

УДК 624.07.534.1

© 1997 г. И.И. ИВАНЧЕНКО

## О ДЕЙСТВИИ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ НА МОСТЫ

Предлагается новый метод расчета на подвижную нагрузку пролетных строений мостов балочного типа. При решении задачи о действии на балку простейшей подвижной нагрузки в виде движущегося груза находят применение два основных метода решения этой задачи, они же реализуются и для других конструкций и нагрузок. В первом случае используются обобщенные координаты при разложении прогиба по собственным формам балки (конструкции) и задача сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами [1–3]. Во втором случае, после расчленения системы "балка – груз", задача сводится к решению интегрального уравнения относительно динамической реакции груза [4, 5]. В [1–3] увеличение числа удерживаемых форм приводит к увеличению порядка системы уравнений, в [4, 5] возникают трудности при решении интегральных уравнений, связанные с условной устойчивостью шаговых процедур. Излагаемый далее метод как бы объединяет между собой указанные подходы и ликвидирует указанные у них недостатки, так как доступно учитывает любое необходимое число форм в разложении прогиба, и имеет разрешающую систему уравнений при безусловно устойчивой схеме интегрирования с минимальным числом неизвестных, как и в методе интегральных уравнений [4, 5]. В качестве нагрузки, действующей на мост, рассматриваются движущиеся массы и экипажи.

1. Обратимся первоначально к решению классической задачи о движении груза по балке, а затем перейдем к более сложной нагрузке. Используем далее безусловно устойчивую шаговую процедуру по времени и метод учета действия безмассовой подвижной нагрузки на стержневые системы, предложенные в [6].

Дифференциальное уравнение колебаний балки при движении груза имеет вид

$$L_1 q^*(y, t) = \delta(y - vt) \left\{ P - M \left( d^2 q^*(vt, t) / dt^2 \right) \right\}$$

$$L_1 = EJ(\partial^4 / \partial^4 y) + \mu EJ(\partial^5 / \partial^4 y \partial t) + m(\partial^2 / \partial^2 t)$$

$$P = Mg \tag{1.1}$$

где  $EJ$  – жесткость балки на изгиб,  $m$  – погонная масса,  $\mu$  – коэффициент, учитывающий вязкость,  $M$  – масса груза,  $g$  – ускорение свободного падения,  $q^*(y, t)$  – прогиб балки,  $y$  – координата по длине,  $\delta(y - vt)$  – дельта-функция,  $v$  – скорость движения.

Прогиб шарнирно опертой балки в момент  $t_{j+1}$  при движении с постоянной скоростью  $v$  сосредоточенной силы  $R = \delta(y - vt)(P - M\ddot{q}_1)$ , можно записать [6] в виде

$$q^*(\eta_1, t_{j+1}) = \sum_{i=1}^n W_i(\eta_1) q_{ij+1}^0 = \sum_{i=1}^n W_i(\eta_1) \left( q_{ij}^0 + \dot{q}_{ij}^0 \Delta t_j + \ddot{q}_{ij+1/2}^0 \frac{\Delta t_j^2}{2} \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^n W_i(\eta_1) \left\{ \left( 1 - \vartheta_{ij} \omega_i^2 \right) q_{ij}^0 + \left( \Delta t_j - \omega_i^2 \vartheta_{ij} \left( \mu + \frac{\Delta t_j}{2} \right) \right) \dot{q}_{ij}^0 + \vartheta_{ij} \int_0^1 \bar{\eta} R_{j+1/2} d\eta \right\}$$

$$\vartheta_{ij} = \left( \Delta t_j^2 / 2 \right) \left( 1 + \omega_i^2 \left( \mu \Delta t_j + \frac{\Delta t_j^2}{2} \right) / 2 \right)^{-1}$$

$$\omega_i^2 = (r_i / l)^2 (EJ / m)^{1/2}, \quad r_i = \pi i, \quad \eta_1 = y / l$$

$$W_i(\eta_1) = \sin(r_i \eta_1), \quad \bar{\eta} = b^* l \sin(r_i \eta_1)$$

$$b^* = 2 / (ml), \quad \Delta t_j = t_{j+1} - t_j \quad (1.2)$$

Здесь  $q_{ij}^{\circ}$  – обобщенные координаты балки,  $W_i(\eta_1)$  – собственные функции,  $\omega_i$  – круговая частота изгибных колебаний,  $n$  – число удерживаемых форм колебаний,  $l$  – длина балки.

Используя (1.2) и полагая  $\ddot{q}_{1j+1/2} = d^2 q^{\circ}(vt, t) / dt^2$  при  $t = t_{j+1/2}$ , можно записать полное ускорение груза в виде

$$\ddot{q}_{ij+1/2} = \sum_{i=1}^n \left\{ W_i \left( \frac{vt_{j+1/2}}{l} \right) \ddot{q}_{ij+1/2} + v^2 \left( \frac{dW_i(vt_{j+1/2}/l)}{d^2 y} \right) \left( q_{ij}^{\circ} + \dot{q}_{ij}^{\circ} \left( \frac{\Delta t_j}{2} \right) + \ddot{q}_{ij+1/2}^{\circ} \left( \frac{\Delta t_j^2}{4} \right) + 2v \left( \frac{dW_i(vt_{j+1/2}/l)}{dy} \right) \left( \dot{q}_{ij}^{\circ} + \ddot{q}_{ij+1/2}^{\circ} \left( \frac{\Delta t_j}{2} \right) \right) \right\} \quad (1.3)$$

$$\ddot{q}_{ij+1/2}^{\circ} = \vartheta_{ij} \left( -\omega_i^2 q_{ij}^{\circ} + (\mu + \Delta t_j / 2) \omega_i^2 \dot{q}_{ij}^{\circ} + b^* W_i(vt_{j+1/2} / l) \times \right. \\ \left. \times (P + R_{1j+1/2}) \right) \left( 2 / \Delta t_j^2 \right)$$

Из условий динамического равновесия груза

$$R_{1j+1/2} = -M \ddot{q}_{1j+1/2} \quad (1.4)$$

После подстановки (1.4) в (1.3), имеем на шаге  $[t_j, t_{j+1}]$  уравнение относительно  $\ddot{q}_{1j+1/2}$ . Выражение (1.2) с учетом (1.4) позволяет вычислить начальные условия задачи для следующего шага интегрирования.

Шаговая процедура (1.3)–(1.4) реализована для груза и балки с параметрами  $(\beta = P/(mgl) = 3, \alpha = vl / (\pi \sqrt{EJ / m}) = 0,3$  [5]).

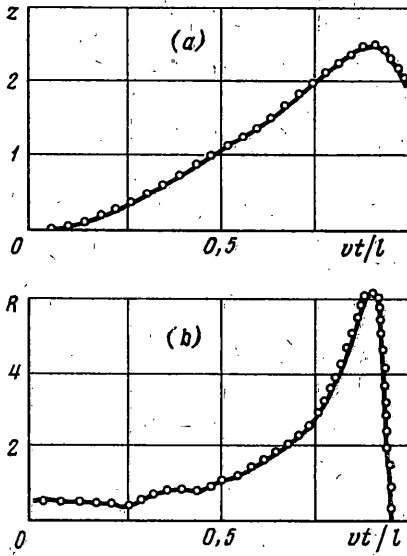
На фиг. 1 показаны зависимости смещения  $z = z_D / z_0$  и давления  $R = P_D / P$ , где  $z_D$  – смещение в центре балки и  $P_D$  – давление под грузом от положения груза на балке при  $n = 25$  в (1.2). Светлые точки – результаты из [5], при  $\Delta t_j = l / (200v)$ ; сплошные линии – результаты по предложенной методике, при  $\Delta t_j = l / (40v)$ ;  $z_0 = 2P^3 / (\pi^4 EJ)$  – статический прогиб под силой в центре балки.

2. Алгоритм (1.2)–(1.4) легко реализуется в случае движения системы грузов по балке (системе балок). Выражения вида (1.3) при движении  $N$  грузов формируют систему  $N$  линейных, алгебраических уравнений

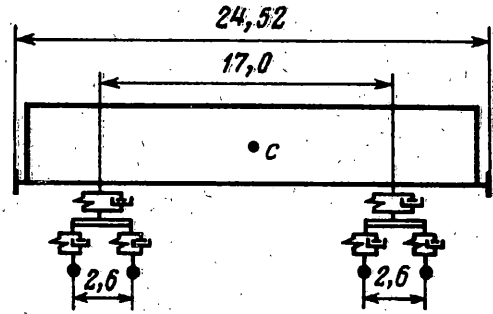
$$AR_{Kj+1/2} + E \ddot{q}_{Kj+1/2} = B \quad (2.1)$$

где  $A, B$  – блочно-диагональные матрица и вектор (число блоков равно числу балок),  $E$  – единичная матрица,  $R_K$  – вектор динамических добавок к статическим давлениям грузов на балку,  $\ddot{q}_K$  – вектор вертикальных ускорений движущихся грузов.

Рассмотрим модель для изучения вертикальной динамики системы "состав – мост". Будем далее ее обозначать через  $\{e_h, e_h^{\circ}\}$ , где  $h = 1, 2, \dots, m^*$ ,  $h^{\circ} = 1, 2, \dots, m^{\circ}$ ;  $m^*, m^{\circ}$  –



Фиг. 1



Фиг. 2

число последовательно расположенных шарнирно опертых балок и, соответственно, число экипажей в составе (фиг. 2, 3).

Построим систему уравнений, описывающих динамику состава  $\{e_{h^0}^{\circ}\}$ , состоящего из несвязанных между собой вагонов (фиг. 2).

Будем считать при этом, что начальные условия задачи нулевые, а параметры, определяющие положение  $\{e_{h^0}^{\circ}\}$  в системе  $O \cdot X \cdot Y \cdot Z^*$ , движущейся с постоянной скоростью  $u$ , отсчитываются от их значений в статическом равновесии. Обозначим через  $\{e_{h^0}^{\circ}\}$  элементы  $\{e_{h^0}^{\circ}\}$ , вовлеченные к моменту времени  $t$  в совместные колебания с  $\{e_h\}$ . Тогда для  $\{e_{h^0}^{\circ}\}$  имеем

$$M_* \ddot{\bar{q}}_c + C_* \dot{\bar{q}}_c + K_* \bar{q}_c = \bar{R}_*, \quad \bar{R}_* = \Pi_* R_* \quad (2.2)$$

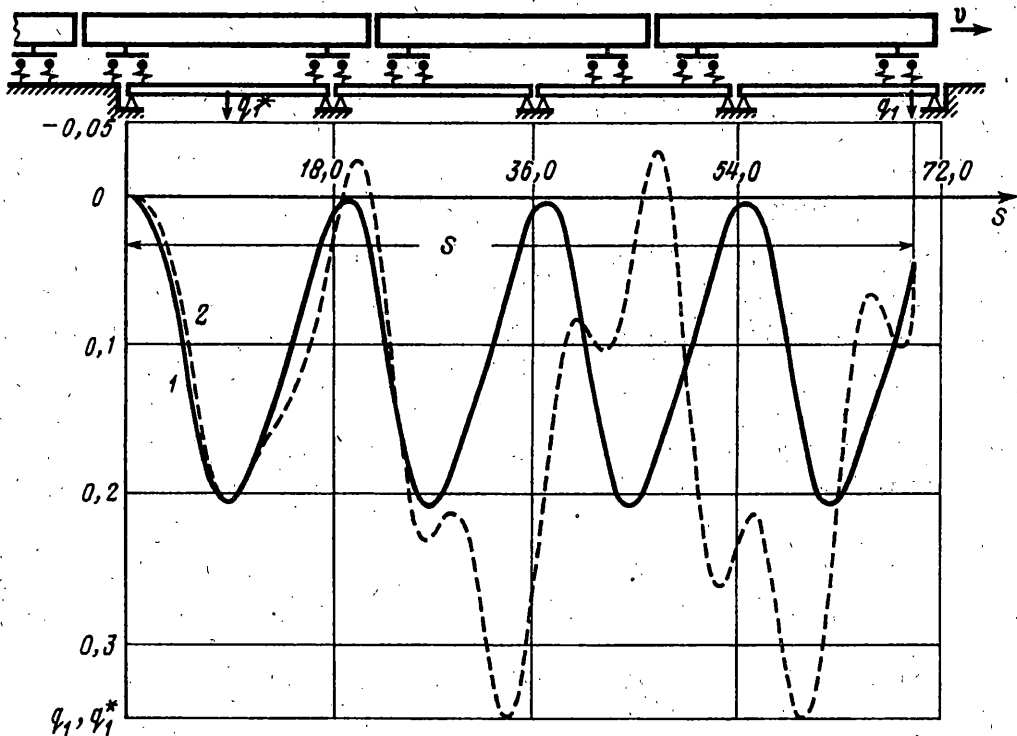
где  $\bar{q}_c$  – вектор независимых обобщенных координат, определяющих  $\{e_{h^0}^{\circ}\}$  в системе  $O \cdot X \cdot Y \cdot Z^*$ ;  $M_* = [M_*^r]$ ,  $C_* = [C_*^r]$ ,  $K_* = [K_*^r]$  – блочно-диагональные матрицы масс, демпфирования и жесткости для  $\{e_{h^0}^{\circ}\}$ ;  $M_*^r, C_*^r, K_*^r$  – блоки матриц  $M_*, C_*, K_*$ , соответствующие экипажу с номером  $r$  [7];  $\Pi_*$  – матрица соединения векторов  $\bar{R}_*$  и  $R_*$ ;  $R_*$  – вектор динамических добавок к статическим реакциям в точках контакта  $\{e_{h^0}^{\circ}\}$  с проезжей частью (системой  $\{e_h\}$  и жестким внеплатформенным полотном).

Учтем упруговязкие связи между колесами экипажей  $\{e_{h^0}^{\circ}\}$  и проезжей частью: Эти связи моделируют путь на мосту или контактную жесткость колес

$$R_* = c_1 (q_{ko} - q_{ck}) + \gamma_1 (\dot{q}_{ko} - \dot{q}_{ck}) \quad (2.3)$$

где  $q_{ko}$  – вектор смещений в точках контакта упруговязких элементов с проезжей частью;  $q_{ck}$  – вектор смещений колес вагона (подвектор вектора  $\bar{q}_c$ );  $c_1, \gamma_1$  – жесткость и вязкость связи, моделирующей путь.

Введем в рассмотрение  $P_*$  и  $R_{ko}$  – векторы статических давлений  $\{e_{h^0}^{\circ}\}$  на проезжую часть и соответствующие динамические добавки к ним. Выделим из  $R_{ko}, R_*, q_{ko}, q_{ck}$  – подвекторы, соответственно,  $R_{ko}^{\circ}, R_*^{\circ}, q_{ko}^{\circ}, q_{ck}^{\circ}$  – отвечающие только взаимодействию



Фиг. 3

$\{e_h^{\circ}\}$  с  $\{e_h\}$ , обозначая через  $R_{ko}^{\circ}, R_{*}^{\circ}$  — динамические добавки к статическим давлениям колес на проезжую часть и реакциям колес, находящимся только на мосту, и через  $q_{ck}^{\circ}, q_{ko}^{\circ}$  — смещения колес, находящихся на мосту и точек контакта упруговязких элементов между колесами и проезжей частью моста. Понятно, что в любой момент времени элементы вектора  $q_{ko}$ , относящиеся к проезжей части вне моста, остаются нулевыми. Отметим, что в каждый момент времени для  $\{e_h, e_h^{\circ}\}$  выполняются условия равновесия в движущихся узлах (в точках контакта колес с проезжей частью моста):

$$R_{ko}^{\circ} + R_{*}^{\circ} = 0 \quad (2.4)$$

Для системы  $\{e_h\}$ , по которой происходит движение состава, на шаге  $[t_j, t_{j+1}]$  можно записать

$$AR_{koj+1/2}^{\circ} + E\ddot{q}_{koj+1/2}^{\circ} = B \quad (2.5)$$

где  $A$  — блочно-диагональная матрица жесткостных и инерционных характеристик системы  $\{e_h\}$ ;  $E$  — единичная матрица;  $B$  — вектор, учитывающий начальные условия для  $\{e_h\}$  в момент  $t_j$  и действие на проезжую часть системы движущихся сил  $P_{*}$ .

Проведем дискретизацию (2.2) по времени ( $j = 0, 1, 2, \dots$ )

$$M_{*}\ddot{\bar{q}}_{cj+1} + C_{*}\dot{\bar{q}}_{cj+1} + K_{*}\bar{q}_{cj+1} = \Pi_{*}R_{*j+1} \quad (2.6)$$

$$\bar{q}_{cj+1} = \bar{q}_{cj} + \dot{\bar{q}}_{cj} \frac{\Delta t_j^2}{2} + \ddot{\bar{q}}_{cj+1/2} \frac{\Delta t_j^2}{2}$$

$$\ddot{q}_{cj+1} = \ddot{q}_{cj} + \ddot{q}_{cj+1/2} \Delta t_j \quad (2.7)$$

Используя замены

$$\bar{q}_{cj+1} = 2\bar{q}_{cj+1/2} - \bar{q}_{cj}, \quad R_{*j+1} = 2R_{*j+1/2} - R_{*j} \quad (2.8)$$

получим, как и в [7]:

$$\bar{q}_{cj+1} = G_1 \bar{q}_{cj} + G_2 \ddot{q}_{cj} + G_3 R_{*j+1/2} \quad (2.9)$$

$$G_1 = E - A^* K_*, \quad G_2 = \Delta t_j E - A^* (C_* + (\Delta t_j / 2) K_*)$$

$$A^* = [M_* + (\Delta t_j / 2) C_* + (\Delta t_j^2 / 4) K_*]^{-1} (\Delta t_j^2 / 2)$$

$$G_3 = A^* \Pi_*$$

Выделим из (2.9) подвекторы  $\ddot{q}_{ckj+1}, \dot{q}_{ckj+1}$ . Используя замены вида (2.8), выразим векторы  $R_*, \dot{q}_{ko}, \dot{q}_{ko}, q_{ck}, \dot{q}_{ck}$  в момент  $t_{j+1/2}$  и подставим их в выражение (2.3). В итоге получим

$$R_{*j+1/2} = W \ddot{q}_{koj+1/2} + L \quad (2.10)$$

$$R_{*j+1/2}^\circ = W^\circ \ddot{q}_{koj+1/2}^\circ + L^\circ \quad (2.11)$$

Подставим в (2.4) векторы  $R_{ko}^\circ, R_*^\circ$  из (2.5) и (2.11); в итоге имеем разрешающую систему уравнений на шаге  $[t_j, t_{j+1}]$ :

$$D \ddot{q}_{koj+1/2}^\circ = D^\circ \quad (2.12)$$

$$D = A^{-1} - W^\circ, \quad D^\circ = A^{-1} B + L^\circ$$

где  $D, D^\circ$  – блочно-диагональная матрица и вектор, характеризующие на шаге  $[t_j, t_{j+1}]$  систему "состав – мост".

Проследим ход решения всей задачи при  $j = 0, 1, 2, \dots$ . На шаге  $[t_j, t_{j+1}]$ , при начальных условиях в момент  $t_j$  определяется по (2.12) вектор  $\ddot{q}_{koj+1/2}^\circ$ ; далее, используя (2.10), (2.9) и (1.2), вычисляются поля смещений, скоростей и ускорений для системы  $\{e_h, e_h^\circ\}$  в момент  $t_{j+1}$ . Далее процесс повторяется.

3. Шаговая процедура реализована для обычного пассажирского состава из [3] и для высокоскоростного состава из [8] при движении по многопролетному мосту. Система  $\{e_h, e_h^\circ\}$  состояла из четырех типовых железобетонных, балочных пролетных строений одинаковой длины при  $EJ = 2,15 \cdot 10^7$  кн · м<sup>2</sup>,  $m = 8,2$  т/м,  $\mu = 0,00202$  с,  $l = 18$  м и шести вагонов. Четырехосный вагон состава моделировался плоской системой, состоящей из жестких тел, соединенных между собой упруговязкими связями (фиг. 2). Вертикальные смещения вагона определялись десятью обобщенными координатами. Путь считался гладким. Параметры вагона (для формирования матриц  $M_*^r, C_*^r, K_*^r$  в (2.2)) взяты из [3, 8], а мостового полотна из [3].

Система уравнений (2.12) меняла свой порядок с 1 до 12 в процессе численной реализации, при движении состава из [8] по мосту. На фиг. 3 показаны при  $v = 250$  км/ч зависимости вертикальных смещений первого колеса первого вагона  $q_1$  [см] (линия 1) и середины первого пролетного строения  $q_1^*$  (линия 2) от положения состава на проезжей части моста, т.е. положения первого колеса первого вагона, определяемого на фиг. 3 отрезком  $S = vt$ . Длина вагона составляла в [3] 24,52 м, в [8]

26 м. Шаг интегрирования  $\Delta t_j$  при  $n = 45$  в (1.2) выбирался равным  $\Delta t_j = 0,003$  с (в соответствии с жесткостью мостового полотна), при числе шагов по времени (для фиг. 3) равном 340. Отметим ожидаемое совпадение ординат графика на фиг. 3, соответствующее моменту, когда колесо первого вагона достигает середины первого пролета при  $S = 9$  м.

5. Предложенный метод позволяет исследовать поведение системы "состав – мост" при различных скоростях движения состава, включая критические (резонансные) зоны, когда период кинематического возбуждения пролетного строения однотипной движущейся нагрузкой совпадает, например, с одним из периодов собственных колебаний этого строения [3]; исследовать влияние неровностей на рельсовом пути на поведение системы "состав – мост"; исследовать влияние на колебания моста начального состояния въезжающего состава; дать оценки динамическим коэффициентам для пролетных строений и подвижного состава.

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда НИОКР МПС РФ.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Inglis S.E. A mathematical treatise on vibration in railway bridge. Cambridge: Univ. Press, 1934. 203 p.
2. Болотин В.В. Задача о колебаниях мостов под действием подвижной нагрузки // Изв. АН СССР. ОТД. Механика и машиностроение. 1961. № 4. С. 109–115.
3. Бондарь Н.Г., Козьмин Ю.Г., Тарасенко В.П. и др. Взаимодействие железнодорожных мостов с подвижным составом. М.: Транспорт, 1984. 272 с.
4. Филиппов А.П., Кохманюк С.С. Динамическое воздействие подвижных нагрузок на стержни. Киев: Наук. думка, 1967. 132 с.
5. Кохманюк С.С., Янютин Е.Г., Романенко Л.Г. Колебания деформируемых систем при импульсных и подвижных нагрузках. Киев: Наук. думка, 1980. 231 с.
6. Иванченко И.И. Расчеты на подвижные и импульсные нагрузки стержневых систем с распределенными параметрами // Прикл. механика. 1988. Т. 24. № 9. С. 109–118.
7. Иванченко И.И. К динамическому расчету мостов на подвижную нагрузку в виде железнодорожного состава // Строит. механика и расчет сооружений. 1989. № 6. С. 26–31.
8. Коган А.Я., Львов А.А., Левинзон М.А. Характеристики подвижного состава и спектральных неровностей пути для скоростей до 350 км/ч // Вестн. ВНИИЖТ. 1991. № 3. С. 10–14.

Москва

Поступила в редакцию  
9.1.1996