

УДК 531.39

© 1997 г. Г.Ф. ЗОЛОТЕНКО

## ГЕОМЕТРИЯ МАСС ТВЕРДОГО ТЕЛА С ЖИДКОСТЬЮ ПРИ РАВНОУСКОРЕННОМ ДВИЖЕНИИ

Решается задача определения относительных координат центра масс и тензора инерции системы тело – жидкость, находящейся в поле силы тяжести, при равноускоренных режимах движения тела (разгон, торможение, движение с постоянной скоростью при произвольной ориентации тела и т.д.). Основное внимание уделено случаю, когда содержащая жидкость полость твердого тела имеет форму кольцевого цилиндра, имеющего произвольное угловое положение в пространстве, от горизонтального до вертикального

**1. Постановка задачи.** Рассматривается абсолютно твердое тело с полостью, образованной двумя соосными круговыми цилиндрическими поверхностями и двумя плоскостями, перпендикулярными общей оси симметрии цилиндрических поверхностей (фигура). Поперечное сечение полости является кольцом, в связи с чем рассматриваемая полость в дальнейшем для краткости называется кольцевой. Пространство между цилиндрическими поверхностями частично заполнено однородной идеальной несжимаемой жидкостью плотности  $\rho$ . Вся система движется в поле силы тяжести. С твердым телом жестко связана правая прямоугольная система координат  $Ox\eta\zeta$ , начало  $O$  которой размещено в центре симметрии полости, ось  $Ox$  направлена вдоль продольной оси симметрии полости, ось  $O\eta$  – по восходящей прямой. Тело совершает поступательное движение относительно неподвижной системы координат  $O_*\xi\eta\zeta$  в плоскости  $O_*\xi\eta$ .

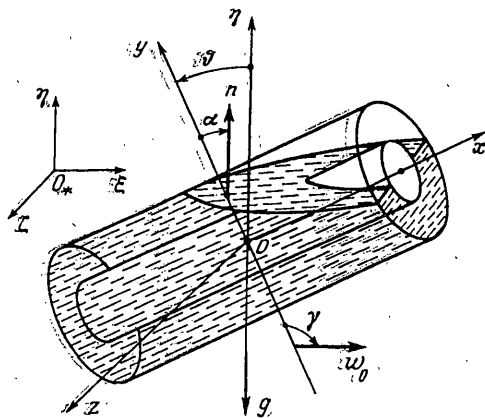
Необходимо, полагая ускорение  $w_0$  твердого тела постоянным и известным, определить координаты центра масс и моменты инерции всего объекта в системе координат  $Ox\eta\zeta$ .

Как известно [1], радиус-вектор  $r_0$  центра масс и тензор инерции  $J_0$  системы можно определить по формулам

$$r_0 = (m_1 r_1 + m r_c) / m_0, \quad J_0 = J_1 + J, \quad m_0 = m_1 + m$$

где  $r_1, r_c$  – радиусы-векторы центров масс,  $J_1, J$  – тензоры инерции,  $m_1, m$  – массы твердого тела и жидкости соответственно. Величины  $r_1, J_1$  можно считать известными [2–4], что в дальнейшем и предполагается. Таким образом, задача сводится к определению распределения масс жидкости.

Рассматриваемая задача освещена в литературе не достаточно полно. В [5, 6] определялись присоединенные массы жидкости, причем для полостей других форм. Случаи, когда жидкое тело имеет лишь одну плоскость симметрии, изучались в работах [7–9], посвященных исследованию свободных колебаний жидкости. В [10] рассматривался случай кольцевого цилиндрического бака, но в предположении, что свободная поверхность жидкости является горизонтальной. Вопрос о зависимости распределения жидких масс от ускорения в отмеченных работах не затрагивался. Этот вопрос можно считать решенным только для случая, когда жидкость целиком



заполняет полость и не имеет свободных границ [11]. Отметим, наконец, монографию [12], в которой даны общие подходы и методы динамики твердого тела с жидкостью, а также представлен широкий круг конкретных решенных задач.

## 2. Форма жидкого тела при ускорении.

Ясно, что при движении несущего тела в поле силы тяжести с постоянным по величине и направлению ускорением возможен режим движения жидкости, при котором она находится в равновесии относительно твердого тела, а ее свободная поверхность является плоской. Задача, однако, заключается в определении положения этой свободной поверхности отно-

сительно связанных осей  $Oxyz$ . Рассмотрим эту задачу.

Пусть абсолютное движение жидкости является безвихревым. В этом случае относительная скорость  $\mathbf{u}$  и абсолютная скорость  $\mathbf{v}$  жидкости определяются известными соотношениями [12]:

$$\mathbf{u} = \nabla\psi - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \nabla\psi \quad (2.1)$$

где  $\psi(x, y, z, t)$  – некоторая гармоническая функция по переменным  $x, y, z$  ( $t$  – время),  $\boldsymbol{\omega}(t)$  – угловая скорость несущего тела,  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  – радиус-вектор произвольной точки жидкого объема относительно начала  $O$  подвижной системы координат,  $\mathbf{v}_0$  – скорость поступательного движения несущего тела. Оператор  $\nabla$  берется по переменным  $x, y, z$ . Можно показать, что интеграл Лагранжа – Коши в рассматриваемом случае представим в виде

$$\partial\psi / \partial t + \frac{1}{2}(\nabla\psi)^2 - \nabla\psi \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - [\mathbf{g} - \mathbf{w}_0(t)] \cdot \mathbf{r} + p/\rho = C(t) \quad (2.2)$$

Здесь  $\mathbf{g}$  – ускорение силы тяжести,  $p(x, y, z, t)$  – давление,  $C(t)$  – произвольная функция времени, а ускорение

$$\mathbf{w}_0(t) = \dot{\mathbf{v}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0 \quad (2.3)$$

(точка обозначает дифференцирование по времени в осях  $Oxyz$ ).

Замечание. Из выражения (2.2) можно получить часто применяемую форму интеграла Лагранжа – Коши [12, с. 61]:

$$\partial\Phi / \partial t + \frac{1}{2}v^2 - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - U + p/\rho = F(t)$$

где  $\Phi(x, y, z, t)$  – потенциал абсолютной скорости жидкости, связанный с функцией  $\psi(x, y, z, t)$  известными соотношениями  $\nabla\Phi = \mathbf{v}_0 + \nabla\psi$ ,  $\Phi = \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{r} + \psi$ ;  $U(x, y, z) = \mathbf{g} \cdot \mathbf{r}$  – силовая функция сил тяжести,  $F(t)$  – произвольная функция времени. Однако при рассмотрении относительных движений жидкости (в частности, относительного равновесия) представляется более естественной форма (2.2) интеграла Лагранжа – Коши. Из нее, в частности, непосредственно следует, что силовая функция массовых сил в рассматриваемом случае должна зависеть от сил инерции поступательного движения, т.е. представляться в виде  $U = [\mathbf{g} - \mathbf{w}_0(t)] \cdot \mathbf{r}$ .

При поступательном движении несущего тела  $\boldsymbol{\omega} = 0$  и, как видно из (2.1)–(2.3), возможен относительный покой жидкости, при котором

$$\psi = 0, \quad \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{w}_0 = \mathbf{v}_0 = \text{const} \quad (2.4)$$

При условии, что на свободной поверхности жидкости  $p = p_0 = \text{const}$ , из (2.2) с учетом (2.4) получаем уравнение свободной поверхности, которое представляем в виде

$$(g_x - w_x)x + (g_y - w_y)y + (g_z - w_z)z = p_0 / \rho - C_0 \quad (2.5)$$

где  $g_x, g_y, g_z$  и  $w_x, w_y, w_z$  — проекции на оси  $x, y, z$  векторов  $\mathbf{g}$  и  $\mathbf{w}_0$ ,  $C_0$  — значение функции  $C(t)$ , принимаемой постоянной.

Замечание. Уравнение (2.5) совпадает с тем, которое получается из известного уравнения свободной поверхности [12, с. 161]:

$$\rho U - \alpha_0(1/R_1 + 1/R_2) = \text{const}$$

( $\alpha_0$  — коэффициент поверхностного натяжения,  $R_1, R_2$  — главные радиусы кривизны свободной поверхности), если в последнем пренебречь поверхностным натяжением и учесть в силовой функции силы инерции (т.е. положить  $\alpha_0 = 0$ ;  $U = (\mathbf{g} - \mathbf{w}_0) \cdot \mathbf{r}$ ) и принять  $\text{const} = p_0 - C_0 \rho$ .

Не нарушая общности, считаем, что плоскость  $Oxy$  все время совпадает с плоскостью  $O_*\xi\eta$ . Кроме того, ориентацию несущего тела в пространстве определим с помощью угла  $\vartheta$  между осями  $O_*\eta$  и  $Oy$  ( $\vartheta$  положителен при отклонении оси  $Oy$  от оси  $O_*\eta$  против часовой стрелки). Тогда

$$g_x = -g \sin \vartheta, \quad g_y = -g \cos \vartheta, \quad g_z = 0 \quad (2.6)$$

Вектор ускорения  $\mathbf{w}_0$  в проекциях на подвижные оси представляем в виде

$$w_x = w \sin \gamma, \quad w_y = w \cos \gamma, \quad w_z = 0 \quad (2.7)$$

где  $w$  — величина ускорения,  $\gamma$  — угол между осью  $Oy$  и вектором  $\mathbf{w}_0$ , определяющий направление ускорения относительно твердого тела (угол  $\gamma$  положителен при отклонении  $\mathbf{w}_0$  от оси  $Oy$  по часовой стрелке). После подстановки (2.6), (2.7) в (2.5) получаем следующее уравнение свободной поверхности жидкости:

$$y = k(\vartheta, \gamma, w)x + h(\vartheta, \gamma, w) \quad (2.8)$$

$$k(\vartheta, \gamma, w) = -\frac{g \sin \vartheta + w \sin \gamma}{g \cos \vartheta + w \cos \gamma}, \quad h(\vartheta, \gamma, w) = \frac{\rho C_0 - p_0}{\rho(g \cos \vartheta + w \cos \gamma)} \quad (2.9)$$

Равенства (2.8), (2.9) показывают, что тангенс угла наклона свободной поверхности к оси  $Ox$  и точка  $(0, h)$ , определяющие ее положение в осях  $Oxyz$ , зависят от ориентации твердого тела относительно неподвижного пространства, а также от величины и направления ускорения. В частном случае ускорения тела по горизонтали, когда  $\gamma = \pi/2$ ,  $\vartheta = 0$ ,  $w \neq 0$ , уравнение (2.8) принимает вид

$$y = -\frac{w}{g}x + \frac{\rho C_0 - p_0}{\rho g} \quad (2.10)$$

В другом частном случае, когда тело неподвижно, но наклонено на угол  $\vartheta$ , т.е. при  $w = 0$ ,  $\vartheta \neq 0$ , уравнение свободной поверхности будет следующим:

$$y = -\text{tg } \vartheta x + \frac{\rho C_0 - p_0}{\rho g \cos \vartheta} \quad (2.11)$$

Из (2.10), (2.11) видно, что в рассматриваемых случаях наклон свободной поверхности относительно оси  $Ox$  будет одинаковым, если выбрать величину ускорения из условия  $w = g \text{tg } \vartheta$ . Точка же пересечения свободной поверхности с осью  $Oy$  в обоих случаях остается неопределенной ввиду наличия произвольной постоянной  $C_0$ . Эта же

ситуация сохраняется и в общем случае произвольных  $w, \gamma, \vartheta$ , что не позволяет определить до конца границы жидкого объема и, как следствие, распределение жидких масс.

**3. Определяющее уравнение. Кольцевая полость.** Для определения параметра  $h$  в уравнении (2.8) воспользуемся условием постоянства объема жидкости, а именно:

$$V(\vartheta, \gamma, w) = m/\rho \quad (3.1)$$

где  $V(\vartheta, \gamma, w)$  – подлежащая определению функция, задающая величину объема жидкости в зависимости от параметров  $\vartheta, \gamma, w$ . Левая часть соотношения (3.1), называемого в дальнейшем определяющим уравнением, представляет собой объемный интеграл по области, занятой жидкостью, и в общем случае имеет довольно сложный вид. Найдем функцию  $V(\vartheta, \gamma, w)$  для кольцевой полости.

Пусть жидкость в кольцевой полости занимает область  $\Omega$ , которая ограничена внешней оболочкой радиуса  $R$ , внутренней оболочкой радиуса  $r$ , и плоскостями  $x = -l/2, x = l/2$ , где  $l$  – длина полости, а также свободной поверхностью  $\Gamma$  (2.8). Ограничимся практически важным случаем, когда

$$r < h(0, 0, 0) < R \quad (3.2)$$

Это означает, что в горизонтальной неподвижной полости ( $\vartheta = \gamma = w = 0$ ) жидкость полностью покрывает внутренний цилиндр. Пусть  $\alpha$  обозначает угол между осью  $Oy$  и внешней нормалью  $\mathbf{n}$  к плоскости  $\Gamma$  ( $\alpha > 0$  при повороте оси  $Oy$  до совмещения с нормалью по часовой стрелке). Очевидно

$$\operatorname{tg} \alpha = -k(\vartheta, \gamma, w) \quad (3.3)$$

В дополнение к (3.2) будем считать, что

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4 < \pi/2 \quad (3.4)$$

где  $\alpha_j (j = \overline{1, 4})$  – значения углов  $\alpha$  из интервала  $(0, \pi/2)$ , при которых прямая (2.8) в плоскости  $Oxy$  последовательно (при увеличении  $\alpha$ ) пересекает угловые точки плоской области, получающейся в сечении полости плоскостью  $Oxy$ . Условие (3.4), как и (3.2), налагает ограничения на параметры  $R, r, l, m, \rho$ .

Вычисляя интегралы по области  $\Omega$  с учетом (2.8) и (3.3), получаем определяющее уравнение (3.1) для кольцевой полости в следующем виде:

$$V(\vartheta, \gamma, w) = V_n = m/\rho \quad \text{при } \alpha \in A_n, n = \overline{1, 5} \quad (3.5)$$

Здесь множества  $A_n$  определяются соотношениями

$$A_n = (\alpha_{n-1}, \alpha_n), \quad n = \overline{1, 5}, \quad \alpha_0 = 0, \quad \alpha_5 = \pi/2 \quad (3.6)$$

а функции  $V_n$  даются выражениями

$$V_1(\alpha, h, y_1, y_2) = 2\{l[f_1(y_1) - f_1(-R)] + (h \operatorname{ctg} \alpha + l/2)[f_1(y_2) - f_1(y_1)] - \operatorname{ctg} \alpha [f_2(y_2) - f_2(y_1)]\} - \pi r^2 l \quad (3.7)$$

$$y_1 = -\frac{1}{2}l \operatorname{tg} \alpha + h, \quad y_2 = \frac{1}{2}l \operatorname{tg} \alpha + h \quad (3.8)$$

$$V_2(\alpha, h, y_1) = V_1(\alpha, h, y_1, R) \quad (3.9)$$

$$V_3(\alpha, h, y_1) = 2\{l[f_1(y_1) - f_1(-R) - g_1(y_1) + g_1(-r)] + (h \operatorname{ctg} \alpha + l/2)[f_1(R) - f_1(y_1) - g_1(r) + g_1(y_1)] - \operatorname{ctg} \alpha [f_2(R) - f_2(y_1) - g_2(r) + g_2(y_1)]\} \quad (3.10)$$

$$V_4(\alpha, h, y_1) = 2\{l[f_1(y_1) - f_1(-R)] + (h \operatorname{ctg} \alpha + l/2)[f_1(R) - f_1(y_1) - g_1(r) + g_1(-r)] - \operatorname{ctg} \alpha [f_2(R) - f_2(y_1) - g_2(r) + g_2(-r)]\} \quad (3.11)$$

$$V_5(\alpha, h) = V_4(\alpha, h, -R) \quad (3.12)$$

$$f_1(y) = \frac{1}{2}(y\sqrt{R^2 - y^2} + R^2 \arcsin(y/R)), \quad f_2(y) = -\frac{1}{3}(\sqrt{R^2 - y^2})^3 \quad (3.13)$$

$$g_1(y) = \frac{1}{2}(y\sqrt{r^2 - y^2} + r^2 \arcsin(y/r)), \quad g_2(y) = -\frac{1}{3}(\sqrt{r^2 - y^2})^3 \quad (3.14)$$

Из (3.5)–(3.14) следует, что определяющее уравнение для кольцевой полости является трансцендентным уравнением относительно величины  $h$  при заданном  $\alpha$ . Решение этого уравнения можно выполнить численно на ЭВМ. Предварительно, для определения величин  $\alpha_j$ , необходимо решить системы двух уравнений относительно двух переменных  $\alpha_j, h_j$  вида

$$c_j = -x_j \operatorname{tg} \alpha_j + h_j, \quad V_j(\alpha_j, h_j) = \frac{m}{\rho} \quad (j = \overline{1, 4}) \quad (3.15)$$

$$x_1 = -\frac{l}{2}, \quad c_1 = R, \quad x_2 = \frac{l}{2}, \quad c_2 = r, \quad x_3 = \frac{l}{2}, \quad c_3 = -r, \quad x_4 = \frac{l}{2}, \quad c_4 = -R$$

Системы уравнений (3.15) также решаются численно. Получающиеся при этом величины  $h_j$  определяют интервалы для корней  $h$  определяющего уравнения (с правыми частями (3.7)–(3.12)), которые, как известно, необходимо задавать при решении трансцендентных уравнений численными методами.

**4. Центр масс и тензор инерции жидкого тела.** Итак, при заданных ориентации и ускорении несущего тела, т.е. при известных параметрах  $\vartheta, \gamma, m$ , можно определить положение свободной поверхности жидкого груза (угол  $\alpha$  и параметр  $h$ ) и тем самым задать границы области  $\Omega$ . Дальнейшие вычисления параметров, характеризующие распределение масс жидкого груза в кольцевой полости, осуществляются по формулам

$$x_c = \frac{\rho}{m} \int_{\Omega(\alpha)} x d\Omega, \quad y_c = \frac{\rho}{m} \int_{\Omega(\alpha)} y d\Omega, \quad z_c = 0 \quad (4.1)$$

$$J_{xx} = \rho \int_{\Omega(\alpha)} (y^2 + z^2) d\Omega, \quad J_{yy} = \rho \int_{\Omega(\alpha)} (x^2 + z^2) d\Omega, \quad J_{zz} = \rho \int_{\Omega(\alpha)} (x^2 + y^2) d\Omega \quad (4.2)$$

$$J_{xy} = \rho \int_{\Omega(\alpha)} xy d\Omega, \quad J_{xz} = J_{yz} = 0$$

где  $x_c, y_c, z_c$  – координаты центра масс,  $J_{xx}, J_{yy}, J_{zz}, J_{xy}, J_{xz}, J_{yz}$  – осевые и центробежные моменты инерции жидкого груза. Границы области интегрирования  $\Omega(\alpha)$  совпадают с теми, которые использованы при получении выражений (3.7)–(3.12) для объемов. Найдем в явном виде выражения (4.1), (4.2) для случая кольцевой полости.

Обозначим через  $Q_1, Q_2$  внутренние объемы, ограниченные внешней и внутренней цилиндрическими поверхностями (а также плоскостью  $\Gamma$  (2.8) и торцами) соответственно. Тогда можно написать

$$x_c = \frac{\rho}{m} (I_1 - L_1), \quad y_c = \frac{\rho}{m} (I_2 - L_2) \quad (4.3)$$

$$J_{xx} = \rho(I_y + I_z), \quad J_{yy} = \rho(I_x + I_z), \quad J_{zz} = \rho(I_x + I_y) \quad (4.4)$$

$$J_{xy} = \rho(I_6 - L_6)$$

где  $I_x, I_y, I_z$  – моменты инерции жидкости относительно координатных плоскостей, причем

$$I_x = I_3 - L_3, \quad I_y = I_4 - L_4, \quad I_z = I_5 - L_5 \quad (4.5)$$

Величины  $I_i, L_i$  ( $i = \overline{1, 6}$ ) в формулах (4.3)–(4.5) представляют собой интегралы по

объемам  $Q_1, Q_2$ , при этом  $I_i$  выражаются формулами

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{Q_1} x dQ, & I_2 &= \int_{Q_1} y dQ, & I_3 &= \int_{Q_1} x^2 dQ \\ I_4 &= \int_{Q_1} y^2 dQ, & I_5 &= \int_{Q_1} z^2 dQ, & I_6 &= \int_{Q_1} xy dQ \end{aligned} \quad (4.6)$$

а интегралы  $L_i$  ( $i = \overline{1,6}$ ) имеют те же подынтегральные выражения, что и  $I_i$ , но берутся по объему  $Q_2$ . Опуская выкладки, приведем окончательные выражения для интегралов  $I_i, L_i$ :

$$I_i = \begin{cases} F_i(y_1, y_2), & 0 < \alpha < \alpha_1, \\ F_i(y_1, R), & \alpha_1 < \alpha < \alpha_4, \\ F_i(-R, R), & \alpha_4 < \alpha < \pi/2 \end{cases} \quad L_i = \begin{cases} G_i(r, r), & 0 < \alpha < \alpha_2 \\ G_i(y_1, r), & \alpha_2 < \alpha < \alpha_3 \\ G_i(-r, r), & \alpha_3 < \alpha < \pi/2 \end{cases} \quad (4.7)$$

$(i = \overline{1,6})$

$$\begin{aligned} F_1(y_1, y_2) &= a_1[f_1(y_2) - f_1(y_1)] - 2h \operatorname{ctg}^2 \alpha [f_2(y_2) - f_2(y_1)] + \operatorname{ctg}^2 \alpha [f_3(y_2) - f_3(y_1)] \\ a_1 &= h^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha - l^2 / 4 \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} F_2(y_1, y_2) &= 2\{l[f_2(y_1) - f_2(-R)] + a_2[f_2(y_2) - f_2(y_1)] - \operatorname{ctg} \alpha [f_3(y_2) - f_3(y_1)]\} \\ a_2 &= h \operatorname{ctg} \alpha + l / 2 \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} F_3(y_1, y_2) &= \frac{1}{6} l^3 [f_1(y_1) - f_1(-R)] + a_3 [f_1(y_2) - f_1(y_1)] - 2h^2 \operatorname{ctg}^3 \alpha [f_2(y_2) - f_2(y_1)] + \\ &+ 2h \operatorname{ctg}^3 \alpha [f_3(y_2) - f_3(y_1)] - \frac{2}{3} \operatorname{ctg}^3 \alpha [f_4(y_2) - f_4(y_1)] \\ a_3 &= \frac{2}{3} (h^3 \operatorname{ctg}^3 \alpha + \frac{1}{8} l^3) \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$F_4(y_1, y_2) = 2\{l[f_3(y_2) - f_3(-R)] + a_2[f_3(y_2) - f_3(y_1)] - \operatorname{ctg} \alpha [f_4(y_2) - f_4(y_1)]\} \quad (4.11)$$

$$F_5(y_1, y_2) = \frac{2}{3}\{l[f_5(y_1) - f_5(-R)] + a_2[f_5(y_2) - f_5(y_1)] - \operatorname{ctg} \alpha [f_6(y_2) - f_6(y_1)]\} \quad (4.12)$$

$$F_6(y_1, y_2) = a_1 [f_2(y_2) - f_2(y_1)] - 2h \operatorname{ctg}^2 \alpha [f_3(y_2) - f_3(y_1)] - \operatorname{ctg}^2 \alpha [f_4(y_2) - f_4(y_1)] \quad (4.13)$$

В формулах (4.8)–(4.13) функции  $f_i(y)$  ( $i = \overline{3,6}$ ) определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} f_3(y) &= -\frac{1}{4} y \left( \sqrt{R^2 - y^2} \right)^3 + \frac{1}{8} R^2 \left( y \sqrt{R^2 - y^2} + R^2 \arcsin(y/R) \right) \\ f_4(y) &= \frac{1}{5} \left( \sqrt{R^2 - y^2} \right)^5 - \frac{1}{3} R^2 \left( \sqrt{R^2 - y^2} \right)^3 \\ f_5(y) &= \frac{1}{4} \left[ y \left( \sqrt{R^2 - y^2} \right)^3 + \frac{3}{2} R^2 y \sqrt{R^2 - y^2} + \frac{3}{2} R^4 \arcsin(y/R) \right] \\ f_6(y) &= -\frac{1}{5} \left( \sqrt{R^2 - y^2} \right)^5 \end{aligned} \quad (4.14)$$

Функции  $G_i(y_1, y_2)$  в выражениях для интегралов  $L_i$  (4.7) получаются из  $F_i(y_1, y_2)$  с теми же индексами путем замены в (3.13), (4.14), а затем в (4.8)–(4.13) радиусов  $R$  на  $r$ .

Таким образом, параметры распределения масс при заданных величинах  $m, \rho, l, R, r, \alpha$  и  $h$  вычисляются по формулам (4.3), (4.4) с использованием соотношений (4.5)–(4.14). С помощью (3.3) по заданному углу  $\vartheta$  и параметрам ускорения  $\gamma, w$  рассчитывается соответствующий угол  $\alpha$  наклона свободной поверхности, а затем из (3.5) определяется и параметр  $h$  уравнения свободной поверхности (2.8).

Таблица 1

$w$	$x_c$	$y_c$	$J_{xx}$	$J_{yy}$	$J_{zz}$	$J_{xy}$
0	0	-0,092	3929	7715	7223	0
2,812	-0,090	-0,081	4006	7531	7192	463

Таблица 2

$w$	$x_c$	$y_c$	$J_{xx}$	$J_{yy}$	$J_{zz}$	$J_{xy}$
0	0	-0,090	3911	8264	7745	0
2,812	-0,087	-0,080	3993	8084	7729	480

**5. Пример.** Объект, транспортирующий жидкий груз, разгоняется по горизонтали с ускорением  $w = 0,29g$ . Груз размещается в двух цилиндрических баках с горизонтальными образующими, причем один из баков является кольцевым с параметрами  $l = 2,95$  м;  $R = 1$  м;  $r = 0,3$  м, а второй – простой круговым (без внутренней цилиндрической вставки) с параметрами  $l = 2,95$  м;  $R = 1$  м;  $r = 0$ . Баки заполнены на 90% своих объемов жидкостью плотности  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>. Необходимо оценить смещение центров масс и изменения моментов инерции жидких грузов при разгоне объекта.

По расчетам объем кольцевого бака равен 8,434 м<sup>3</sup>, а кругового – 9,268 м<sup>3</sup>, жидкость в кольцевом баке занимает объем 7,590 м<sup>3</sup>, а в круговом – 8,341 м<sup>3</sup>, масса жидкости в кольцевом и круговом баках равна соответственно 7590 кг и 8341 кг. При неподвижном объекте уровень свободной поверхности жидкого груза  $h = 0,707$  м в кольцевом баке и  $h = 0,687$  м в круговом баке. При рассматриваемом режиме движения объекта  $\vartheta = 0$ ,  $\gamma = \pi/2$ . По формуле (2.9)  $k = -0,286$ . Этому значению  $k$  по (3.3) соответствует угол  $\alpha = 16^\circ$ . Положительный знак  $\alpha$  означает, что свободная поверхность жидкости в обоих баках установится при разгоне так, что ее уровень у передних стенок будет ниже, чем у задних. Решая уравнения (3.15), находим, что для кольцевого бака  $\alpha_1 = 10,5^\circ$ ,  $\alpha_2 = 18,7^\circ$ ,  $h_1 = 0,727$  м,  $h_2 = 0,798$  м, а для кругового –  $\alpha_1 = 11,2^\circ$ ,  $\alpha_4 = 73,6^\circ$ ,  $h_1 = 0,708$  м,  $h_4 = 4,0$  м (для кругового бака углы  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  и величины  $h_2$ ,  $h_3$  не рассматриваются). Следовательно, для кольцевого бака выполняется неравенство  $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$  и определяющее уравнение (3.5) нужно брать в виде

$$V_2(\alpha, h, y_1) = 7,590 \quad (5.1)$$

где  $V_2(\alpha, h, y_1)$  определяется по формуле (3.9). В случае кругового бака  $\alpha_1 < \alpha < \alpha_4$ , и определяющее уравнение записывается как

$$V_4(\alpha, h, y_1) = 8,341 \quad (g_1 = g_2 \equiv 0) \quad (5.2)$$

Численное решение уравнений (5.1) и (5.2) при  $\alpha = 16^\circ$  дает значение  $h = 0,769$  м для кольцевого бака и  $h = 0,743$  м – для кругового. Дальнейшие расчеты выполняются по формулам (4.3), (4.4) при найденных значениях  $\alpha$  и  $h$ . Результаты расчетов (в системе СИ) для кольцевого и кругового баков приведены в табл. 1 и 2 соответственно.

Из этих таблиц видно, что максимальное изменение осевых моментов инерции жидкости грузов при разгоне составляет 2%, и, кроме того, появляются центробежные моменты инерции. Происходит также смещение центров масс жидких грузов вдоль продольной оси баков, что приводит к возникновению момента сил тяжести относительно оси  $z$ . Этот момент может играть дестабилизирующую роль и привести к потере устойчивости движения объекта, если не принять соответствующих мер.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
2. Фаворин М.В. Моменты инерции тел. Справочник. М.: Машиностроение, 1970. 312 с.
3. Гернет М.М., Ратобильский В.Ф. Определение моментов инерции. – М.: Машиностроение, 1969. 246 с.
4. Ишлинский А.Ю., Стороженко В.А., Темченко М.Е. Вращение твердого тела на струне и смежные задачи. М.: Наука, 1991. 330 с.
5. Микишев Г.Н., Рабинович Б.И. Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. М.: Машиностроение, 1968. 532 с.
6. Феценко С.Ф., Луковский И.А., Рабинович Б.И., Докучаев Л.В. Методы определения присоединенных масс жидкости в подвижных полостях. Киев: Наук. думка, 1969. 250 с.
7. Луковский И.А., Барняк М.Я., Комаренко А.Н. Приближенные методы решения задач динамики ограниченного объема жидкости. Киев: Наук. думка, 1984. 228 с.
8. Симонова Н.М. Расчет коэффициентов уравнений движения твердого тела с жидкостью, частично заполняющей несимметричную полость // Тр. 5-го семинара "Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью". Томск: Изд-во Томс. ун-та, 1984. С. 153–164.
9. Борисова Э.П. Свободные колебания жидкости в наклонном цилиндре // Вариационные методы в задачах о колебании жидкости и тела с жидкостью. М.: ВЦ АН СССР, 1962. С. 203–211.
10. Петров А.А. Колебания жидкости в цилиндрических сосудах с горизонтальной образующей // Вариационные методы в задачах о колебании жидкости и тела с жидкостью. М.: ВЦ АН СССР, 1962. С. 179–202.
11. Жуковский Н.Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородною капельною жидкостью // Собр. соч. Т. 2. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. С. 152–309.
12. Моисеев Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 439 с.

Киев

Поступила в редакцию  
22. II. 1996