

УДК 531.383

© 1997 г. В.Ф. ЖУРАВЛЕВ

УПРАВЛЯЕМЫЙ МАЯТНИК ФУКО КАК МОДЕЛЬ ОДНОГО КЛАССА СВОБОДНЫХ ГИРОСКОПОВ

Излагаются основные принципы управления двухстепенным маятником, обеспечивающие выделение инерциальной информации гарантированной точности.

Приведены уравнения, позволяющие решать задачу идентификации дефектов (калибровочные уравнения).

1. Обобщенный маятник Фуко. В 1851 году Фуко [1] описал эксперимент, позволяющий, по его мнению, измерить угловую скорость вращения Земли. Эксперимент заключался в наблюдении плоскости колебаний установленного на поверхности Земли сферического маятника. Предполагалось, что Земля не увлекает плоскость колебаний маятника во вращение вокруг местной вертикали.

Между тем, благодаря нелинейным эффектам маятник обладает собственной скоростью прецессии вокруг местной вертикали, так что, не контролируя эту собственную прецессию, невозможно осуществлять достоверные измерения скорости вращения Земли.

В последнее время появился целый класс гироскопических приборов, в которых фактически реализована идея маятника Фуко. К этому классу относятся: струнный гироскоп [2], кольцевой гироскоп [3], полусферический кварцевый резонатор, или волновой твердотельный гироскоп [4, 5, 6], квапазон [7] и некоторые другие.

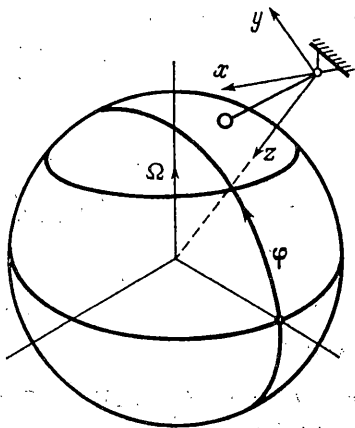
Во всех этих случаях играющий роль маятника Фуко осциллятор с двумя степенями свободы реализован в виде одной из форм собственных колебаний упругой среды, обладающей осевой симметрией.

При этом, в отличие от классического маятника Фуко, вращение упругой среды вокруг оси симметрии увлекает реализованную форму собственных колебаний во вращение относительно инерциального пространства (исключение составляет струнный гироскоп), однако, отношение угловой скорости формы относительно упругого тела к угловой скорости тела относительно пространства является константой, зависящей от номера формы и почти не зависящей от свойств материала.

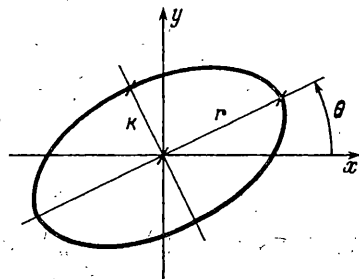
Этот коэффициент получил название масштабного коэффициента, или коэффициента Брайана, по имени первого исследователя колебаний упругого кольца с учетом его вращения [8].

В соответствующем выбранной форме колебаний собственном подпространстве все принципиальные вопросы теории подобного датчика инерциальной информации могут рассматриваться в рамках одних и тех же уравнений, аналогичных уравнениям классического маятника Фуко. По этой причине весь этот класс приборов может быть назван *обобщенным маятником Фуко*.

Разумеется, не все вопросы могут быть решены в указанных рамках. Главным образом, это вопросы, связанные с учетом нелинейных свойств колебательной системы. В таких случаях требуется учет специфики конкретной упругой системы.



Фиг. 1



Фиг. 2

Однако, вопрос о том, как управлять маятником и как идентифицировать его дефекты с тем, чтобы сделать извлекаемую информацию достоверной, решаются в рамках уравнений, общих для всего класса.

2. Уравнения маятника Фуко в элементах орбиты. Начнем с рассмотрения уравнений динамики классического маятника Фуко. Поместив начало координат системы x, y, z в точку подвеса маятника и направив ось z по вертикали к центру Земли, получим, при соответствующем выборе масштабов измерения переменных, следующие выражения для кинетической энергии, потенциальной энергии и уравнения связи (плоскость yz совпадает с плоскостью меридиана (фиг. 1)):

$$T = \frac{1}{2} [(\dot{x} + v z + \omega y)^2 + (\dot{y} - \omega x)^2 + (\dot{z} - vx)^2], \quad \Pi = -z$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Здесь пренебрежено скоростью движения центра подвеса маятника и обозначено: $v = \Omega \cos \varphi$, $\omega = \Omega \sin \varphi$, где Ω – угловая скорость вращения Земли, а φ – широта места.

Эти выражения, после исключения посредством уравнения связи переменной z , приводят к следующим уравнениям (использована процедура Лагранжа):

$$\ddot{x} + 2\omega \dot{y} + x - 2v \dot{y} + \left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - 2\omega(xy - \dot{x}y) \right] x = 0 \quad (2.1)$$

$$\ddot{y} - 2\omega \dot{x} + y + 2v \dot{x} + \left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - 2\omega(xy - \dot{x}y) \right] y = 0$$

В этих уравнениях сохранены нелинейные члены до третьего порядка включительно и пренебрежено квадратом угловой скорости вращения Земли.

Уравнения (2.1) описывают динамику идеального, неуправляемого маятника Фуко на вращающейся Земле.

Поведение траекторий маятника на плоскости xu удобно проследить, воспользовавшись в фазовом пространстве (x, y, \dot{x}, \dot{y}) тороидальными координатами (r, k, θ, τ) , называемыми в небесной механике элементами орбиты:

$$x = r \cos(t + \tau) \cos \theta - k \sin(t + \tau) \sin \theta$$

$$\dot{y} = r \cos(t + \tau) \sin \theta + k \sin(t + \tau) \cos \theta$$

$$\dot{x} = -r \sin(t + \tau) \cos \theta - k \cos(t + \tau) \sin \theta$$

$$\dot{y} = -r \sin(t + \tau) \sin \theta + k \cos(t + \tau) \cos \theta$$

(2.2)

Поясним смысл переменных r, k, θ, τ . Если бы в уравнениях (2.1) отсутствовали

нелинейные члены, то любая траектория в плоскости xu представляла бы собой эллипс (фиг. 2), а переменные r, k, θ, τ играли бы роль постоянных интегрирования.

Полная энергия колебаний и момент количества движения выражаются через величины r и k следующим образом:

$$E = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + x^2 + y^2) = \frac{1}{2}(r^2 + k^2) \quad (2.3)$$

$$K = xy - \dot{x}y = rk \quad (2.4)$$

Площадь, ограниченная эллипсом, есть

$$S = \frac{1}{2} \int xdy - ydx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (x\dot{y} - \dot{x}y) dt = \pi K$$

Таким образом, величины r и k определяют основные динамические характеристики свободного движения маятника посредством формул (2.3) и (2.4) — полную энергию и кинетический момент. Величина θ представляет собой угол наклона к оси x полуоси эллипса, имеющей длину r , а величина τ определяет положение точки на траектории в начальный момент времени $t = 0$.

Поворот эллипса на угол θ дает

$$\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r \cos(t + \tau) \\ k \sin(t + \tau) \end{vmatrix}$$

что и проясняет смысл переменных r и k как главных полуосей эллипса.

Соотношения (2.2) не являются решением системы (2.1) и рассматриваются в ней в качестве замены переменных $(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \rightarrow (r, k, \theta, \tau)$ и, если колебания осуществляются с малыми амплитудами, то новые переменные являются медленными функциями времени.

Для того, чтобы при приведении системы (2.1) к новым переменным максимально упростить выкладки, введем матрицу-столбец

$$R = \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$$

и запишем систему (2.1) в следующей матричной форме:

$$\frac{d}{dt} \|R, \dot{R}\| = \| \dot{R}, Z - R \|, \quad \|R, \dot{R}\| = \begin{vmatrix} x & \dot{x} \\ y & \dot{y} \end{vmatrix}, \quad Z = \begin{vmatrix} X \\ Y \end{vmatrix} \quad (2.5)$$

$$X = -2\omega y + 2\nu y \dot{y} - \left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - 2\omega(xy - \dot{x}y) \right] x \quad (2.6)$$

$$Y = 2\omega x - 2\nu y \dot{x} - \left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - 2\omega(xy - \dot{x}y) \right] y$$

В матричной форме можно представить и замену (2.2):

$$\|R, \dot{R}\| = S(\theta) \begin{vmatrix} r & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix} \|S(t + \tau), \quad S(\xi) = \begin{vmatrix} \cos \xi & -\sin \xi \\ \sin \xi & \cos \xi \end{vmatrix} \quad (2.7)$$

Подставляя (2.7) в (2.5), найдем

$$\dot{\theta} S'(\theta) \begin{vmatrix} r & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix} \|S(t + \tau) + S(\theta) \begin{vmatrix} \dot{r} & 0 \\ 0 & \dot{k} \end{vmatrix} \|S(t + \tau) + \dot{\tau} S(\theta) \begin{vmatrix} r & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix} \|S'(t + \tau) = \| \dot{R}, -R \| + \| O, Z \|$$

Учитывая свойства ортогональной матрицы $S(\xi)$:

$$S'(\xi) = - \begin{vmatrix} \sin \xi & \cos \xi \\ -\cos \xi & \sin \xi \end{vmatrix}, \quad S^T S' = S' S^T = J = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad S^T S = S S^T = I = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

получим

$$\dot{\theta} \begin{vmatrix} r & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix} + \dot{\tau} \begin{vmatrix} r & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix} J + \begin{vmatrix} \dot{r} & 0 \\ 0 & \dot{k} \end{vmatrix} = S^T(\theta) \| O, Z \| S^T(t + \tau)$$

Или, в покоординатной форме

$$\dot{r} = -(X \cos \theta + Y \sin \theta) \sin(t + \tau)$$

$$\dot{k} = -(X \sin \theta - Y \cos \theta) \cos(t + \tau)$$

$$k\dot{\theta} + r\dot{\tau} = -(X \cos \theta + Y \sin \theta) \cos(t + \tau)$$

$$r\dot{\theta} + k\dot{\tau} = (X \sin \theta - Y \cos \theta) \sin(t + \tau)$$

что окончательно позволяет записать

$$\dot{r} = -(X \cos \theta + Y \sin \theta) \sin(t + \tau)$$

$$\dot{k} = -(X \sin \theta - Y \cos \theta) \cos(t + \tau)$$

$$\dot{\theta} = \frac{1}{r^2 - k^2} [k(X \cos \theta + Y \sin \theta) \cos(t + \tau) + r(X \sin \theta - Y \cos \theta) \sin(t + \tau)] \quad (2.8)$$

$$\dot{\tau} = -\frac{1}{r^2 - k^2} [r(X \cos \theta + Y \sin \theta) \cos(t + \tau) + k(X \sin \theta - Y \cos \theta) \sin(t + \tau)]$$

Эти же уравнения при соответствующей расшифровке сил X и Y могут быть использованы для анализа поведения маятника под воздействием разнообразных возмущений, а также управляющих воздействий. Рассмотрим вначале влияние нелинейности.

3. Нелинейные эффекты. Подставляя в (2.8) выражение для сил в виде (2.6) и усредняя правые части по явно входящему времени, находим:

$$\dot{r} = 0, \quad \dot{k} = 0, \quad \dot{\theta} = \omega + \frac{3}{8} rk, \quad \dot{\tau} = -\omega rk - \frac{r^2 + k^2}{16} \quad (3.1)$$

Из этих уравнений видно, что погрешность определения вертикальной составляющей угловой скорости вращения Земли $\omega = \Omega \sin \varphi$ равна $\frac{3}{8} rk \equiv \frac{3}{8} K$, т.е. она пропорциональна моменту количества движения K , причем знак дополнительной прецессии совпадает со знаком K . Изменение частоты колебаний есть линейная комбинация энергии колебаний и кинетического момента $\dot{\tau} = -\omega K - \frac{1}{8} E$.

Учитывая принципиальную важность для практики этих обстоятельств, запишем эти же формулы в размерных переменных. Прецессия средней плоскости колебаний

$$\dot{\theta} = \Omega \sin \varphi + \frac{3}{8} \lambda \frac{rk}{l^2}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (3.2)$$

где l — длина маятника.

Поправка к частоте колебаний $\dot{\tau} = -\omega rk / l^2 - \lambda(r^2 + k^2) / 16l^2$.

Для того чтобы устранить вызываемую нелинейностью системы дополнительную прецессию $3rk/8$ в конкретных технических системах, одну из полуосей (например, r) поддерживают постоянной, а другую, т.е. k — равной нулю. При этом полуось k , пропорциональная при постоянном r площади описываемого эллипса, называется *квadrатурой*.

Прецессия $3rk/8$ является основной принципиальной погрешностью маятника Фуко

как измерителя угловой скорости вращения Земли. Эта погрешность присуща всем без исключения гироскопам, реализующим идею маятника Фуко¹. По этой причине работоспособный гироскоп может быть получен только при условии введения обратных связей, поддерживающих постоянную амплитуду колебаний r и равной нулю квадратуру k .

4. Обратные связи. Основной целью управления маятником является удержание его на фазовом многообразии $r = \text{const}$, $k = 0$. В фазовом пространстве переменных (x, y, \dot{x}, \dot{y}) это многообразие представляет собой пересечение трехмерного конуса нулевой квадратуры с трехмерной сферой постоянной амплитуды [6].

Этому многообразию в конфигурационном пространстве x, y соответствует семейство произвольно ориентированных прямолинейных отрезков одинаковой длины и симметричных относительно начала координат. От конкретно реализованного такого отрезка и осуществляется отсчет положения подвижного основания, поэтому многообразию $r = \text{const}$, $k = 0$ носит название *отсчетного*.

Законы управления маятником, реализующие необходимые обратные связи, должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Асимптотическая устойчивость отсчетного многообразия;
2. Инвариантность по отношению к группе вращения в x, y ;
3. Отсутствие интерференции различных каналов управления;
4. Инвариантность к фазовому потоку невозмущенной системы $\ddot{x} + x = 0$, $\ddot{y} + y = 0$;
5. Инвариантность к трансляции по времени.

Первые два требования являются категорическими, от них зависит сама возможность превращения маятника в гироскоп. Три последних требования определяют качество управления.

Известные первые примеры реализации законов управления, в частности, в гироскопе HRG фирмы Делко, последним трем требованиям не удовлетворяли.

Для того чтобы законы управления были инвариантны по отношению к группе вращений, они должны быть сформированы из дифференциальных инвариантов этой группы.

Группа вращений имеет три независимых дифференциальных инварианта первого порядка: $I_0 = x^2 + y^2$, $I_1 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$, $I_2 = x\dot{y} - \dot{x}y$.

Для инвариантности управления по отношению к фазовому потоку невозмущенной системы эти инварианты должны быть ее первыми интегралами. Таких интегралов тоже три: $E = (I_0 + I_1) / 2$, $K = I_2$ и $L = x\dot{y} + \dot{x}y$.

Линейные по координатам и скоростям силы, прикладываемые к маятнику с целью управления, в наиболее общей форме имеют вид:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{pmatrix} &= (C + H + N) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (D + G + \Gamma) \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \\ C &= \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad H = h \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & n \\ -n & 0 \end{pmatrix} \\ D &= \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \quad G = g \begin{pmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ -\gamma & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.1)$$

где C – симметрическая матрица потенциальных сил сферического типа; H – симметрическая матрица потенциальных сил гиперболического типа; N – кососимметрическая матрица непотенциальных сил; D – симметрическая матрица диссипативных

¹ Например, как это следует из анализа нелинейных колебаний кольца, приведенного в [5], прецессия, вызванная нелинейными эффектами в волновом твердотельном гироскопе, может быть получена в виде $\theta = \sqrt{5\lambda rk} / 6R^2$, где R – радиус резонатора, а λ – частота его свободных колебаний на основной форме.

сил сферического типа; G – симметрическая матрица диссипативных сил гиперболического типа; Γ – кососимметрическая матрица гироскопических сил. Матрицы C и D – диагональные (сферические тензоры); матрицы H и G имеют след, равный нулю (девиаторы).

Указанные силы могут появляться не только в результате управления маятником, но также и как возмущения, обусловленные разнообразными дефектами реализации маятника. Теория локальных эволюций траектории под воздействием возмущений приведена в [6] (таблица). Из нее, в частности, следует, что для управления квадратурой можно воспользоваться позиционными силами с матрицами H и N или скоростными силами с матрицей G . Для управления амплитудой можно воспользоваться позиционными силами с матрицей H или скоростными силами с матрицами D и G . Однако силы H и G приводят не только к изменению квадратуры или амплитуды, но также и к изменению θ и τ . Для удовлетворения требованию 3 (отсутствие интерференции) можно при управлении квадратурой пользоваться только силами типа N . По этой же причине для управления амплитудой остается единственный выбор – силы типа D .

	Позиционные силы			Скоростные силы		
	C	H	N	D	G	Γ
A	0	$\frac{hk}{r} \sin 4(\theta - \alpha)$	0	$\frac{d}{2}$	$\frac{g}{2} \cos 4(\theta - \beta)$	0
Q	0	$-\frac{h}{2} \sin 4(\theta - \alpha)$	$-\frac{n}{2}$	0	$-\frac{gk}{r} \cos 4(\theta - \beta)$	0
P	0	$-\frac{hk}{2} \cos 4(\theta - \theta)$	0	0	$\frac{g}{4} \sin 4(\theta - \beta)$	$\frac{\gamma}{4}$
F	$-\frac{c}{2}$	$-\frac{h}{2} \cos 4(\theta - \alpha)$	0	0	$\frac{gk}{r} \sin 4(\theta - \beta)$	0

Выбирая в первом случае коэффициент n пропорциональным квадратуре K , а во втором случае коэффициент d пропорциональным отклонению полной энергии от требуемого уровня $E - E_0$, получаем уравнения идеального управляемого маятника Фуко в виде

$$\ddot{x} + 2\omega\dot{y} + x + NL_x = -\varepsilon(E - E_0)\dot{x} + \mu Ky \quad (4.2)$$

$$\ddot{y} - 2\omega\dot{x} + y + NL_y = -\varepsilon(E - E_0)\dot{y} - \mu Kx$$

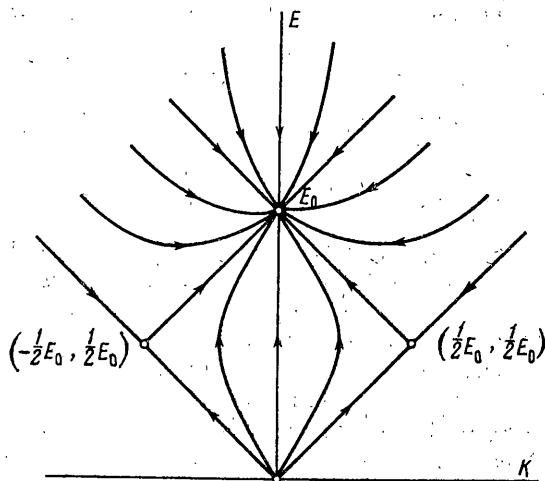
где E и K определяются формулами (2.3) и (2.4), а NL – совокупность нелинейных членов в уравнениях (2.1).

5. Устойчивость отсчетного многообразия $E = E_0$, $K = 0$. Дифференцируя E и K ((2.3) и (2.4)) в силу системы (4.2), получим

$$\dot{E} = \left[-\dot{x}^2 - \dot{y}^2 + \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + 2\omega K \right] (x\dot{x} + y\dot{y}) - \varepsilon(E - E_0)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \mu K^2 \quad (5.1)$$

$$\dot{K} = 2(\omega - \nu y)(x\dot{x} + y\dot{y}) - \varepsilon(E - E_0)K - \mu K(x^2 + y^2)$$

Выполним осреднение уравнений (5.1) вдоль траекторий неуправляемой ($\varepsilon = \mu = 0$)



Фиг. 3

системы. Эти траектории представлены формулами (2.2), в которых переменные r, k, θ, τ являются решениями уравнений (3.1). Учитывая следующие средние:

$$\begin{aligned} \langle [-\dot{x}^2 - \dot{y}^2 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + 2\omega K](x\dot{x} + y\dot{y}) \rangle &= 0 \\ \langle 2(\omega - \nu y)(x\dot{x} + y\dot{y}) \rangle &= 0, \quad \langle (x^2 + y^2) \rangle = \langle \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \rangle = E \end{aligned}$$

получим осредненные уравнения

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \varepsilon(E_0 - E)E - \mu K^2 \\ \dot{K} &= \varepsilon(E_0 - E)K - \mu KE \end{aligned} \quad (5.2)$$

Асимптотическая устойчивость отсчетного многообразия $E = E_0, K = 0$ с характеристическими числами $\lambda_1 = -\varepsilon E_0$ и $\lambda_2 = -\mu E_0$ имеет место, если $\varepsilon > 0$ и $\mu > 0$. Одинаковая скорость установления стационарного режима по переменным E и K достигается при $\mu = \varepsilon$. Фазовый портрет системы (5.2) для этого случая изображен на фиг. 3. Таким образом построенное управление удовлетворяет всем перечисленным выше требованиям.

6. Съем информации. Для формирования обратных связей по амплитуде и квадратуре достаточно вычислить по формулам (2.3) и (2.4) энергию (амплитуду) и квадратуру. Вычисления основываются только на измерениях $x(t), y(t)$ и их производных по времени. Этим же переменным достаточно и для измерения угла θ , что и представляет собой конечную цель реализации маятника Фуко:

$$\operatorname{tg} 2\theta = 2 \frac{xy + \dot{x}\dot{y}}{x^2 + \dot{x}^2 - y^2 - \dot{y}^2} \quad (6.1)$$

Подставляя (2.2) в правую часть (6.1), легко убедиться в том что получается тождество.

7. Калибровочные уравнения. Так называются уравнения, позволяющие для управляемого маятника решать следующую обратную задачу механики: управление системой и ее движение известны, требуется восстановить дефекты.

Для вывода калибровочных уравнений обобщенного маятника Фуко сохраним в уравнениях (4.2) только те члены, которые являются общими для любых систем этого класса (т.е. опустим нелинейные члены NL) и добавим управление прецессией и частотой.

Как следует из [6], для управления прецессией и частотой с условием сохранения независимости всех каналов управления следует воздействовать на систему силами, определяемыми матрицами Γ и C . Уравнения (4.2) приобретут вид

$$\begin{aligned}\ddot{x} + 2\omega\dot{y} + x &= -\varepsilon(E - E_0)\dot{x} + \mu Ky + P\dot{y} + Fx + X \\ \ddot{y} - 2\omega\dot{x} + y &= -\varepsilon(E - E_0)\dot{y} - \mu Kx - P\dot{x} + Fy + Y\end{aligned}\quad (7.1)$$

В этих уравнениях силы X, Y имеющие по-прежнему структуру (4.1), характеризуют исключительно возмущения (дефекты исполнения системы). При этом матрицы C и D определяют отклонения частоты колебаний от номинала и естественную диссипацию. Эти возмущения могут не рассматриваться как дефекты. Матрицы N и Γ определяют возмущения, появляющиеся в результате погрешностей в системе съема информации и управления и зависят от их конкретного выполнения в конкретных реализациях маятника Фуко. Главные погрешности собственно механической части гироскопа представлены матрицами H и G . Они определяют соответственно разностотность и разнодобротность маятника.

Подставляя всю совокупность правых частей системы (7.1) в уравнения (2.8) и осуществляя осреднение по явно входящему времени, получим

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \frac{k}{2} \left[h \sin 2(\theta - \alpha) - n - \mu kr \right] + \frac{r}{2} \left[g \cos 2(\theta - \beta) + d + \varepsilon \left(E_0 - \frac{1}{2}(r^2 + k^2) \right) \right] \\ \dot{k} &= -\frac{r}{2} \left[h \sin 2(\theta - \alpha) + n + \mu kr \right] - \frac{k}{2} \left[g \cos 2(\theta - \beta) - d - \varepsilon \left(E_0 - \frac{1}{2}(r^2 + k^2) \right) \right] \\ \dot{\theta} &= \omega - \frac{1}{2}(\gamma + P) - \frac{r^2 + k^2}{2(r^2 - k^2)} g \sin 2(\theta - \beta) + \frac{rk}{r^2 - k^2} h \cos 2(\theta - \alpha) \\ \dot{\tau} &= -\frac{1}{2}(c + F) + \frac{rk}{r^2 - k^2} g \sin 2(\theta - \beta) - \frac{r^2 + k^2}{2(r^2 - k^2)} h \cos 2(\theta - \alpha)\end{aligned}\quad (7.2)$$

Аналогичная система, однако без учета сил управления была получена ранее в [9] (см. также [4]).

В процессе калибровки коэффициенты управления квадратурой — μ и амплитудой — ε , а также управление прецессией — P и частотой — F поддерживают такими, чтобы обеспечить

$$\dot{r} \equiv 0, \quad \dot{k} \equiv 0, \quad \dot{\theta} \equiv \dot{\theta}_0 = \text{const}, \quad \dot{\tau} \equiv 0 \quad (7.3)$$

где $\dot{\theta}_0$ — достаточно малая контролируемая скорость прецессии, необходимая для принудительного изменения положения отсчетного многообразия с целью снятия зависимостей $A(\theta), Q(\theta), P(\theta), F(\theta)$. Здесь через A обозначена интенсивность управления амплитудой $A = \varepsilon(E_0 - E)$, а через Q — интенсивность управления квадратурой $Q = \mu K$ (см. (4.2)).

Подставляя (7.3) в (7.2) и учитывая также $r \gg |k|$, что позволяет ограничиться в (7.2) линейными по k членами, находим

$$\begin{aligned}k[h \sin 2(\theta - \alpha) - n - Q(\theta)] + r[g \cos 2(\theta - \beta) + d + A(\theta)] &= 0 \\ r[h \sin 2(\theta - \alpha) + n + Q(\theta)] + k[g \cos 2(\theta - \beta) - d - A(\theta)] &= 0 \\ \omega - \frac{1}{2}[\gamma + P(\theta)] - \frac{1}{2}g \sin 2(\theta - \beta) + \frac{k}{r}h \cos 2(\theta - \alpha) - \dot{\theta}_0 &= 0 \\ \frac{1}{2}[c + F(\theta)] - \frac{r}{k}g \sin 2(\theta - \beta) + \frac{1}{2}h \cos 2(\theta - \alpha) &= 0\end{aligned}\quad (7.4)$$

Система (7.4) и называется системой калибровочных уравнений. В ней известными считаются $r(\theta)$, $k(\theta)$, $A(\theta)$, $Q(\theta)$, $P(\theta)$, $F(\theta)$ (измеряются в процессе калибровки), а также константы ω и θ_0 . Неизвестными и подлежащими нахождению из этой системы являются параметры дефектов h , α , n , g , β , d , γ , c .

Левые части системы (7.4) представляют собой π -периодические функции угла θ . Если эти функции удовлетворяют на $[0, \pi]$ условию Дирихле², то они могут быть представлены сходящимися рядами Фурье, а тождественное равенство нулю этих рядов влечет за собой равенство нулю всех в отдельности коэффициентов этих рядов. Таким образом может быть получена бесконечная система алгебраических уравнений для нахождения восьми неизвестных h , α , n , g , β , d , γ , c . Такая переопределенная система всегда совместна и имеет единственное решение относительно переменных $h_1 = h \cos 2\alpha$, $h_2 = h \sin 2\alpha$, n , $g_1 = g \cos 2\beta$, $g_2 = g \sin 2\beta$, d , γ , c . Это следует из доказанной выше теоремы об асимптотической устойчивости отсчетного многообразия, а также из линейности системы (7.4) по отношению к этим переменным. Для их нахождения из указанной переопределенной системы достаточно взять любые восемь уравнений с отличным от нуля детерминантом. Пользуясь соотношением $r \gg |k|$, такую задачу можно решать приближенно. В частности, в нулевом приближении $k \equiv 0$, $r \equiv \sqrt{2E_0}$, и из системы (7.4) находим

$$A(\theta) = -d - g \cos 2(\theta - \beta), \quad Q(\theta) = -n - h \sin 2(\theta - \alpha)$$

$$P(\theta) = 2(\omega - \dot{\theta}_0) - \gamma - g \sin(\theta - \beta), \quad F(\theta) = -c - h \cos 2(\theta - \alpha)$$

Если снятые зависимости $A(\theta)$, $Q(\theta)$, $P(\theta)$, $F(\theta)$ содержат более одной гармоники, то требуются следующие приближения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Foucault L.* Demonstration physique du mouvement de la Terre au moyen du pendule // C.r. Acad. sci. Paris, 1851. V. 32. P. 135–138.
2. *Quick W.H.* Theory of vibrating string as an angular motion sensor // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1964. V. 31. No. 3. P. 523–534.
3. *Stiles J.C.* Vibrating ring gyro // U.S. Patent N 3,924,475. Dec. 9, 1975.
4. *Lynch D.D.* Vibrating gyro analysis by the method of averaging // 2nd Saint-Petersburg Intern. Conf. on Gyroscopic Technology and Navigation. Saint-Petersburg, 1995. P. 26–34.
5. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Волновой твердотельный гироскоп. М.: Наука, 1985. 125 с.
6. *Журавлев В.Ф.* Теоретические основы волнового твердотельного гироскопа (ВТГ) // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 3. С. 6–19.
7. *Léger P.* Quapasòn – a new low-cost vibrating gyroscope // 3rd Saint Petersburg Intern. Conf. on Integrated Navigation Systems. Saint-Petersburg, 1996. Pt I, P. 143–149.
8. *Bryan G.H.* On the beats in the vibrations of a revolving cylinder or bell // Proc. Cambr. Phil. Soc. V. 7. 1891. P. 101–107.
9. *Friedland B., Hutton M.F.* Theory and error analysis of vibrating-member gyroscope // IEEE Trans. on Autom. Contr. 1978. V. 23. No. 4. P. 545–556.

Москва

Поступила в редакцию
2.XII.1996

² Говорят, что функция удовлетворяет условию Дирихле на некотором сегменте, если этот сегмент можно разбить на конечное число частей так, что внутри каждой части функция монотонна и ограничена.