МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1997

УДК 531.383

 Ю.Н. ЧЕЛНОКОВ

КВАТЕРНИОНЫ И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ДИНАМИКЕ СИММЕТРИЧНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА. Ч. 1

Введение. В последнее время для исследования движения твердого тела наряду с локальными координатами типа углов Эйлера используются невырождающиеся переменные [1–3]. Применение уравнений в невырождающихся переменных позволяет исследовать движение твердого тела во всей области фазового пространства, повышает эффективность численного, а в ряде случаев и аналитического решения задач динамики твердого тела. К невырождающимся переменным относятся параметры Родрига – Гамильтона (Эйлера) [4]. Их применение в классической динамике твердого тела наиболее глубоко изучалось (из отечественных ученых) В.Н. Кошляковым [1, 2].

Настоящая работа посвящена обобщению и развитию работ автора по применению параметров Родрига – Гамильтона и связанных с ними переменных в динамике симметричного твердого тела с одной неподвижной точкой. Некоторые из рассматриваемых вопросов (в частности, построение кватернионных моделей движения) изучались в динамике относительного движения симметричных механических систем в работах автора [5–8]. Параметры Родрига – Гамильтона являются компонентами собственного кватерниона ориентации твердого тела [9]. Поэтому их использование в качестве кинематических параметров ориентации твердого тела естественным образом приводит к использованию в механике твердого тела кватернионных переменных и алгебры кватернионов.

В работе рассматривается построение кватернионных уравнений движения динамически симметричного твердого тела с одной неподвижной точкой, находящегося под действием произвольного внешнего момента. Эти уравнения не имеют особых точек (регулярны всюду), имеют компактную и наглядную структуру, удобны для аналитического и численного решения ряда задач динамики, позволяют давать в ряде случаев наглядную геометрическую интерпретацию движения.

Построение новых уравнений движения твердого тела, поиск переменных и преобразований, приводящих уравнения движения к форме, удобной для изучения тех или иных случаев движения твердого тела, остаются актуальными задачами динамики твердого тела. Связано это с тем, что во многих случаях известные уравнения оказываются недостаточно эффективными (например, в случаях изучения методами нелинейной механики движений твердого тела, возмущенных по отношению к классическим интегрируемым случаям) и не позволяют давать наглядную геометрическую интерпретацию движения твердого тела (как, например, в случае Ковалевской).

Определенным эталоном здесь могут служить уравнения движения материальной точки в ньютоновском гравитационном поле в переменных Кустаанхеймо – Штифеля [10], имеющие линейный стационарный вид, а в случае эллиптического кеплеровского движения – вид уравнений движения четырехмерного одночастотного гармонического осциллятора, частота колебаний которого равна $(h/2)^{1/2}$, где h – энергия точки. Автором статьи показано [11, 12], что приведение уравнений движения материальной точки в декартовых координатах к линейному регулярному виду Кустаанхеймо – Штифеля наиболее естественно и наглядно осуществляется с помощью кватернионов. Развиваемая в работе теория приведения кватернионных уравнений движения симметричного твердого тела к осцилляторному виду методологически связана с разработанной автором кватернионной теорией регуляризующих преобразований уравнений возмущенного центрального движения материальной точки [11–13]. При этом в ее рамках, как частный случай, рассматривается вопрос о приведении уравнений движения твердого тела в случае Лагранжа к уравнениям движения гармонических осцилляторов. Задача эта, однако, в силу многочастотности системы уравнений оказывается более сложной, чем аналогичная задача о движении материальной точки в ньютоновском гравитационном поле.

В работе показано, что кватернионные уравнения движения твердого тела принимают осцилляторную форму, содержащую гироскопические члены, если их записать во вращающейся системе координат, проекция вектора абсолютной угловой скорости которой на ось симметрии тела равна нулю. Получаемые при этом кватернионные уравнения движения тела имеют такие же достоинства, как и известные векторные уравнения движения симметричного тела (Л.А. Парс [14], В.Ф. Журавлев [3]): они не вырождаются ни для какого углового положения тела (регулярны всюду), позволяют давать наглядную геометрическую интерпретацию движению оси симметрии тела. Вместе с тем кватернионные уравнения имеют и преимущества перед векторными: они разрешены относительно старших производных (в отличие от векторных, разрешение которых относительно старших производных сопряжено с трудностями из-за вырожденности кососимметрической матрицы коэффициентов третьего порядка); имеют меньшую размерность в общем случае, когда нужно найти положение тела в пространстве полностью (а не только его оси симметрии). Кватернионные уравнения движения тела принимают "чисто" осцилляторную форму, если их записать в системе координат, вращающейся с абсолютной угловой скоростью, коллинеарной вектору кинетического момента тела [6, 7]. Собственная частота тела, фигурирующая в этом случае в уравнениях движения в явном виде, пропорциональна модулю кинетического момента тела, а движение тела по инерции эквивалентно движению четырехмерного одночастотного гармонического осциллятора. В случае, когда момент внешних сил коллинеарен вектору кинетического момента, движение тела в кватернионных переменных эквивалентно движению четырехмерного линейного одночастотного осциллятора. К этому случаю относится оптимальный в смысле быстродействия пространственный разворот динамически симметричного твердого тела.

Полученные кватернионные осцилляторные формы уравнений движения твердого тела целесообразно использовать для построения нелинейной теории динамически настраиваемых гироскопов (случай, когда момент внешних сил перпендикулярен вектору кинетического момента тела), а также для изучения движения твердого тела, находящегося под действием малых внешних сил (ротационного движения тела).

Дано приложение построенных кватернионных моделей к задаче о движении твердого тела в однородном поле сил тяжести. Показано, что в случае Лагранжа, а также в более общем случае движения тела в потенциальных силовых полях, силовая функция которых – произвольная дифференцируемая функция косинуса угла нутации, учет интеграла энергии приводит к полному разделению уравнений движения тела по двум группам переменных. Для этого случая установлены преобразования, приводящие уравнения движения твердого тела по переменным, соответствующим углам прецессии и собственного вращения, к уравнениям плоского движения двух гармонических осцилляторов, частоты которых – линейные комбинации двух интегралов моментов количеств движения тела. Вопрос о полной приводимости уравнений движения тела (включая движение по углу нутации) к уравнениям движения гармонических осцилляторов в этом случае остается открытым.

Показано, что аналогия движения твердого тела с плоским движением системы двух несвободных материальных точек, вытекающая из смысла параметров Родрига – Гамильтона и вида исходных кватернионных уравнений движения тела, позволяет построить новые уравнения движения динамически симметричного твердого тела в полярных координатах. Эти уравнения позволяют давать наглядные геометрические интерпретации движению тела и привлекать для изучения движения тела методы нелинейной механики, развитые в динамике материальной точки. Так, движение тела в вышеуказанных потенциальных силовых полях сводится к изучению плоского движения под действием центральных сил двух невзаимодействующих материальных точек (начальные условия движения точек согласованы, силовые функции действующих на точки центральных сил выражены через силовую функцию заданного для твердого тела потенциального силового поля). Предложены новые дифференциальные уравнения возмущенного движения твердого тела в таких силовых полях, использующие в качестве медленных переменных величины, имеющие смысл первых интегралов уравнений движения двух указанных материальных точек для соответствующей невозмущенной задачи.

1. Уравнения движения. Рассмотрим динамически симметричное твердое тело, находящееся под действием произвольного внешнего момента M, полагая, что точка O подвеса тела неподвижна. Движение тела будем рассматривать относительно инерциальной системы координат $OX_1X_2X_3$ (X), ось OX_3 которой направим вдоль некоторого характерного (неизменного в инерциальном пространстве) направления (в частности, таким направлением может быть вертикаль). С телом жестко свяжем систему координат $OY_1Y_2Y_3$ (Y), направив оси OY_k по главным осям инерции тела для точки O. Примем, что ось OY_3 является осью динамической симметрии тела. Обозначим A, B, C – моменты инерции тела относительно осей OY_1, OY_2, OY_3 ($A = B$); p, q, r – проекции вектора абсолютной угловой скорости тела ω на оси OY_1, OY_2, OY_3; ψ, ϑ, φ – углы Эйлера (прецессии, нутации, собственного вращения), характеризующие положение тела в системе координат X. Уравнения движения тела в переменных p, q, r, ψ, ϑ, φ (уравнения Эйлера) имеют вид

$$Ap^{\bullet} + (C - A)qr = M_1, \quad Ag^{\bullet} + (A - C)pr = M_2, \quad Cr^{\bullet} = M_3 \tag{1.1}$$

$$\psi^{\bullet} = (1/\sin\vartheta)(p\sin\varphi + q\cos\varphi), \quad \vartheta^{\bullet} = p\cos\varphi - q\sin\varphi \tag{1.2}$$

$$\varphi^{\bullet} = r - ctg\vartheta(p\sin\varphi + q\cos\varphi)$$

где M_k – проекция вектора $\mathbf{M}$ на ось OY_k, верхняя точка означает дифференцирование по времени t.

Введем в качестве новых переменных параметры Родрига – Гамильтона (Эйлера) $s_j\,(j = \overline{0,\ 3})$ связанные с углами Эйлера соотношениями [2]:

$$s_0 = \cos(\vartheta/2)\cos((\psi + \varphi)/2), \quad s_3 = \cos(\vartheta/2)\sin((\psi + \varphi)/2)$$

$$\tag{1.3}$$

$$s_1 = \sin(\vartheta/2)\cos((\psi - \varphi)/2), \quad s_2 = \sin(\vartheta/2)\sin((\psi - \varphi)/2)$$

Из (1.3) следует, что

$$s_0^2 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1 \tag{1.4}$$

$$s_0^2 + s_3^2 = \cos^2(\vartheta/2) = (1/2)(1 + \cos\vartheta), \quad s_1^2 + s_2^2 = \sin^2(\vartheta/2) = (1/2)(1 - \cos\vartheta) \tag{1.5}$$

Углы Эйлера находятся через параметры s_j из формул [2]:

$$\mathrm{tg}\,\psi = -(s_1s_3 + s_0s_2)/(s_2s_3 - s_0s_1), \quad \mathrm{tg}\,\varphi = (s_1s_3 - s_0s_2)/(s_2s_3 + s_0s_1)$$

$$\cos\vartheta = s_0^2 + s_3^2 - s_1^2 - s_2^2 = 2(s_0^2 + s_3^2) - 1 = 1 - 2(s_1^2 + s_2^2) \tag{1.6}$$

а проекции угловой скорости p, q, r – по формулам [2]:

$$p = 2(-s_1s_0^{\bullet} + s_0s_1^{\bullet} + s_3s_2^{\bullet} - s_2s_3^{\bullet})$$

$$q = 2(-s_2s_0^{\bullet} - s_3s_1^{\bullet} + s_0s_2^{\bullet} + s_1s_3^{\bullet})$$

$$r = 2(-s_3s_0^{\bullet} + s_2s_1^{\bullet} - s_1s_2^{\bullet} + s_0s_3^{\bullet})$$

Из (1.5) и (1.6) видно, что косинус угла нутации ϑ выражается через переменные s_j дуальным образом: либо через переменные s_0, s_3, либо через переменные s_1, s_2. Это обстоятельство позволяет в ряде случаев (например, в случае Лагранжа) разделить движения по переменным s_0, s_3, и s_1, s_2.

Введем кватернион $\mathbf{s}$ ориентации твердого тела в системе координат X: $\mathbf{s} = s_0 + s_1\mathbf{i}_1 + s_2\mathbf{i}_2 + s_3\mathbf{i}_3$, где $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$– орты гиперкомплексного пространства (мнимые единицы Гамильтона) [9].

Уравнения движения твердого тела в переменных s_j в кватернионной записи имеют вид

$$\mathbf{s}^{\bullet\bullet} - ars^{\bullet} \circ \mathbf{i}_3 - \tfrac{1}{2}ar^{\bullet}\mathbf{s} \circ \mathbf{i}_3 + \tfrac{1}{4}(\omega^2 - 2ar^2)\mathbf{s} = \tfrac{1}{2}A^{-1}\mathbf{s} \circ \mathbf{M}_Y \qquad (1.7)$$

$$r^{\bullet} = M_3 / C \qquad (1.8)$$

$$r = 2(-s_3 s_0^{\bullet} + s_2 s_1^{\bullet} - s_1 s_2^{\bullet} + s_0 s_3^{\bullet}) \qquad (1.9)$$

$$\omega^2 = (p^2 + q^2 + r^2) = 4(s_0^{\bullet 2} + s_1^{\bullet 2} + s_2^{\bullet 2} + s_3^{\bullet 2})$$

Здесь и далее $a = (A - C)/A$, $\omega = |\boldsymbol{\omega}|$, $\mathbf{M}_Y = M_1\mathbf{i}_1 + M_2\mathbf{i}_2 + M_3\mathbf{i}_3$ – отображение главного момента внешних сил $\mathbf{M}$ на базис Y, знак $\circ$ означает кватернионное умножение, дифференцирование кватерниона выполняется в предположении неизменности ортов $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$.

Уравнение (1.7) – частный случай кватернионных уравнений движения динамически симметричных механических систем, полученных в [6].

В скалярной записи уравнения движения принимают вид

$$\begin{aligned}
&s_0^{\bullet\bullet} + ars_3^{\bullet} + \tfrac{1}{2}ar^{\bullet}s_3 + \tfrac{1}{4}(\omega^2 - 2ar^2)s_0 = \tfrac{1}{2}A^{-1}(-M_1 s_1 - M_2 s_2 - M_3 s_3)\\
&s_1^{\bullet\bullet} - ars_2^{\bullet} - \tfrac{1}{2}ar^{\bullet}s_2 + \tfrac{1}{4}(\omega^2 - 2ar^2)s_1 = \tfrac{1}{2}A^{-1}(M_1 s_0 - M_2 s_3 + M_3 s_2)\\
&s_2^{\bullet\bullet} + ars_1^{\bullet} + \tfrac{1}{2}ar^{\bullet}s_1 + \tfrac{1}{4}(\omega^2 - 2ar^2)s_2 = \tfrac{1}{2}A^{-1}(M_1 s_3 + M_2 s_0 - M_3 s_1)\\
&s_3^{\bullet\bullet} - ars_0^{\bullet} - \tfrac{1}{2}ar^{\bullet}s_0 + \tfrac{1}{4}(\omega^2 - 2ar^2)s_3 = \tfrac{1}{2}A^{-1}(-M_1 s_2 + M_2 s_1 + M_3 s_0)
\end{aligned} \qquad (1.10)$$

Уравнения (1.10), также как и уравнение (1.7), должны быть дополнены уравнением (1.8) и соотношениями (1.9), с помощью которых модуль вектора абсолютной угловой скорости тела и его проекция на ось динамической симметрии тела выражаются через параметры Родрига – Гамильтона s_j и их первые производные по времени $s_j^{\bullet}$.

Уравнения (1.10), (1.8), (1.9) образуют замкнутую систему четырех дифференциальных уравнений второго порядка, позволяющую находить неизвестные компоненты s_j кватерниона ориентации $\mathbf{s}$ по заданным проекциям M_k главного момента внешних сил и заданным начальным условиям движения $s_j(0)$, $s_j^{\bullet}(0)$, удовлетворяющим в силу (1.4) равенствам

$$s_0^2 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1, \quad s_0 s_0^{\bullet} + s_1 s_1^{\bullet} + s_2 s_2^{\bullet} + s_3 s_3^{\bullet} = 0 \qquad (1.11)$$

Отметим, что соотношения (1.11) являются первыми частными интегралами уравнений движения (1.10).

Величины $s_j(0)$ могут быть однозначно найдены через заданные начальные значения углов Эйлера по формулам (1.3), а $s_j^{\bullet}(0)$ – через $s_j(0)$ и $p(0)$, $q(0)$, $r(0)$ в соответствии с кватернионным кинематическим уравнением [9] $2\mathbf{s}^{\bullet} = \mathbf{s} \circ \boldsymbol{\omega}_Y$, $\boldsymbol{\omega}_Y = p\mathbf{i}_1 + q\mathbf{i}_2 + r\mathbf{i}_3$.

В случае, когда проекция M_3 зависит лишь от времени, величины r и $r^{\bullet}$ – известные функции времени (в силу уравнения (1.8)) и необходимость учета первого из равенств (1.9) отпадает. В частности, когда $M_3 = 0$, r = const, $r^{\bullet} = 0$ и уравнения (1.10) существенно упрощаются.

Уравнения движения тела в параметрах Родрига – Гамильтона (1.10) симметричны и не имеют особых точек в отличие от уравнений Эйлера (1.1), (1.2), вырождающихся при $\vartheta = 0$ (когда ось симметрии тела совпадает с неизменным направлением OX_3).

2. Преобразования вращения. Сложность уравнений (1.10) во многом обусловлена присутствием в них в явном виде проекции r угловой скорости тела на его ось динамической симметрии. Проекция r может быть исключена из левых частей уравнений движения тела с помощью преобразования вращения.

Рассмотрим преобразования вращения вокруг наиболее характерных для твердого тела направлений: неизменного направления OX_3 и оси симметрии тела. Для этого выполним замену переменной $\mathbf{s}$ на новую кватернионную переменную $\mathbf{z}$ по формулам

$$\mathbf{s} = \overline{\boldsymbol{\mu}}_1 \circ \mathbf{z} \circ \overline{\boldsymbol{\mu}}_2, \quad \mathbf{z} = \boldsymbol{\mu}_1 \circ \mathbf{s} \circ \boldsymbol{\mu}_2, \quad \mathbf{z} = z_0 + z_1\mathbf{i}_1 + z_2\mathbf{i}_2 + z_3\mathbf{i}_3 \tag{2.1}$$

$$\boldsymbol{\mu}_k = \cos(\varepsilon_k / 2) - \mathbf{i}_3 \sin(\varepsilon_k / 2) \quad (k = 1,\ 2)$$

где верхняя черта означает сопряженный кватернион.

Кватернион $\boldsymbol{\mu}_1$ задает вращение вокруг неизменного направления OX_3, а кватернион $\boldsymbol{\mu}_2$ – вокруг оси симметрии тела (ε_1 и ε_2 – углы поворотов вокруг этих осей). Переменные z_j связаны с углами Эйлера ψ, ϑ, φ равенствами

$$z_0 = \cos(\vartheta / 2)\cos((\varphi - \varepsilon_1 + \varphi - \varepsilon_2) / 2), \quad z_3 = \cos(\vartheta / 2)\sin((\varphi - \varepsilon_1 + \varphi - \varepsilon_2) / 2) \tag{2.2}$$

$$z_1 = \sin(\vartheta / 2)\cos((\varphi - \varepsilon_1 - \varphi + \varepsilon_2) / 2), \quad z_2 = \sin(\vartheta / 2)\sin((\varphi - \varepsilon_1 - \varphi + \varepsilon_2) / 2)$$

Кватернионное уравнение движения твердого тела в переменных z_j имеет вид

$$\begin{aligned}
&\mathbf{z}^{\bullet\bullet} + \varepsilon_1^\bullet \mathbf{i}_3 \circ \mathbf{z}^\bullet + (\varepsilon_2^\bullet - ar)\mathbf{z}^\bullet \circ \mathbf{i}_3 + \tfrac{1}{2}(\varepsilon_1^\bullet \varepsilon_2^\bullet - ar\varepsilon_1^\bullet)\mathbf{i}_3 \circ \mathbf{z} \circ \mathbf{i}_3 + \\
&+ \tfrac{1}{2}(\varepsilon_1^{\bullet\bullet} \mathbf{i}_3 \circ \mathbf{z} + (\varepsilon_2^{\bullet\bullet} - ar^{\bullet})\mathbf{z} \circ \mathbf{i}_3) + \\
&+ \tfrac{1}{4}(-(\varepsilon_1^{\bullet 2} + \varepsilon_2^{\bullet 2}) + 2ar\varepsilon_2^\bullet - 2ar^2 + \omega^2)\mathbf{z} = \tfrac{1}{2}A^{-1}\boldsymbol{\mu}_1 \circ \mathbf{s} \circ \mathbf{M}_Y \circ \boldsymbol{\mu}_2 = \\
&= \tfrac{1}{2}A^{-1}\mathbf{z} \circ \overline{\boldsymbol{\mu}}_2 \circ \mathbf{M}_Y \circ \boldsymbol{\mu}_2 = \tfrac{1}{2}A^{-1}\mathbf{z} \circ \mathbf{M}_Z = \tfrac{1}{2}A^{-1}\mathbf{M}_X \circ \mathbf{z}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

В скалярной записи имеем

$$\begin{aligned}
&z_0^{\bullet\bullet} + e_1 z_3^\bullet + \tfrac{1}{2}e_1^\bullet z_3 + \tfrac{1}{4}((L / A)^2 - e_1^2)z_0 = f_0 \\
&z_1^{\bullet\bullet} - e_2 z_2^\bullet - \tfrac{1}{2}e_2^\bullet z_2 + \tfrac{1}{4}((L / A)^2 - e_2^2)z_1 = f_1 \\
&z_2^{\bullet\bullet} + e_2 z_1^\bullet + \tfrac{1}{2}e_2^\bullet z_1 + \tfrac{1}{4}((L / A)^2 - e_2^2)z_2 = f_2 \\
&z_3^{\bullet\bullet} - e_1 z_0^\bullet - \tfrac{1}{2}e_1^\bullet z_0 + \tfrac{1}{4}((L / A)^2 - e_1^2)z_3 = f_3
\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$e_1 = ar - (\varepsilon_1^\bullet + \varepsilon_2^\bullet), \quad e_2 = ar + \varepsilon_1^\bullet - \varepsilon_2^\bullet \tag{2.5}$$

Здесь $f_j\ (j = \overline{0,\ 3})$ – компоненты кватерниона, стоящего в правой части уравнения (2.3), L – модуль кинетического момента тела, определяемый уравнениями

$$L^2 = A^2(p^2 + q^2) + C^2 r^2$$

$$dL^2 / dt = 2\mathbf{L} \cdot \mathbf{M} = 2(ApM_1 + AqM_2 + CrM_3) \tag{2.6}$$

Из (2.5) видно, что величина $\varepsilon_2^\bullet$ (угловая скорость преобразования вращения вокруг оси симметрии тела OY_3) входит в выражения для e_1, e_2 симметрично (с одинаковыми знаками), а величина $\varepsilon_1^\bullet$ (угловая скорость преобразования вращения вокруг неизменного направления OX_3) – антисимметрично (с противоположными знаками).

Дадим геометрическую интерпретацию замены переменной (2.1). Рассмотрим схему поворотов

$$X \xrightarrow{\mathbf{s},\ \boldsymbol{\omega}} Y \xrightarrow{\boldsymbol{\mu}_2,\ \varepsilon_2^\bullet} Y' \xrightarrow{\boldsymbol{\mu}_1,\ \varepsilon_1^\bullet} Z \sim X \xrightarrow{\mathbf{z},\ \boldsymbol{\Omega}} Z$$

Здесь Y' – трехгранник, вращающийся относительно Y вокруг оси симметрии тела OY_3(OY'_3 совпадает с OY_3) с угловой скоростью $\boldsymbol{\varepsilon}_2^{\bullet} = -\varepsilon_2^{\bullet}\mathbf{y}_3$; z – трехгранник, вращающийся относительно Y' вокруг неподвижной оси OX_3 с угловой скоростью $\boldsymbol{\varepsilon}_1^{\bullet} = -\varepsilon_1^{\bullet}\mathbf{x}_3$; $\boldsymbol{\Omega}$ – вектор абсолютной угловой скорости трехгранника z; $\boldsymbol{\mu}_2$; $\boldsymbol{\mu}_1$, $\mathbf{z}$ – кватернионы поворотов, характеризующие взаимные угловые положения систем координат Y' и Y, Z и Y', Z и X; $\mathbf{x}_k$ и $\mathbf{y}_k$ – единичные векторы координатных осей OX_k и OY_k.

Таким образом, переход к переменным z_j означает запись уравнений движения тела в системе координат $OZ_1Z_2Z_3(Z)$, вращающейся с абсолютной угловой скоростью

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\varepsilon}_2^{\bullet} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{\bullet} = \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\varepsilon}_2^{\bullet}\mathbf{y}_3 - \boldsymbol{\varepsilon}_1^{\bullet}\mathbf{x}_3$$

При этом (2.1) – формула сложения конечных поворотов, в которой кватернионы поворотов $\mathbf{s}$, $\boldsymbol{\mu}_2$, $\boldsymbol{\mu}_1$, $\mathbf{z}$ определены своими компонентами в системах координат $X(Y)$, $Y(Y')$, X, $X(Z)$ соответственно.

2.1. Рассмотрим случай одного преобразования вращения, когда $\varepsilon_1 = 0$ ($\boldsymbol{\mu}_1 = 1$). В этом случае

$$e_1 = e_2 = ar - \varepsilon_2^{\bullet} = e \tag{2.7}$$

и (2.4), (2.7) – уравнения движения твердого тела, записанные во вращающейся системе координат $OZ_1Z_2Z_3$, ось OZ_3 которой направлена вдоль оси симметрии тела (оси OY_3), а ее абсолютная угловая скорость

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega} - \varepsilon_2^{\bullet}\mathbf{y}_3 = p\mathbf{y}_1 + q\mathbf{y}_2 + (r - \varepsilon_2^{\bullet})\mathbf{y}_3$$

Уравнения движения тела (2.4) в кватернионной записи принимают вид

$$\mathbf{z}^{\bullet\bullet} - e\mathbf{z}^{\bullet} \circ \mathbf{i}_3 - \tfrac{1}{2}e^{\bullet}\mathbf{z} \circ \mathbf{i}_3 + \tfrac{1}{4}((L/A)^2 - e^2)\mathbf{z} = \tfrac{1}{2}A^{-1}\mathbf{z} \circ \overline{\boldsymbol{\mu}}_2 \circ \mathbf{M}_Y \circ \boldsymbol{\mu}_2 =$$

$$= \tfrac{1}{2}A^{-1}\mathbf{z} \circ \mathbf{M}_Z = \tfrac{1}{2}A^{-1}\mathbf{M}_X \circ \mathbf{z} \tag{2.8}$$

Переменные z_j в этом случае имеют смысл параметров Родрига – Гамильтона, характеризующих собой ориентацию системы координат Z, а, следовательно, и оси симметрии тела в системе координат X.

Рассмотрим следующие случаи выбора вращающейся системы координат Z.

2.1.1. Z-неголономный трехгранник (азимутально свободный трехгранник). Этот трехгранник часто используется при изучении движения симметричного твердого тела.

Положим $\varepsilon_2^{\bullet} = r$. Тогда

$$e = -H/A, \quad H = Cr, \quad \Omega_3 = r - \varepsilon_2^{\bullet} = 0, \quad \boldsymbol{\Omega} = p\mathbf{y}_1 + q\mathbf{y}_2$$

где Ω_3 – проекция вектора Ω на ось симметрии тела.

Уравнения движения твердого тела (2.8) принимают вид

$$\mathbf{z}^{\bullet\bullet} + \frac{H}{A}\mathbf{z}^{\bullet} \circ \mathbf{i}_3 + \frac{H^{\bullet}}{2A}\mathbf{z} \circ \mathbf{i}_3 + \tfrac{1}{4}\left(\left(\frac{L}{A}\right)^2 - \left(\frac{H}{A}\right)^2\right)\mathbf{z} = \frac{1}{2A}\mathbf{M}_X \circ \mathbf{z} \tag{2.9}$$

$$H^{\bullet} = M_3, \quad H = Cr \tag{2.10}$$

$$\tfrac{1}{4}\left(\left(\frac{L}{A}\right)^2 - \left(\frac{H}{A}\right)^2\right) = \tfrac{1}{4}(p^2 + q^2) = \tfrac{1}{4}\Omega^2 = z_0^{\bullet 2} + z_1^{\bullet 2} + z_2^{\bullet 2} + z_3^{\bullet 2} \tag{2.11}$$

$$\mathbf{M}_X \circ \mathbf{z} = \mathbf{z} \circ \mathbf{M}_Z = \mathbf{z} \circ \overline{\boldsymbol{\mu}} \circ \mathbf{M}_Y \circ \boldsymbol{\mu}$$

$$\mathbf{s} = \mathbf{z} \circ \overline{\boldsymbol{\mu}}, \quad \boldsymbol{\mu} = \cos(\varepsilon/2) - \mathbf{i}_3 \sin(\varepsilon/2), \quad \varepsilon^{\bullet} = r = H/C, \quad \varepsilon = \varepsilon_2$$

Здесь H – проекция кинетического момента тела на его ось симметрии; $\mathbf{M}_X, \mathbf{M}_Z$ – отображения главного момента внешних сил на базисы X, Z: $\mathbf{M}_x = M_1^*\mathbf{i}_1 + M_2^*\mathbf{i}_2 + M_3^*\mathbf{i}_3$, $\mathbf{M}_z = M_1'\mathbf{i}_1 + M_2'\mathbf{i}_2 + M_3'\mathbf{i}_3$, где M_k^*, M_k' – проекции момента $\mathbf{M}$ на оси OX_k и OZ_k.

Уравнение (2.9) можно записать в другом виде:

$$\mathbf{z}^{\bullet\bullet} + \frac{H}{A}\mathbf{z}^{\bullet} \circ \mathbf{i}_3 + \tfrac{1}{4}\left(\left(\frac{L}{A}\right)^2 - \left(\frac{H}{A}\right)^2\right)\mathbf{z} = \frac{1}{2A}\mathbf{M}_{nx} \circ \mathbf{z}$$

$$\mathbf{M}_{nX} \circ \mathbf{z} = \mathbf{z} \circ \mathbf{M}_{nZ} = \mathbf{z} \circ \overline{\boldsymbol{\mu}} \circ \mathbf{M}_{nY} \circ \boldsymbol{\mu}, \quad \mathbf{M}_{nY} = M_1\mathbf{i}_1 + M_2\mathbf{i}_2, \tag{2.12}$$

где $\mathbf{M}_n$ – составляющая момента внешних сил, перпендикулярная оси симметрии тела.

В скалярной записи вместо (2.9) или (2.12) имеем

$$z_0^{\bullet\bullet} - \frac{H}{A}z_3^{\bullet} + \tfrac{1}{4}\Omega^2 z_0 = -\frac{1}{2A}(M_1'z_1 + M_2'z_2)$$

$$z_1^{\bullet\bullet} + \frac{H}{A}z_2^{\bullet} + \tfrac{1}{4}\Omega^2 z_1 = \frac{1}{2A}(M_1'z_0 - M_2'z_3)$$

$$z_2^{\bullet\bullet} - \frac{H}{A}z_1^{\bullet} + \tfrac{1}{4}\Omega^2 z_2 = \frac{1}{2A}(M_1'z_3 + M_2'z_0)$$

$$z_3^{\bullet\bullet} + \frac{H}{A}z_0^{\bullet} + \tfrac{1}{4}\Omega^2 z_3 = -\frac{1}{2A}(M_1'z_2 - M_2'z_1)$$

$$M_1' = M_1\cos\varepsilon - M_2\sin\varepsilon, \quad M_2' = M_2\cos\varepsilon + M_1\sin\varepsilon$$

Уравнения (2.9), (2.10) помимо первых частных интегралов вида (1.11):

$$z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 1, \quad z_0 z_0^{\bullet} + z_1 z_1^{\bullet} + z_2 z_2^{\bullet} + z_3 z_3^{\bullet} = 0 \tag{2.13}$$

имеют первый частный интеграл

$$\tfrac{1}{2}\Omega_3 = -z_3 z_0^{\bullet} + z_2 z_1^{\bullet} - z_1 z_2^{\bullet} + z_0 z_3^{\bullet} = 0 \tag{2.14}$$

который является уравнением неголономной связи, наложенной на трехгранник Z.

Уравнения (2.12), (2.10), (2.11) в невырождающихся переменных z_j позволяют давать наглядную геометрическую интерпретацию движения оси симметрии тела и в этом смысле близки с уравнениями движения симметричного твердого тела, полученными в [3, 14]. Отметим, что уравнения, полученные в [3, 14], записаны (с использованием неголономного трехгранника Z) в невырождающихся переменных, имеющих смысл проекций единичного вектора, направленного по оси симметрии тела, на оси инерциальной системы координат. Эти уравнения облегчают применение асимптотических методов и упрощают геометрическую интерпретацию движения [3]. Вместе с тем они имеют и недостатки: кососимметрическая матрица коэффициентов при старших (вторых) производных от искомых переменных в этих уравнениях движения имеет размерность 3×3 и, следовательно, является особой, что затрудняет разрешение уравнений относительно старших производных. К тому же, в общем случае (когда необходимо найти угловое положение тела полностью, а не только его оси симметрии) эти уравнения необходимо дополнять кинематическими уравнениями Пуассона, что приводит к повышению размерности системы уравнений движения. Ураавнения движения твердого тела (2.12) в параметрах Родрига – Гамильтона z_j, характеризующих ориентацию оси симметрии тела в инерциальной системе координат, этих недостатков не имеют.

2.1.2. Z-трехгранник, вращающийся с абсолютной угловой скоростью Ω, *коллинеарной кинетическому моменту тела* $\mathbf{L}$. Положим

$$\varepsilon_2^\bullet = ar = [(A-C)/A]r \tag{2.15}$$

Тогда

$$e=0,\ \ \Omega_3=(C/A)\,r=H/A,\ \ \Omega=\mathbf{L}/A \tag{2.16}$$

Уравнения движения твердого тела, получающиеся из (2.3) с учетом (2.7), (2.15), (2.16), имеют вид

$$\mathbf{z}^{\bullet\bullet}+\left(\frac{L}{2A}\right)^2\mathbf{z}=\frac{1}{2A}\mathbf{M}_X\circ\mathbf{z} \tag{2.17}$$

$$(L/(2A))^2=(1/4)\Omega^2=z_0^{\bullet 2}+z_1^{\bullet 2}+z_2^{\bullet 2}+z_3^{\bullet 2} \tag{2.18}$$

$$\mathbf{M}_X\circ\mathbf{z}=\mathbf{z}\circ\mathbf{M}_Z=\mathbf{z}\circ\overline{\boldsymbol{\mu}}\circ\mathbf{M}_Y\circ\boldsymbol{\mu} \tag{2.19}$$

$$\mathbf{s}=\mathbf{z}\circ\overline{\boldsymbol{\mu}},\ \ \boldsymbol{\mu}=\cos(\varepsilon/2)-\mathbf{i}_3\sin(\varepsilon/2),\ \ \varepsilon=\varepsilon_2 \tag{2.20}$$

$$\varepsilon^\bullet=((A-C)/C)\Omega_3=(2(A-C)/C)(-z_3z_0^\bullet+z_2z_1^\bullet-z_1z_2^\bullet+z_0z_3^\bullet) \tag{2.21}$$

Уравнения (2.17)–(2.21) – частный случай уравнений, полученных в [6, 7]. Такого рода уравнения были использованы в [8] для изучения движения тяжелого симметричного твердого тела с подвижной точкой подвеса.

Кватернионное уравнение движения твердого тела (2.17) эквивалентно системе из четырех дифференциальных уравнений второго порядка относительно параметров Родрига – Гамильтона $z_j\ (j=\overline{0,3})$, имеющей вид

$$\begin{aligned}
&z_0^{\bullet\bullet}+\left(\frac{L}{2A}\right)^2 z_0=-\frac{1}{2A}(M_1^*z_1+M_2^*z_2+M_3^*z_3)=-\frac{1}{2A}(M_1'z_1+M_2'z_2+M_3'z_3)\\
&z_1^{\bullet\bullet}+\left(\frac{L}{2A}\right)^2 z_1=\frac{1}{2A}(M_1^*z_0+M_2^*z_3-M_3^*z_2)=\frac{1}{2A}(M_1'z_0-M_2'z_3+M_3'z_2)\\
&z_2^{\bullet\bullet}+\left(\frac{L}{2A}\right)^2 z_2=\frac{1}{2A}(-M_1^*z_3+M_2^*z_0+M_3^*z_1)=\frac{1}{2A}(M_1'z_3+M_2'z_0-M_3'z_1)\\
&z_3^{\bullet\bullet}+\left(\frac{L}{2A}\right)^2 z_3=\frac{1}{2A}(M_1^*z_2-M_2^*z_1+M_3^*z_0)=\frac{1}{2A}(M_1'z_2+M_2'z_1+M_3'z_0)\\
&M_1'=M_1\cos\varepsilon-M_2\sin\varepsilon,\ \ M_2'=M_2\cos\varepsilon+M_1\sin\varepsilon,\ \ M_3'=M_3
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Соотношения (2.19), (2.20) вместе с дифференциальным уравнением (2.21) служат для пересчета проекций моментов внешних сил от осей системы координат Y, связанной с телом, к осям системы координат Z. Необходимость в этом пересчете отпадает, если эти моменты заданы в инерциальной системе координат X. Первое соотношение (2.20) служит для нахождения параметров s_j, характеризующих ориентацию твердого тела в системе координат X, через параметры z_j, характеризующие ориентацию оси симметрии тела в этой же системе координат.

Укажем простой вывод уравнения (2.17). Используя равенство $\mathbf{L}=A\boldsymbol{\Omega}$, теорему об изменении кинетического момента твердого тела: $\mathbf{L}^\bullet=\mathbf{M}$, кватернионное кинематическое уравнение движения трехгранника Z: $2\mathbf{z}^\bullet=\boldsymbol{\Omega}_x\circ\mathbf{z}$, получим следующую нормальную форму уравнений движения твердого тела в переменных $\mathbf{L}_X$, $\mathbf{z}$:

$$\mathbf{L}_X^{\bullet}=\mathbf{M}_X,\ \ \mathbf{z}^{\bullet}=(1/(2A))\mathbf{L}_X\circ\mathbf{z},\ \ \mathbf{L}_X=L_1^*\mathbf{i}_1+L_2^*\mathbf{i}_2+L_3^*\mathbf{i}_3 \qquad (2.23)$$

где L_k^* – проекция кинетического момента тела на ось OX_k.

Дифференцируя второе уравнение (2.23) по времени и используя первое уравнение этой системы, приходим к осцилляторному уравнению (2.17).

При выводе уравнения (2.17) могут быть также использованы уравнения, описывающие изменение вектора $\mathbf{L}$ в системе координат Z. Так как локальная производная от вектора $\mathbf{L}$ в базисе Z равна абсолютной производной от этого вектора (в базисе X), то эти уравнения имеют вид, аналогичный (2.23):

$$\mathbf{L}_Z^{\bullet}=\mathbf{M}_Z,\ \ \mathbf{z}^{\bullet}=(1/(2A))\mathbf{z}\circ\mathbf{L}_Z,\ \ \mathbf{L}_Z=L_1'\mathbf{i}_1+L_2'\mathbf{i}_2+L_3'\mathbf{i}_3 \qquad (2.24)$$

где L_k' – проекция вектора L на ось OZ_k.

Дифференцирование второго уравнения (2.24) по времени и учет первого уравнения этой системы приводит опять к уравнению (2.17).

Отметим, что вместо дифференциального уравнения (2.21) могут быть использованы уравнения $\varepsilon^{\bullet}=((A-C)/A)r,\ r^{\bullet}=M_3/C$, а вместо соотношения (2.18) – дифференциальное уравнение

$$d\Omega^2/dt=(2/A)\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{M} \qquad (2.25)$$

являющееся следствием уравнения (2.6) и равенства $\mathbf{L}=A\mathbf{\Omega}$. Для нахождения правой части уравнения (2.25) могут быть использованы как проекции вектора $\mathbf{\Omega}$ на базис X, так и его проекции на базис Z, определяемые соотношениями

$$\mathbf{\Omega}_x=\Omega_1^*\mathbf{i}_1+\Omega_2^*\mathbf{i}_2+\Omega_3^*\mathbf{i}_3=2\mathbf{z}^{\bullet}\circ\bar{\mathbf{z}},\ \ \mathbf{\Omega}_z=\Omega_1\mathbf{i}_1+\Omega_2\mathbf{i}_2+\Omega_3\mathbf{i}_3=2\bar{\mathbf{z}}\circ\mathbf{z}^{\bullet}$$

Уравнение (2.17), в отличие от (2.9), не содержит в своей левой части проекции r абсолютной угловой скорости тела. Это уравнение, как и уравнение (2.9), имеет первые частные интегралы (2.13), однако, в отличие от (2.9), не имеет первого частного интеграла (2.14).

При использовании в качестве независимой переменной безразмерного времени τ, связанного со временем t дифференциальным соотношением $d\tau=(L/A)dt$, уравнение (2.17) заменяется уравнениями

$$\frac{d^2\mathbf{z}}{d\tau^2}+\tfrac{1}{4}\mathbf{z}=\frac{1}{2L^2}\left(-\frac{dL^2}{d\tau}\frac{d\mathbf{z}}{d\tau}+A\mathbf{M}_X\circ\mathbf{z}\right) \qquad (2.26)$$

$$\frac{dL^2}{d\tau}=-4A\,\mathrm{scal}\left(\frac{d\mathbf{z}}{d\tau}\circ\bar{\mathbf{z}}\circ\mathbf{M}_X\right)=4A\,\mathrm{scal}\left(\frac{d\bar{\mathbf{z}}}{d\tau}\circ\mathbf{M}_X\circ\mathbf{z}\right)$$

$$dt/d\tau=A/L$$

где scal (•) – скалярная часть кватерниона (•).

2.2. Рассмотрим случай двух преобразований вращения, когда

$$\varepsilon_2^{\bullet}=ar \qquad (2.27)$$

В этом случае

$$e_1=-\varepsilon_1^{\bullet}=e,\ \ e_2=\varepsilon_1^{\bullet}=-e_1=-e \qquad (2.28)$$

Трехгранник Z вращается с абсолютной угловой скоростью

$$\mathbf{\Omega}=\mathbf{L}/A-\varepsilon_1^{\bullet}\mathbf{x}_3=\mathbf{L}/A+e\mathbf{x}_3$$

Уравнения (2.4) принимают вид

$$z_0^{\bullet\bullet} + e z_3^{\bullet} + \tfrac{1}{2} e^{\bullet} z_3 + \tfrac{1}{4}((L/A)^2 - e^2) z_0 = f_0$$
$$z_1^{\bullet\bullet} + e z_2^{\bullet} + \tfrac{1}{2} e^{\bullet} z_2 + \tfrac{1}{4}((L/A)^2 - e^2) z_1 = f_1$$
$$z_2^{\bullet\bullet} - e z_1^{\bullet} - \tfrac{1}{2} e^{\bullet} z_1 + \tfrac{1}{4}((L/A)^2 - e^2) z_2 = f_2 \qquad (2.29)$$
$$z_3^{\bullet\bullet} - e z_0^{\bullet} - \tfrac{1}{2} e^{\bullet} z_0 + \tfrac{1}{4}((L/A)^2 - e^2) z_3 = f_3$$

где f_j – компоненты кватерниона, стоящего в правой части уравнения (2.3).

В кватернионной записи имеем

$$\mathbf{z}^{\bullet\bullet} - e\mathbf{i}_3 \circ \mathbf{z}^{\bullet} - \tfrac{1}{2} e^{\bullet} \mathbf{i}_3 \circ \mathbf{z} + \tfrac{1}{4}\left(\left(\frac{L}{A}\right)^2 - e^2\right)\mathbf{z} = \frac{1}{2A}\mathbf{M}_X \circ \mathbf{z} \qquad (2.30)$$

Связь новой переменной $\mathbf{z}$ с $\mathbf{s}$ определяется соотношениями (2.1), фигурирующие в них величины ε_2 и ε_1, определяются равенствами (2.27) и (2.28).

Величина $e = -\varepsilon_1^{\bullet}$, фигурирующая в уравнениях (2.29) и (2.30), является произвольно задаваемым параметром. Рассмотрим случай, когда трехгранник Z вращается относительно Y' вокруг оси OX_3 с угловой скоростью, пропорциональной проекции вектора кинетического момента тела на эту ось $e = -\varepsilon_1^{\bullet} = -L_3^* / A$. В этом случае

$$\mathbf{\Omega} = (L_1^* \mathbf{x}_1 + L_2^* \mathbf{x}_2)/A, \quad \Omega_3^* = 0, \quad -e^{\bullet} = \varepsilon_1^{\bullet\bullet} = L_3^{*\bullet}/A = M_3^*/A$$

и уравнение (2.30) принимает вид

$$\mathbf{z}^{\bullet\bullet} - (L_3^*/A)\mathbf{i}_3 \circ \mathbf{z}^{\bullet} + \tfrac{1}{4}((L/A)^2 - (L_3^*/A)^2)\mathbf{z} = \frac{1}{2A}\mathbf{M}_{nx}^* \circ \mathbf{z} \qquad (2.31)$$

$$L_3^{*\bullet} = M_3^*, \ \mathbf{M}_{nx}^* = M_1^* \mathbf{i}_1 + M_2^* \mathbf{i}_2$$

$$\tfrac{1}{4}\left(\left(\frac{L}{A}\right)^2 - \left(\frac{L_3^*}{A}\right)^2\right) = \tfrac{1}{4}\Omega^2 = z_0^{\bullet 2} + z_1^{\bullet 2} + z_2^{\bullet 2} + z_3^{\bullet 2}$$

Уравнение (2.31) имеет ту же структуру, что и уравнение (2.12), однако в нем присутствует не проекция вектора кинетического момента тела на ось симметрии тела, а его проекция на неизменное направление OX_3. Это уравнение удобно использовать в случаях, когда момент внешних сил $\mathbf{M}$ задан в инерциальной системе координат X.

2.3. Укажем преобразования вращения, с помощью которых в уравнения движения твердого тела одновременно могут быть введены проекции вектора кинетического момента тела на его ось симметрии и на выбранное неизменное направление OX_3 (например, вертикаль):

$$\varepsilon_1^{\bullet} = L_3^*/A, \ \ \varepsilon_2^{\bullet} = ar + L_3/A = ar + H/A, \ \ \mathbf{\Omega} = (\mathbf{L} - L_3\mathbf{y}_3 - L_3^*\mathbf{x}_3)/A$$

$$e_1 = -(L_3^* + L_3)/A, \ \ e_2 = (L_3^* - L_3)/A$$

Таким образом, величины $-e_1$ и e_2, фигурирующие в уравнениях движения тела (2.4), пропорциональны в этом случае сумме и разности проекций кинетического момента тела L_3^* и L_3. Как будет показано ниже, эти величины связаны с переменными c_1 и c_2, используемыми при записи уравнений движения тела в полярных координатах соотношениями $e_1 = -4c_1$, $e_2 = 4c_2$.

Итак, с помощью преобразований вращения, совершаемых вокруг оси симметрии тела и неподвижной оси, в кватернионные уравнения движения твердого тела удобным образом вводятся такие энергетические характеристики тела, как модуль вектора кинетического момента тела, проекции этого вектора на эти оси, их линейные комбинации. В частных случаях движения тела эти величины оказываются непосредственно связанными с основными частотами колебаний тела.

3. Частные случаи движения тела. Рассмотрим некоторые случаи, в которых удобно использование полученных уравнений.

3.1. Движение тела по инерции $\mathbf{M} = 0$. В этом случае $\mathbf{L} = \text{const}$ и уравнения (2.17), (2.26) принимают соответственно вид

$$\mathbf{z}^{\cdot\cdot} + (L/(2A))^2 \mathbf{z} = 0, \quad L = \text{const} \tag{3.1}$$

$$d^2\mathbf{z}/d\tau^2 + (1/4)\mathbf{z} = 0, \quad \tau = (L/A)(t - t_0), \quad L = \text{const} \tag{3.2}$$

Как видно из (3.1), (3.2), движение тела по инерции в переменных z_j эквивалентно движению одночастотного четырехмерного гармонического осциллятора. Частота колебаний осциллятора во времени t, равная $L/(2A)$, зависит в соответствии с (2.6) (или (2.18)) от начальных условий движения тела по угловой скорости и пропорциональна модулю кинетического момента тела, а частота колебаний осциллятора в безразмерном времени τ не зависит от начальных условий движения и равна 1/2.

Очевидно, что уравнения (2.17)–(2.21) или (2.26) удобны для изучения возмущенного (по отношению к случаю 3.1) движения тела, когда момент внешних сил $\mathbf{M}$ пропорционален малому параметру. Исследование этого движения может быть проведено с помощью уравнений движения тела в кватернионных медленно меняющихся переменных [8], получающихся из (2.26) методом вариации произвольных постоянных.

Замечание. В случае движения тела по инерции переменные ε и τ имеют ясный кинематический смысл. Направляя ось OX_3 инерциальной системы координат в этом случае вдоль неизменного вектора кинетического момента L, имеем: $\varepsilon^{\cdot} = ((A - C)/A)r = \varphi^{\cdot} = \text{const}$ – угловая скорость собственного вращения тела, $\tau^{\cdot} = L/A = \psi^{\cdot} = \text{const}$ – угловая скорость прецессии тела.

3.2. Момент внешних сил перпендикулярен кинетическому моменту тела $\mathbf{M} \perp \mathbf{L}$. В этом случае, как следует из (2.6), $L^2 = \text{const}$ и левая часть уравнения (2.17) линейна относительно переменных z_j, а уравнения (2.26) принимают вид

$$\frac{d\mathbf{z}}{d\tau^2} + \tfrac{1}{4}\mathbf{z} = \frac{A}{2L^2}\mathbf{M}_X \circ \mathbf{z}, \qquad \tau = \frac{L}{A}(t - t_0), \qquad L = \text{const}$$

Отметим, что в рассматриваемом случае в силу равенства $\mathbf{L} = A\boldsymbol{\Omega}$ момент $\mathbf{M}$ может быть представлен в виде $\mathbf{M} = k\mathbf{D} \times \boldsymbol{\Omega}$, где k – коэффициент пропорциональности, $\mathbf{D}$ – некоторый известный вектор. Поэтому кватернион, определяющий правую часть уравнения (2.17), принимает вид $\mathbf{M}_x \circ \mathbf{z} = k(\mathbf{D}_x \circ \mathbf{z}^{\cdot} - \mathbf{z}^{\cdot} \circ \mathbf{D}_z)$, где $\mathbf{D}_x$ и $\mathbf{D}_z$ – отображения вектора $\mathbf{D}$ на базисы X и Z.

3.3. Момент внешних сил параллелен кинетическому моменту тела: $\mathbf{M} \parallel \mathbf{L}$. В этом случае $\mathbf{M} = k\mathbf{L}$, где k – коэффициент пропорциональности (в общем случае переменный).

Уравнения (2.17) и (2.6) принимают вид

$$\mathbf{z}^{\cdot\cdot} - k\mathbf{z}^{\cdot} + (L/(2A))^2 \mathbf{z} = 0, \quad dL^2/dt = 2kL^2 \quad (dL/dt = kL)$$

а уравнения (2.26) – вид

$$d^2\mathbf{z}/d\tau^2 + (1/4)\mathbf{z} = 0, \quad dL/d\tau = Ak, \quad dt/d\tau = A/L$$

Таким образом, движение тела в переменных z_j во "времени" τ в случае $\mathbf{M} \parallel \mathbf{L}$ эквивалентно, как и в случае движения тела по инерции, движению четырехмерного одночастотного гармонического осциллятора. Однако независимая переменная τ в случае $\mathbf{M} \parallel \mathbf{L}$ связана со временем t более сложно, чем в случае $\mathbf{M} = 0$.

Случай *3.3* интересен также с точки зрения управления движением твердого тела. Известно, что оптимальный в смысле быстродействия пространственный разворот динамически симметричного тела может быть выполнен за счет приложения к нему управляющего момента, параллельного кинетическому моменту тела. Уравнения движения тела в переменных z_j для этого случая интегрируются легко, решение представляется в виде, удобном для построения алгоритмов управления.

3.4. Движение тела в однородном поле сил тяжести. В этом случае, направляя ось OX_3 вдоль вертикали вверх, имеем:

$$\mathbf{M} = \mathbf{l} \times \mathbf{P} = P\mathbf{x}_3 \times \mathbf{l}, \quad P = |\mathbf{P}|$$

где $\mathbf{P}$ – сила тяжести, $\mathbf{l}$ – радиус-вектор центра тяжести тела, проведенный из точки O подвеса тела.

Обозначим через $\gamma_k, l_k (k = 1, 2, 3)$ проекции векторов $\mathbf{x}_3$ и $\mathbf{l}$ на оси системы координат Y. Тогда

$$M_1 = P(l_3\gamma_2 - l_2\gamma_3), \quad M_2 = P(l_1\gamma_3 - l_3\gamma_1), \quad M_3 = P(l_2\gamma_1 - l_1\gamma_2)$$

$$\gamma_1 = \sin\vartheta \sin\varphi = 2(s_1 s_3 - s_0 s_2)$$

$$\gamma_2 = \sin\vartheta \cos\varphi = 2(s_0 s_1 + s_2 s_3) \tag{3.3}$$

$$\gamma_3 = \cos\vartheta = 2(s_0^2 + s_3^2) - 1 = 1 - 2(s_1^2 + s_2^2)$$

Кватернион $\mathbf{s} \circ \mathbf{M}_y$, стоящий в правой части уравнения (1.7), принимает вид:

$$\mathbf{s} \circ \mathbf{M}_y = P\mathbf{i}_3 \circ \mathbf{s} \circ \mathbf{l}_y + \Pi \mathbf{s}$$

$$\mathbf{l}_y = l_1\mathbf{i}_1 + l_2\mathbf{i}_2 + l_3\mathbf{i}_3, \quad \Pi = P\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{l} = P(l_1\gamma_1 + l_2\gamma_2 + l_3\gamma_3)$$

Здесь $\mathbf{l}_y$ – отображение вектора $\mathbf{l}$ на базис Y, Π – потенциальная энергия твердого тела.

В случае Лагранжа

$$l_1 = l_2 = 0, \quad l_3 \neq 0$$

$$M_1 = Pl_3\gamma_2, \quad M_2 = -Pl_3\gamma_1, \quad M_3 = 0, \quad \Pi = Pl_3\gamma_3$$

$$\mathbf{s} \circ \mathbf{M}_y = Pl_3(\mathbf{i}_3 \circ \mathbf{s} \circ \mathbf{i}_3 + \gamma_3 \mathbf{s}) = Pl_3[(\gamma_3 - 1)s_0 + (\gamma_3 + 1)s_1\mathbf{i}_1 +$$
$$+ (\gamma_3 + 1)s_2\mathbf{i}_2 + (\gamma_3 - 1)s_3\mathbf{i}_3]$$

$$\mathbf{M}_x \circ \mathbf{z} = Pl_3(\mathbf{i}_3 \circ \mathbf{z} \circ \mathbf{i}_3 + \gamma_3 \mathbf{z}) = Pl_3[(\gamma_3 - 1)z_0 + (\gamma_3 + 1)z_1\mathbf{i}_1 +$$
$$+ (\gamma_3 + 1)z_2\mathbf{i}_2 + (\gamma_3 - 1)z_3\mathbf{i}_3]$$

$$\gamma_3 = \cos\vartheta = 2(z_0^2 + z_3^2) - 1 = 1 - 2(z_1^2 + z_2^2) \tag{3.4}$$

Уравнения движения тела (1.10) и (2.22) принимают вид (3.5) и (3.6):

$$s_0^{\bullet\bullet} + ars_3^{\bullet} + bs_0 = 0, \quad s_3^{\bullet\bullet} - ars_0^{\bullet} + bs_3 = 0 \tag{3.5}$$

$$s_1^{\bullet\bullet} - ars_2^{\bullet} + (b - n)s_1 = 0, \quad s_2^{\bullet\bullet} + ars_1^{\bullet} + (b - n)s_2 = 0$$

$$b = [\omega^2 - 2ar^2 + 2n(1 - \gamma_3)] / 4$$

$$z_i^{\bullet\bullet} + dz_i = 0 \quad (i = 0, 3)$$

$$\ddot{z}_k + (d-n)z_k = 0 \quad (k=1,2) \tag{3.6}$$

$$d = [(L/A)^2 + 2n(1-\gamma_3)]/4$$

$$r = \cos nt, \quad a = (A-C)/A, \quad n = Pl_3/A$$

Используя интеграл энергии $h: A(p^2+q^2)+Cr^2+2Pl_3\gamma_3 = 2h = \text{const}$, получаем следующие выражения для b и d через h и γ_3:

$$b = [2h-(A-C)r^2+2Pl_3(1-2\gamma_3)]/4, \quad d = b + a(A-C)r^2/4 \tag{3.7}$$

Из дуальных представлений направляющего косинуса γ_3 (3.3) и (3.4) и из выражений (3.7) следует, что в случае Лагранжа уравнения движения тела в переменных s_j (3.5) и в переменных z_j (3.6) распадаются на две независимые подсистемы для переменных s_0, s_3 (z_0, z_3) и $s_1, s_2, (z_1, z_2)$, т.е. имеет место строгое разделение движений тела по этим переменным (заметим, однако, что в силу соотношений (1.11) и (2.13) начальные условия по этим переменным должны быть согласованы). Аналогичное разделение движений имеет место и в более общем случае движения тела в потенциальном силовом поле, силовая функция которого – произвольная дифференцируемая функция косинуса угла нутации (переменной γ_3).

В случае Ковалевской

$$A = 2C, \; l_1 \neq 0, \; l_2 = l_3 = 0$$

$$M_1 = 0, \; M_2 = Pl_1\gamma_3, \; M_3 = -Pl_1\gamma_2, \; \Pi = Pl_1\gamma_1$$

$$\mathbf{s} \circ \mathbf{M}_y = Pl_1(\mathbf{i}_3 \circ \mathbf{s} \circ \mathbf{i}_1 + \gamma_1 \mathbf{s}) = Pl_1[(s_2+\gamma_1 s_0) + (-s_3+\gamma_1 s_1)\mathbf{i}_1 + \tag{3.8}$$

$$+(s_0+\gamma_1 s_2)\mathbf{i}_2 + (-s_1+\gamma_1 s_3)\mathbf{i}_3]$$

Уравнения движения тела в переменных s_j в этом случае получаются из (1.7)–(1.9) при учете равенств (3.8), (3.3). В отличие от случая Лагранжа, в случае Ковалевской учет интеграла энергии не приводит к разделению движений тела по переменным s_0, s_3 и s_1, s_2.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-01-17479; 96-01-01251).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кошляков В.Н.* Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов. М.: Наука, 1985. 344 с.
2. *Кошляков В.Н.* Параметры Родрига – Гамильтона и их приложения в механике твердого тела. Киев: Тр. Ин-та мат. НАН Украины. 1994. Т. 9. 176 с.
3. *Журавлев В.Ф.* Об одной форме уравнений движения симметричного твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ.1986. № 3. С. 5–11.
4. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
5. *Челноков Ю.Н.* Об уравнениях движения гиромаятниковых систем в параметрах Родрига – Гамильтона // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 2. С. 20–29.
6. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные методы в задачах относительного движения динамически симметричных материальных систем. Ч. I, II // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 6. С. 30–37; 1987. № 1. С. 23–31.
7. *Челноков Ю.Н.* Об осцилляторном и ротационном движениях одного класса механических систем // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 1. С. 28–35.
8. *Челноков Ю.Н.* О движении тяжелого симметричного твердого тела с подвижной точкой подвеса // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 4. С. 3–10.
9. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.

10. *Stiefel E.L., Scheifele G.* Linear and regular celestial mechanics. Berlin: Springer, 1971. 301 p.
11. *Челноков Ю.Н.* К регуляризации уравнений пространственной задачи двух тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 6. С. 12–21.
12. *Челноков Ю.Н.* О регулярных уравнениях пространственной задачи двух тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 1. С. 151–158.
13. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация и стабилизация возмущенного центрального движения. Ч. 1, 2 // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 1. С. 20–30; № 2. С. 3–11.
14. *Парс Л.А.* Аналитическая динамика. М.: Наука, 1971. 635 с.

Саратов

Поступила в редакцию
15.IX.1996