (3.5) характеризуют уровень демпфирования (уровень внутреннего трения, диссипации) в системе (2.1) [7–8]. Числа λ_i в (3.5) характеризуют соотношение уровня демпфирования в системе со степенью ее жесткости.

При использовании зависимостей (3.5) и закона управления (3.1) система (2.1) принимает вид следующей замкнутой системы

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i(q,\dot{q},t)-H_i\,\mathrm{sign}\left[\dot{\varphi}_i-\dot{\varphi}_i^*-f_i(\varphi_i-\varphi_i^*)\right]\quad (i=\overline{1,n}) \tag{3.6}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i(q,\dot{q},t)-k_i(\dot{\psi}_i+\lambda_i\psi_i)\quad (i=\overline{n+1,N})$$

Будем далее полагать, что для рассматриваемой механической системы (2.1) выполнены следующие формальные предположения об ограниченности функций $Q_i(q,\dot{q},t)$, $a_{ik}(\varphi)$ и их производных

$$|Q_i(q,\dot{q},t)|\leqslant c,\ \ldots \tag{3.7}$$

где c может быть достаточно большая константа (введена в (2.9)). Предположения (3.7) являются естественными в динамике механических систем [1–8]. Справедлива

Теорема 1. Пусть для механической системы (3.6) справедливы неравенства (3.7), а также неравенства

$$k_i\geqslant K,\quad \lambda\leqslant\lambda_i\leqslant\Lambda\quad (i=\overline{n+1,N}) \tag{3.8}$$

где K, λ, Λ некоторые неотрицательные константы. Тогда любое заданное движение $q = q^* = (\varphi^*, 0) \in \Phi_\eta^c$ системы (3.6) будет экспоненциально устойчивым.

В доказательстве теоремы 1 устанавливается, что движение системы (3.6) будет происходить в скользящем режиме вида $\dot\varphi_i - \dot\varphi_i^* - f_i(\varphi_i - \varphi_i^*) = 0$, т.е. в силу системы (3.4). Из предполагаемой устойчивости ее движения $\xi_i = 0$ $(\xi_i = \varphi_i - \varphi_i^*)$ устанавливается аналогичное свойство для движения $q = q^* = (\varphi^*, 0)$ системы (3.6) по переменным $q_i = \varphi_i (i = \overline{1, n})$.

Движение $q = q^* = (\varphi^*, 0)$ системы (3.6) по переменным $q_i = \psi_i (i = \overline{n+1, N})$ можно описать подобным образом. Именно, можно полагать, что внутренние напряжения (3.5), возникающие в системе (3.6), обеспечивают движение системы (3.6) в режиме вида

$$\dot\psi_i + \lambda_i \psi_i = 0 \quad (i = \overline{n+1, N}) \tag{3.9}$$

Движение $\psi_i = 0$ $(i = \overline{n+1, N})$ системы (3.9) является экспоненциально устойчивым. Из этого факта устанавливается экспоненциальная устойчивость движения $q = q^* = (\varphi^*, 0)$ системы (3.6) по переменным $q_i = \psi_i (i = \overline{n+1, N})$. Доказательство теоремы 1 следует схемам [1–4] и здесь не приводится. Из теоремы 1 не следует выполнение искомых соотношений (2.13). Таким образом в рамках предположения (3.5) о линейной структуре внутренних сил механической системы решение поставленной задачи не достигается.

В связи с этим заметим, что требуемые соотношения (2.13) не могут быть выполнены в линейной системе (3.9) [9–10]. Поэтому идея решения задачи состоит в том, чтобы прежде всего построить такой режим (3.9), при движении в котором выполнялись требуемые соотношения (2.13). Затем вместо (3.5) необходимо найти такие свойства внутренних напряжений в системе, при которых будет обеспечиваться движение системы (2.1) в этом режиме.

4. Движение упругого звена манипулятора как абсолютно твердого тела. Для обеспечения условий (2.13) вместо режима (3.9) рассмотрим его аналог вида

$$\dot\psi_i = -\bar\mu_i \sqrt{|\psi_i|}\ \mathrm{sign}(\psi_i), \quad \bar\mu_i = \mathrm{const} > 0 \quad (i = \overline{n+1, N}) \tag{4.1}$$

Можно показать [3], что в системе (4.1) через некоторый конечный интервал времени $t = t_1$ обеспечиваются равенства (2.13). Сформулированное свойство системы (4.1) есть свойство сильной асимптотической устойчивости ее движения $\psi_i = 0$ [3].

Заметим далее, что вывести систему (2.1) на режим движения (4.1) затруднительно, поскольку правая часть (4.1) при $\psi_i = 0$ не удовлетворяет условию Липшица. Поэтому, следуя [3], рассмотрим следующий аналог режима (4.1):

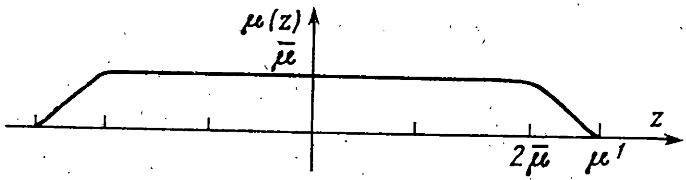
$$\dot\psi_i = f_i(\psi_i, \dot\psi_i) = -\mu_i(z_i)\sqrt{|\psi_i|}\,\mathrm{sign}(\psi_i), \quad z_i = \dot\psi_i / \sqrt{|\psi_i|} \quad (i = \overline{n+1, N}) \tag{4.2}$$

Через $\mu_i = \mu_i(z_i)$ в (4.2) обозначена функция вида

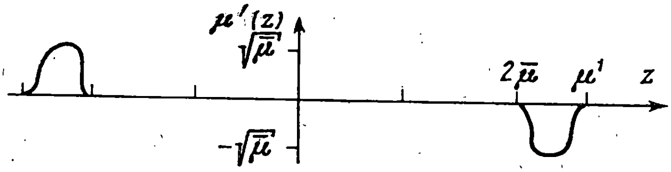
$$\mu_i = \mu_i(z_i) = \begin{cases} \bar\mu_i & \text{при} \quad |z_i| < \mu_i^1 \\ 0 & \text{при} \quad |z_i| \geq \mu_i^2 \quad (i = \overline{n+1, N}) \end{cases} \tag{4.3}$$

$$\bar\mu_i = \mathrm{const} > 0, \quad \mu_i^1 = 2\bar\mu_i, \quad \mu_i^2 = 2\bar\mu_i + \bar\mu_i^{1/2}$$

Функция $\mu_i = \mu_i(z_i)$ принимает нулевое значение $\mu_i = 0$ в тех областях фазового пространства системы, где режим (4.1) имеет особенности (и где величина z_i принимает достаточно большие значения фиг. 2, 3). Число $\bar\mu_i > 0$ в (4.3) задает ограничения для значений функции $\mu_i(z_i)$ и ее производной (фиг. 2, 3).



Фиг. 2



Фиг. 3

Для обеспечения движения манипулятора в режиме (4.2) рассмотрим следующую зависимость

$$M_i = M_i^1\left(\dot{\psi}_i - f_i\right) = -H_i \operatorname{sign}\left(\dot{\psi}_i - f_i\right) \quad (i = \overline{n+1, N}) \tag{4.4}$$

(аналог (3.5)). Если введенные в (4.2) – (4.4) функции $M_i^1 = M_i^1(\varkappa_i)$, $\varkappa_i = \dot{\psi}_i - f_i$, $f_i = f_i(\psi_i, \dot{\psi}_i)$ являются линейными

$$M_i^1(\varkappa_i) = -k_i \varkappa_i, \quad f_i = -\lambda_i \psi_i \quad (i = \overline{n+1, N}) \tag{4.5}$$

то соотношения (4.2), (4.4) переходят в зависимости (3.5), рассмотренные выше. Как уже говорилось выше, числа k_i в (3.5) характеризуют уровень демпфирования, а числа λ_i в (3.5) характеризуют соотношение уровня демпфирования в системе и степени жесткости упругого звена манипулятора. Назначение функций $M_i^1 = M_i^1(\varkappa_i)$ и $f_i = f_i(\dot{\psi}_i, \psi_i)$ $(i = \overline{n+1, N})$ в зависимости (4.2), (4.4) аналогичное.

При использовании закона (3.5) и зависимостей (4.2), (4.4) рассматриваемая механическая система (2.1) принимает вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i(q, \dot{q}, t) - H_i \operatorname{sign}\left[\dot{\varphi}_i - \dot{\varphi}_i^* - f_i(\varphi_i - \varphi_i^*)\right] \quad (i = \overline{1, n}) \tag{4.6}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i(q, \dot{q}, t) - H_i \operatorname{sign}\left[\dot{\psi}_i + \mu_i\left(\dot{\psi}_i / \sqrt{|\psi_i|}\right)\sqrt{|\psi_i|}\operatorname{sign}(\psi_i)\right] \quad (i = \overline{n+1, N})$$

Справедливо следующее основное утверждение работы.

Теорема 2. Любое движение (2.7) $q^*(t) = (\varphi^*(t), 0) \in \Phi_\eta^c$ системы (4.6) при выполнении (3.7) является экспоненциально устойчивым по обобщенным координатам и скоростям $q_i, \dot{q}_i$ $(i = \overline{1, N})$. По части переменных $\psi_i, \dot{\psi}_i$ $(i = \overline{n+1, N})$ движение $q^*(t) = (\varphi^*(t), 0) \in \Phi_\eta^c$ является сильно асимптотически устойчивым (в смысле выполнения (2.13)).

Доказательство теоремы 1 приведено в следующем п. 4.

Основная особенность системы (4.6) состоит в том, что в ней обеспечивается эффект (2.13), связанный с конечностью времени убывания деформаций системы. В связи с этим отметим основные отличия этой системы от системы (3.6), где этот эффект не имеет места. Именно, система (3.6) соответствует линейной зависимости тензора напряжений от тензора деформаций и тензора производных деформаций звеньев манипулятора [7–8]. С целью обеспечения эффекта (2.13) в системе (4.6) вместо линейной зависимости (3.5) введена общая нелинейная зависимость (4.2), (4.4).

Иначе говоря, в работе предполагается, что зависимость (4.2), (4.4), определяющая сосредоточенные вязкоупругие деформации звеньев манипулятора, качественно обладает следующими двумя основными свойствами: согласно (4.4) напряжения в системе могут нарастать достаточно быстро с ростом деформаций и скоростей деформаций; характер жесткости системы надлежащим образом согласован с характером демпфирования в соответствии с (4.2).

Именно, скорость роста напряжений в системе характеризуется соотношениями (4.4). Эти соотношения можно понимать как предел соотношений (3.5) при неограниченном возрастании коэффициентов депмфирования $k_i (k_i \to \infty (i=\overline{n+1,N}))$ и при учете ограничений (2.6). В общем случае это означает, что величина $\partial M_i / \partial \dot\psi_i$ $(i=\overline{n+1,N})$ принимает достаточно большие значения (в конечной области переменных состояния объекта управления). Можно сказать, эффект (2.13) будет иметь место в механических системах, в которых вязкость деформаций материала достаточно высока.

Второе существенное условие возникновения эффекта (2.13) связано с надлежащим согласованием характера жесткости системы с характером демпфирования. Формально оно определяется свойством сильной устойчивости движения $\psi = 0$ системы (4.2). Физически возникновение эффекта (2.13) связано со следующим. Именно, в области значительных деформаций

$$\mu_i^2 \sqrt{|\psi_i|} \geqslant |\dot\psi_i| \quad (i=\overline{n+1,N}) \tag{4.7}$$

соотношения (4.2), (4.4) можно записать в виде

$$M_i = M_i^1(\psi_i - f_i) = -H_i \operatorname{sign}(\psi_i) \quad (i=\overline{n+1,N}) \tag{4.8}$$

В области малых деформаций

$$\mu_i^1 \sqrt{|\psi_i|} \leqslant |\dot\psi_i| \quad (i=\overline{n+1,N}) \tag{4.9}$$

эти соотношения имеют форму

$$\mu_i = M_i^1(\dot\psi_i - f_i) = -H_i \operatorname{sign}(\dot\psi_i) \quad (i=\overline{n+1,N}) \tag{4.10}$$

Таким образом в области (4.7) значительных деформаций чувствительность напряжений M_i^1 к величине деформаций в системе должна быть достаточно высокой. Напряжения, возникающие в системе, направлены непосредственно на компенсацию деформаций. Если же деформации малы в соответствии с (4.9), то чувствительность напряжений M_i^1 к величине деформаций в системе является достаточно малой. В этом случае напряжения M_i^1 в соответствии с (4.10) по существу осуществляют демпфирование системы. Вне областей (4.7), (4.9), где возникает скользящий режим (4.2), в силу его свойств, будут выполнены соотношения (2.13) $\psi_i = 0$ $(i=\overline{n+1,N})$. В этом смысле характер демпфирования в системе и ее жесткость оказываются согласованными.

5. Обоснование эффекта движения упругого звена манипулятора как абсолютно твердого тела. Основные моменты доказательства теоремы 2 состоят в следующем. Для анализа системы (4.6) будем использовать функцию Ляпунова [1–5]:

$$G = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{N} a_{ik}(q) \chi_i \chi_k \tag{5.1}$$

$$\chi_i = \dot{\xi}_i - f_i \; (i = \overline{1, N}) \tag{5.2}$$

Функции χ_i в (5.2) характеризуют отклонения движения системы (4.6) от режима (3.4), (4.2). Функции $\xi_i = q_i - q_i^*$ характеризуют отклонения движения системы (4.6) от ее заданного движения $q^*(t) = (\varphi^*(t), 0) \in \Phi_\eta^c$.

Из равенства $G = 0$ при учете неравенств [1–5]:

$$\rho_1^2 |\chi|^2 \leqslant G \leqslant \rho_2^2 |\chi|^2, \quad |\chi|^2 = \sum_{i=1}^{N} \chi_i^2, \quad 0 < \rho_1 \leqslant \rho_2 < \infty \tag{5.3}$$

непосредственно вытекают равенства $\chi_i = 0$ $(i = \overline{n+1, N})$, т.е. соотношения (4.2), описывающие режим, при котором обеспечивается сильная устойчивость системы (4.6) по переменным $\psi_i, \dot{\psi}_i$ $(i = \overline{n+1, N})$.

Для обоснования равенства $G = 0$ строится производная функции Ляпунова G в силу системы (4.6) [1–3]:

$$\dot{G} = \tfrac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{N} \dot{a}_{ik} \chi_i \chi_k + \sum_{i=1}^{N} \chi_i \left[\sum_{k=1}^{N} a_{ik} (\ddot{q}_k - \ddot{q}_k^*) \right] - \sum_{i,k=1}^{N} \chi_i a_{ik} \dot{f}_k \tag{5.4}$$

где учитывается (5.2). Из (5.4) строится оценка для $\dot{G}$.

Основные затруднения здесь связаны с мажорированием величин $\dot{f}_k$ $(k = \overline{n+1, N})$ в правой части (5.4). В [3] установлено, что для этих функций справедлива оценка

$$\dot{f}_k \leqslant e \sqrt{\overline{\mu}_k}, \quad e = \text{const} > 0 \; (k = \overline{n+1, N}) \tag{5.5}$$

Неравенство (5.5) следует из (4.2) при учете свойств (4.3) функций $\mu_k(z_k)$ (фиг. 2, 3). На этом пути из (5.4), следуя [3], удается построить неравенство

$$\dot{G} \leqslant \sqrt{G} \left[A\sqrt{G} + B \sum_{j=1}^{N} |\xi_j| + C \sum_{k=n+1}^{N} \overline{\mu}_k \sqrt{|\xi_k|} - D\eta / \rho_2 \right] \tag{5.6}$$

где A, B, C, D неотрицательные константы, $\overline{\mu}_k$ $(k = \overline{n+1, N})$ являются достаточно малыми числами, число η из (2.9), ρ_2 из (5.3).

Для оценки влияния величин ξ_j в (5.6) вводятся функции Ляпунова $g_j = g_j(\xi_j)$. Функции $g_j = g_j(\psi_j)$ $(j = \overline{n+1, N})$ заданы соотношениями

$$g_j = |\psi_j| \quad (j = \overline{n+1, N}) \tag{5.7}$$

Функции $g_j = g_j(\varphi_j - \varphi_j^*)$ $(j = \overline{1, n})$ в явном виде не заданы. Они существуют из предполагаемой экспоненциальной устойчивости движения $\varphi_j = \varphi_j^*(t)$ $(j = \overline{1, n})$ системы (3.4) и удовлетворяют оценкам, характерным для квадратичных форм [10]. На основе этих оценок при учете (5.3) для производных функций $g_j = g_j(\xi_j)$ в силу системы (4.6) (при учете (5.2)) устанавливаются неравенства

$$\dot{g}_j \leqslant -\lambda_j \sqrt{g_j} + \overline{\lambda}_j \sqrt{G} \;\; (j = \overline{1, n}), \quad \dot{g}_j \leqslant -\overline{\mu}_j \sqrt{g_j} + \sqrt{G} / \rho_1 \;\; (j = \overline{n+1, N}) \tag{5.8}$$

где $\lambda_j, \overline{\lambda}_j = \text{const} > 0$ [3]. Из анализа системы неравенств (5.6), (5.8) устанавливается, что движение $(G(t) = 0,\; g_k(t) = 0)$ этой системы является асимптотически устойчивым. Отсюда устанавливается устойчивость заданного движения (2.10) системы (4.6).

Из анализа системы (5.6), (5.8) дополнительно устанавливается, что движение $(G(t) = 0,\; g_k(t) = 0)$ этой системы по переменной G является сильно асимптотически устойчивым. Это означает, что система (4.6) через конечный интервал времени выходит на режим (3.4), (4.2). Движение $\psi_j = 0$ $(j = \overline{n+1, N})$ системы (4.2) является сильно асимптотически устойчивым. Отсюда следует сильная устойчивость движения $\psi_j = 0$ системы (4.6). Это означает, что на движениях системы (4.6) соотношения (2.13) выполняются через конечный интервал времени, т.е. звенья манипулятора через конечный интервал времени будут двигаться как абсолютно твердые тела, что утверждается по теореме 2.

Заметим далее следующее. Для возникновения эффекта (2.13) совсем не обязательно предполагать, что напряжения в механической системе должны удовлетворять, вообще говоря, специальным свойствам (4.2) – (4.4). Можно показать, что этот же эффект будет иметь место и при существенном ослаблении свойств (4.2) – (4.4). Именно вместо этих равенств достаточно выполнения неравенств общего вида [3]. Это естественно налагает только нестеснительные условия на организацию напряжений в механической системе, что указывает на нелокальность эффекта (2.13).

6. Заключение. Сопоставим два динамических описания рассматриваемой механической системы. Именно сопоставим систему (4.6), где деформации учитываются, и систему (3.3), где они не учитываются. Можно показать, что расширенная динамическая модель манипулятора (4.6) будет двигаться в силу модели (3.3) по общим переменным φ_j $(j = \overline{1, N})$. Это будет, если начальные значения в системах по общим переменным совпадают, а в системе (4.6) начальные деформации отсутствуют. По существу это означает, что деформируемая система (4.6) будет двигаться как система (3.3) абсолютно твердых тел.

Этот эффект можно рассматривать следующим образом. Именно можно полагать, что в (4.6) возникают такие значения обобщенных сил (4.4), которые по существу совпадают с соответствующими напряжениями в сечениях абсолютно твердых звеньев механической системы (3.3). Т.е. напряжения (4.4) в точности совпадают с силами реакций, которые соответствуют механическим связям $\psi_i = 0$ системы (3.3).

Это означает следующее. В рамках гипотезы твердого тела в явном виде вводится предположение о неизменности расстояний между материальными точками, из которых оно состоит [11]. Таким образом по существу вводится предположение о неизменности расстояний между элементами звена манипулятора (что соответствует $\psi_i = 0$ в (3.3)). В отличие от этого в публикуемой работе по существу вводятся такие специально организованные силы (4.2), (4.4) между этими элементами, что расстояния между ними в процессе движения становятся неизменными (в рассматриваемом случае через конечный интервал времени). Именно это выражают соотношения (2.13).

В этом смысле введенная в работе динамическая модель представляет собой конструктивное обобщение динамических моделей механических систем, основанных на понятии твердого тела. Модель в общем случае описывает движение деформируемых механических систем. В частных случаях (при наличии надлежащих свойств напряжений) в рамках этой модели движение системы будет происходить как движение системы твердых тел. Это позволяет с единых позиций описывать движение как деформируемых систем, так и систем твердых тел. Эта конечномерная динамическая модель может рассматриваться как дополнительный инструмент в исследовании динамики управляемых механических систем [1–11].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект N 96-01-01542).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Матюхин В.И.* Устойчивость движений манипуляционных роботов в режиме декомпозиции // Автоматика и телемеханика. 1989. N 3. С. 33–44.
2. *Матюхин В.И., Пятницкий Е.С.* Управление движением манипуляционных роботов на принципе декомпозиции при учете динамики приводов. // Автоматика и телемеханика. 1989. № 9. С. 67–81.
3. *Матюхин В.И.* Сильная устойчивость движений механических систем // Автоматика и телемеханика. 1996. № 1. С. 37–56.

4. *Бюшгенс Г.С., Гоман М.Г., Матюхин В.И., Пятницкий Е.С.* Стабилизируемость и универсальные законы управления движением твердого тела при учете аэродинамических воздействий // Докл. РАН. 1995. Т. 342. № 1. С. 49–52.
5. *Дунская Н.В., Пятницкий Е.С.* Метод синтеза управления упругими системами // Докл. РАН. 1994. Т. 338. № 2. С. 194–196.
6. *Черноусько Ф.Л.* Динамика управляемых движений упругого манипулятора // Изв. Академии наук СССР. Техн. кибернетика. 1981. № 5. С. 142–152.
7. *Кристенсен Р.* Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974. 338 с.
8. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1965. 203 с.
9. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Физматгиз, 1961. 311 с.
10. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
11. *Айзерман М.А.* Классическая механика. М.: Наука, 1974. 367 с.

Москва

Поступила в редакцию
4.VI.1996