МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1997

УДК 531.53

© 1997 г. С.А. АГАФОНОВ

ЭФФЕКТ СТАБИЛИЗАЦИИ РАВНОВЕСИЯ МАЯТНИКА ЦИГЛЕРА ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ

В [1] на примере двойного маятника с линейными упруговязкими шарнирами на который действует следящая сила, был получен неожиданный результат: критическая нагрузка при наличии исчезающе малой диссипации оказалась значительно ниже критической нагрузки, вычисленной при отсутствии диссипации. В дальнейшем, было показано, что этот эффект, как правило, имеет место в любых неконсервативных системах [2]. Таким образом, в пространстве параметров системы существует область, в которой система без диссипации устойчива, а при малой диссипации – неустойчива.

В публикуемой работе на примере двойного маятника со следящей силой показано, что эту неустойчивость можно стабилизировать параметрическим возбуждением, причем эффект стабилизации проявляется на комбинационном резонансе. В пространстве параметров построены в первом приближении (по малому параметру) границы области устойчивости и найдены условия асимптотической устойчивости. Приводятся числовые примеры.

1. Постановка задачи и уравнения движения. Рассматривается двойной маятник, представляющий собой систему двух невесомых стержней AB и BC, каждый из которых имеет длину l. Шарниры A, B обладают вязкоупругими свойствами, так что восстанавливающие моменты в них равны $M_1 = -a\theta_1 - b\dot\theta_2$, $M_2 = -a(\theta_2 - \theta_1) - b(\dot\theta_2 - \dot\theta_1)$. В шарнире B и на свободном конце C расположены две одинаковые массы m. На свободный конец C действует следящая сила P. Предположим, что конец A совершает гармоническое колебание вдоль оси y по закону $y = e\cos\omega t$ (фиг. 1). Уравнения движения маятника можно привести к виду

$$
\begin{aligned}
&2\ddot\theta_1 + \cos(\theta_1 - \theta_2)\ddot\theta_2 + \sin(\theta_1 - \theta_2)\dot\theta_2^2 + 2\beta\dot\theta_1 - \beta\dot\theta_2 + \\
&+2r\theta_1 - r\theta_2 - p\sin(\theta_1 - \theta_2) + 2\varepsilon\cos\tau\sin\theta_1 = 0 \\
&\cos(\theta_1 - \theta_2)\ddot\theta_1 + \ddot\theta_2 - \sin(\theta_1 - \theta_2)\dot\theta_1^2 + \beta\dot\theta_2 - \beta\dot\theta_1 + \\
&+r\theta_2 - r\theta_1 + \varepsilon\cos\tau\sin\theta_2 = 0
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

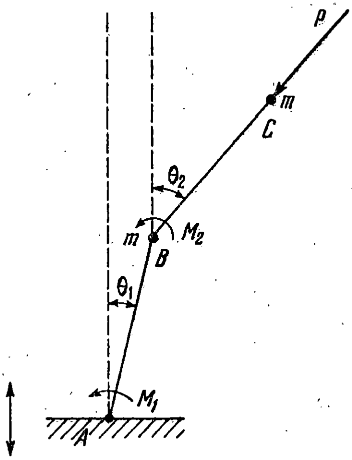
$$
p = P/(ml\omega^2), \quad r = a/(ml^2\omega^2), \quad \beta = b/(ml^2\omega), \quad \varepsilon = el^{-1} \ll 1
$$

где точка обозначает производную по $\tau = \omega t$. Уравнения движения (1.1) допускают решение

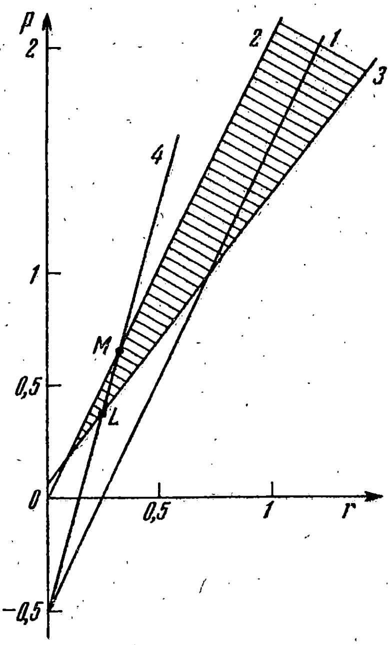
$$
\theta_1 = \theta_2 = 0, \quad \dot\theta_1 = \dot\theta_2 = 0 \tag{1.2}
$$

устойчивость которого в дальнейшем и исследуется.

Если $\varepsilon = 0$, $\beta = 0$, то можно показать, что равновесие (1.2) устойчиво в первом приближении при $p < 2r$. Отметим, что в [3] показано, что в нелинейной постановке



Фиг. 1



Фиг. 2

при $p < 2r$ имеет место устойчивость для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий. Если же присутствует в шарнирах A, B диссипация ($\beta > 0$), то (1.2) асимптотически устойчиво при $p < 4r/3 + \beta^2/2$.

В дальнейшем предполагается, что параметр β мал и имеет порядок ε: $\beta \sim \varepsilon$. Если p, r принадлежит области D, то равновесие (1.2) при $\beta = 0$ устойчиво, по крайней мере, в первом приближении, а при $\beta > 0$ неустойчиво (область D на фиг. 2 заштрихована). В связи с этим возникает задача о возможности стабилизации неустойчивого равновесия (1.2), возникающего из-за введения малой диссипации, параметрическим возбуждением.

2. Параметрический резонанс. Для решения поставленной задачи уравнения (1.1) линеаризуем и сделаем замену переменных

$$\theta_i, \theta_i^{\cdot} \to x_i, x_i^{\cdot} \quad (i = 1,2)$$

$$\theta_1 = (2r - p)(x_1 + x_2), \quad \theta_2 = h(x_2 - x_1), \quad h^2 = (2r - p)(4r - p)$$

Получим

$$x_1^{\cdot\cdot} + \beta(3+g)x_1^{\cdot} - \beta p h^{-1} x_2^{\cdot} + \omega_1^2 x_1 + \varepsilon(2 + g/2)\cos\tau x_1 - \varepsilon p/(2h)\cos\tau x_2 = 0 \qquad (2.1)$$

$$x_2^{\cdot\cdot} + \beta(3-g)x_2^{\cdot} + \beta p h^{-1} x_1^{\cdot} + \omega_2^2 x_2 + \varepsilon(2 - g/2)\cos\tau x_2 +$$

$$+ \varepsilon p/(2h)\cos\tau x_1 = 0, \quad g = (8r - 3p)h^{-1}$$

В (2.1) $\omega_{1,2}^2 = 3r - p \pm h$ (верхний знак относится к ω_1, нижний к ω_2).

Заметим, что наличие следящей силы математически выражается присутствием в системе (2.1) членов, линейно зависящих от x_1, x_2 и образующих кососимметрическую матрицу. Для учета действия этих слагаемых, обеспечивающих связь между уравнениями системы (2.1), наибольший интерес представляет рассмотрение комбинационных резонансов.

Для построения границ устойчивости приведем систему (2.1) к стандартному виду многочастотной системы, с последующим применением метода осреднения. Сделаем замену переменных $x_i, x_i^{\cdot} \to z_i, \varphi_i$ $(i = 1, 2)$ по формулам $x_i = z_i \sin\varphi_i$, $x_i^{\cdot} = z_i\omega_i \cos\varphi_i$. Тогда система (2.1) примет вид

$$\begin{aligned}
&\varphi_1^{\cdot} = \omega_1 + \beta(3+g)\sin\varphi_1\cos\varphi_1 - \left[\beta p\omega_2 z_2/(\omega_1 h z_1)\right]\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \\
&+\varepsilon\omega_1^{-1}(2+g/2)\sin^2\varphi_1\cos\psi - \left[\varepsilon p z_2/(2h\omega_1 z_1)\right]\cos\psi\sin\varphi_1\sin\varphi_2 \\
&\varphi_2^{\cdot} = \omega_2 + \beta(3-g)\sin\varphi_2\cos\varphi_2 + \left[\beta p\omega_1 z_1/(\omega_2 h z_2)\right]\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \varepsilon\omega_2^{-1}(2- \\
&-g/2)\sin^2\varphi_2\cos\psi + \left[\varepsilon p z_1/(2h\omega_2 z_2)\right]\cos\psi\sin\varphi_1\sin\varphi_2 \quad \psi^{\cdot} = 1 \\
&z_1^{\cdot} = -\beta(3+g)\cos^2\varphi_1 z_1 + \left[\beta p\omega_2/(h\omega_1)\right]\cos\varphi_1\cos\varphi_2 z_2 - \\
&-\varepsilon\omega_1^{-1}(2+g/2)\sin\varphi_1\cos\varphi_1\cos\psi z_1 + \left[\varepsilon p/(2h\omega_1)\right]\sin\varphi_2\cos\varphi_1\cos\psi z_2 \\
&z_2^{\cdot} = -\beta(3-g)\cos^2\varphi_2 z_2 - \left[\beta p\omega_1/(h\omega_2)\right]\cos\varphi_1\cos\varphi_2 z_1 - \varepsilon\omega_2^{-1}(2- \\
&-g/2)\sin\varphi_2\cos\varphi_2\cos\psi z_2 - \left[\varepsilon p/(2h\omega_2)\right]\sin\varphi_1\cos\varphi_2\cos\psi z_1
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Рассмотрим сначала комбинационный резонанс $\omega_1 - \omega_2 - 1 = 0$. На плоскости (p, r) этому резонансу соответствует прямая (*1*) $p = 2r - 1/2$, которая почти вся лежит в области D (фиг. 2); прямая (*2*) соответствует $p = 2r$, а прямая (*3*) – $p = 4/3r + 1/2\beta^2$.

Введя расстройку $\Delta_1 = \omega_1 - \omega_2 - 1$, $\Delta_1 \sim \varepsilon$ и делая замену переменных $\varphi_1, \varphi_2, \psi \to \varphi_1, \varphi_2, \theta$, $\theta = \varphi_1 - \varphi_2 - \psi$, приведем систему уравнений (2.2) к виду, в котором резонанс устранен за счет увеличения на единицу числа медленных переменных. Не выписывая эту систему, отметим лишь, что быстрыми переменными являются φ_1, φ_2. После осреднения по этим переменным, система уравнений для медленных переменных примет вид (обозначения для осредненных переменных остаются прежними)

$$\begin{aligned}
&\theta^{\cdot} = \Delta_1 - \left[\varepsilon p/(8h)\right]\left(z_2\omega_1^{-1}z_1^{-1} + z_1\omega_2^{-1}z_2^{-1}\right)\cos\theta \\
&z_1^{\cdot} = -\tfrac{1}{2}\beta(3+g)z_1 - \left[\varepsilon p/(8h\omega_1)\right]z_2\sin\theta \\
&z_2^{\cdot} = -\tfrac{1}{2}\beta(3-g)z_2 - \left[\varepsilon p/(8h\omega_2)\right]z_1\sin\theta
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Условием существования отличного от нуля стационарного решения для z_1, z_2 служит равенство нулю определителя, составленного из коэффициентов при z_1, z_2 во втором и третьем уравнениях системы

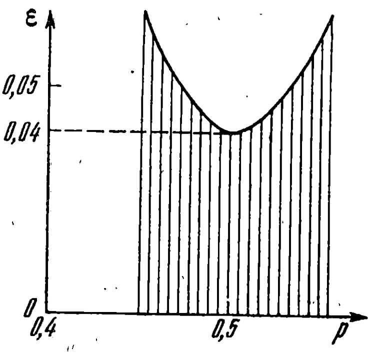
$$32r^2(4r-3p)\beta^2 - \varepsilon^2 p^2\sin^2\theta = 0 \tag{2.4}$$

Это равенство может иметь место только при $p < 4r/3$, т.е. стационарное решение системы (2.3), которому соответствует квазипериодическое решение исходной системы [4], существует вне области D. Для нахождения стационарного решения, приравняем правые части системы (2.3) нулю. Исключая z_1, z_2, θ, с учетом равенства (2.4), получим (в первом приближении по ε) границу области устойчивости

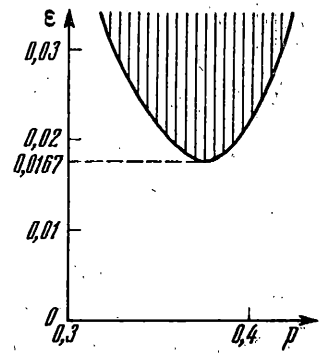
$$9p^2\varepsilon^2 = 32r^2(4r-3p)\Delta_1^2 + 288r^2(4r-3p)\beta^2 \tag{2.5}$$

существующую при $p < 4r/3$. Без потери точности в (2.5) следует положить $p = 2r - 1/2, \Delta_1 = (4r-2p)^{1/2} - 1 \sim \varepsilon$.

В качестве примера пусть значения параметров r и β таковы: $r = 0{,}5$, $\beta = 0{,}01$. Для этих значений кривая (2.5) в плоскости (p, ε) изображена на фиг. 3. Область асимптотической устойчивости заштрихована.



Фиг. 3



Фиг. 4

Таким образом, наличие резонанса $\omega_1 - \omega_2 - 1 = 0$ при параметрическом возбуждении дестабилизирует ранее асимптотически устойчивое равновесие.

Иная ситуация возникает при наличии другого комбинационного резонанса $\omega_1 + \omega_2 - 1 = 0$. На плоскости (p, r) этому резонансу соответствует прямая (*4*) $p = 4r - 1/2$, которая пересекает область D по отрезку LM (фиг. 2). В этом случае в системе (2.2) делается замена переменных $\varphi_1, \varphi_2, \psi \to \varphi_1, \varphi_2, \theta, \theta = \varphi_1 + \varphi_2 - \psi$. После осреднения по быстрым переменным φ_1, φ_2, система уравнений для медленных переменных имеет вид (обозначения для осредненных переменных прежние):

$$\begin{aligned}
\theta^{\cdot} &= \Delta_2 + [\varepsilon p/(8h)]\left(z_2\omega_1^{-1}z_1^{-1} - z_1\omega_2^{-1}z_2^{-1}\right)\cos\theta \\
z_1^{\cdot} &= -\tfrac{1}{2}\beta(3+g)z_1 + [\varepsilon p/(8h\omega_1)]z_2\sin\theta \\
z_2^{\cdot} &= -\tfrac{1}{2}\beta(3-g)z_2 - [\varepsilon p/(8h\omega_2)]z_1\sin\theta \\
\Delta_2 &= \omega_1 + \omega_2 - 1 \sim \varepsilon
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Аналогично случаю, рассмотренному выше, условием существования стационарного решения является равенство

$$32r^2(4r - 3p)\beta^2 + \varepsilon^2 p^2 \sin^2\theta = 0 \tag{2.7}$$

которое может выполняться только в области D: $p > 4r/3$.

Исключая z_1, z_2, θ, с учетом (2.7), получим границу устойчивости

$$9p^2\varepsilon^2 = 32r^2(3p - 4r)\Delta_2^2 + 288r^2(3p - 4r)\beta^2 \tag{2.8}$$

В (2.8) без потери точности $p = 4r - 1/2, \Delta_2 = (8r - 2p)^{1/2} - 1 \sim \varepsilon$.

В качестве примера выберем значения $r = 7/32$, $\beta = 0{,}01$. Кривая (2.8) в плоскости (p, ε) изображена на фиг. 4.

Механизму стабилизации неустойчивого равновесия параметрическим возбуждением можно дать геометрическую интерпретацию. Она основана на динамике мультипликаторов на комплексной плоскости. Пусть имеется комбинационный резонанс $\omega_1 + \omega_2 - 1 = 0$ и параметрическое возбуждение отсутствует ($\varepsilon = 0$). Если параметры системы принадлежат области D, то мультипликаторы ρ_1, ρ_2 ($\rho_3 = \bar{\rho}_1, \rho_4 = \bar{\rho}_2$) расположены на одном луче, выходящем из начала координат, причем ρ_1 лежит внутри единичной окружности, а ρ_2 вне. При параметрическом возбуждении ($\varepsilon > 0$) мультипликаторы ρ_2, ρ_4 пересекают единичную окружность и переходят внутрь. Параметры, при которых $|\rho_2| = 1$, удовлетворяют соотношению (2.8). Причем мультипликаторы ρ_1, ρ_3 не могут пересечь единичную окружность в силу формулы Лиувилля $|\rho_1|^2|\rho_2|^2 = \exp(-12\pi\beta) < 1$. Отсюда, в частности, следует также, что все мультипликаторы не могут находиться одновременно на единичной окружности.

Нахождение условий устойчивости можно провести анализируя корни характеристического уравнения, представляющего собой определитель бесконечного порядка. Для вычислений с точностью до ε можно ограничиться определителем второго порядка, который для случая комбинационного резонанса $\omega_1 + \omega_2 - 1 = 0$ имеет вид [5]:

$$\begin{vmatrix} (\lambda - i/2)^2 + \beta(3+g)(\lambda - i/2) + \omega_1^2 & -\varepsilon p/(4h) \\ \varepsilon p/(4h) & (\lambda + i/2)^2 + \beta(3-g)(\lambda + i/2) + \omega_2^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.9)$$

Условие, что корни уравнения (2.9) имеют, с точностью до ε $\mathrm{Re}\lambda < 0$ сводится к неравенству

$$9\varepsilon^2 p^2 > 32r^2(3p-4r)\Delta_2^2 + 288r^2(3p-4r)\beta^2 \qquad (2.10)$$

которое и является условием асимптотической устойчивости (условие стабилизации параметрическим возбуждением). При выполнении равенства (2.8) имеются чисто мнимые, с точностью до ε, корни уравнения (2.9): $\mathrm{Re}\lambda = 0$.

Область параметрической стабилизации, задаваемая неравенством (2.10) на фиг. 4 (при $r = 7/32$, $\beta = 0{,}01$) заштрихована.

Аналогичную процедуру можно провести и для резонанса $\omega_1 - \omega_2 - 1 = 0$. Условие $\mathrm{Re}\lambda < 0$ сводится к неравенству

$$9\varepsilon^2 p^2 < 32r^2(4r-3p)\Delta_1^2 + 288r^2(4r-3p)\beta^2 \qquad (2.11)$$

Область, задаваемая неравенством (2.11), на фиг. 3 заштрихована ($r = 0{,}5$, $\beta = 0{,}01$).

3. Обсуждение и выводы. В ряде работ, например, в [6, 7] отмечается, что для широкого класса систем наличие в ней диссипации, а также ее увеличение может дестабилизировать устойчивое движение. Причем эта дестабилизация проявляется лишь при комбинационном резонансе. Отсюда и был сделан вывод об их "опасности" [7].

В настоящей работе показано, что наличие комбинационных резонансов в ряде случаев может стабилизировать неустойчивое движение при параметрическом возбуждении, что позволяет говорить не только об их "опасности", но и также об их "полезности".

Автор благодарит В.Ф. Журавлева за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ziegler H.* Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik // Ing. Arch. 1952. Bd. 20. H. 1. S. 49–56.
2. *Herrmann G., Jong I.C.* On the destabilizing effect of Damping in Nonconservative Elastic Systems // J. Appl. Mech. Trans. ASME. Ser. E. 1965. B. V. 87. № 3. P. 592–597.
3. *Агафонов С.А.* Об устойчивости и автоколебаниях двойного маятника с упругими элементами, находящегося под действием следящей силы // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 5. С. 185–190.
4. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.
5. *Kotera T.* Notes on accuracy of approximate solutions of systems with parametric excitation // Strojnicky Časopis. 1980. 31. № 3. P. 251–267.
6. *Schmidt G., Weidenhammer F.* Instabilitäten gedämpfter rheolinearer Swingungen // Math. Nachrichten. 1961. 23. H. 4–5. S. 301–318.
7. *Валеев К.Г.* Об опасности комбинационных резонансов // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 6. С. 1134–1142.

Москва

Поступила в редакцию
15.XI.1993