

УДК 539.3

© 1997 г. Н.Б. РАСУЛОВА

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В ПРИЗМАТИЧЕСКОМ БРУСЕ, ПОДВЕРЖЕННОМ ДЕЙСТВИЮ ОСЕВЫХ СИЛ

Исследуется задача о распространении нестационарных волн в упругой области, занятой прямоугольной полубесконечной призмой, подверженной действию осевых ударных нагрузок, распределенных по торцевой площади.

Рассматриваемый процесс описывается трехмерной системой уравнений Ляме и, учитывая ее характерную особенность, условия на торце были взяты в смешанном виде, так как известно, что при однотипных условиях эта система не поддается интегрированию.

Были применены преобразования Лапласа и Фурье, после чего эта система заменой неизвестных, сведена к уравнениям Гельмгольца, что позволило применить метод разделения переменных по отношению к поперечным координатам. Решения представлены в виде рядов, разложенных по собственным функциям, соответствующим случаю симметрично распределенных нагрузок на торце. Доказана сходимость рядов до и после перехода к обратным функциям преобразования, которые найдены точно, для любого момента времени.

Рассматривается полубесконечная прямоугольная призма, которая при выбранной декартовой координатной системе занимает часть пространства $-a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b, z \leq 0$, где $2a$ и $2b$ – размеры поперечного сечения.

В момент $t = 0$ призма, находящаяся в недеформированном состоянии, подвергается действию внезапно приложенных осевых сил, распределенных по торцевой площади. Очевидно, что напряженно-деформированное состояние данного тела описывается системой трехмерных уравнений Ляме, которая в векторной форме имеет следующий вид:

$$\rho \partial^2 \mathbf{U} / \partial t^2 = (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{U} + \mu \Delta \mathbf{U}, \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}(u, v, w) \quad (1)$$

где \mathbf{U} – вектор перемещений, ρ – плотность материала.

Начальные условия – нулевые

$$u = v = w = 0$$

$$\partial u / \partial t = \partial v / \partial t = \partial w / \partial t \quad \text{при } t = 0 \quad (2)$$

а граничные условия выбраны в виде

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{zz} = \sigma_0(x, y) f(t) \\ u = v = 0 \end{array} \right\} \quad \text{при } z = 0 \quad (3)$$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{xx} = 0 \\ v = w = 0 \end{array} \right\} \quad \text{при } x = \pm a, \quad \left. \begin{array}{l} \sigma_{yy} = 0 \\ u = w = 0 \end{array} \right\} \quad \text{при } y = \pm b \quad (4)$$

Условия (3), (4) могут соответствовать случаю, когда к поверхности тела приклеена нерастяжимая гибкая мембрана, так как только при этих условиях точки поверхности свободны в направлении перпендикулярном к ней в данной же точке.

Уравнения (1) после использования преобразования Лапласа по t и преобразований Фурье по z с учетом (2) и (3) примут вид

$$\begin{aligned}
 (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}_s}{\partial x \partial y} - q \frac{\partial \mathbf{w}_c}{\partial x} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_s}{\partial y^2} - q^2 \mathbf{u}_s \right) &= \rho p^2 \mathbf{u}_s \\
 (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}_s}{\partial y^2} - q \frac{\partial \mathbf{w}_c}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 \mathbf{v}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}_s}{\partial y^2} - q^2 \mathbf{v}_s \right) &= \rho p^2 \mathbf{v}_s \\
 (\lambda + \mu) \left(q \frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial x} + q \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial y} - q^2 \mathbf{w}_c \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 \mathbf{w}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{w}_s}{\partial y^2} - q^2 \mathbf{w}_c \right) &= \rho p^2 \mathbf{w}_c + \sigma_0(x, y) \mathbf{f}(p)
 \end{aligned} \tag{5}$$

где p и q – параметры преобразований Лапласа и Фурье, а индексы s и c указывают соответственно на \sin и \cos преобразований Фурье.

Граничные условия (4) запишем в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned}
 (\lambda + 2\mu) \partial \mathbf{u}_s / \partial x + \lambda (\partial \mathbf{v}_s / \partial y - q \mathbf{w}_c) &= 0 \\
 \mathbf{v}_s = 0, \mathbf{w}_c = 0
 \end{aligned} \right\} \text{при } x = \pm a$$

$$\left. \begin{aligned}
 (\lambda + 2\mu) \partial \mathbf{v}_s / \partial y + \lambda (\partial \mathbf{u}_s / \partial x - q \mathbf{w}_c) &= 0 \\
 \mathbf{u}_s = 0, \mathbf{w}_c = 0
 \end{aligned} \right\} \text{при } y = \pm b$$

Вводя три новые функции: $\varphi(x, y)$, $\psi_1(x, y)$, $\psi_2(x, y)$ по формулам

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_s &= \partial \varphi / \partial x + \partial \psi_1 / \partial y - q \partial \psi_2 / \partial x \\
 \mathbf{v}_s &= \partial \varphi / \partial y - \partial \psi_1 / \partial x - q \partial \psi_2 / \partial y \\
 \mathbf{w}_c &= q \varphi - \partial^2 \psi_1 / \partial x^2 - q \partial^2 \psi_2 / \partial y^2
 \end{aligned} \tag{6}$$

систему (5) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x} [(\lambda + 2\mu)(H_1 \varphi) - \mu q (H_2 \psi_2)] + \mu \frac{\partial}{\partial y} (H_2 \psi_1) &= 0 \\
 \frac{\partial}{\partial y} [(\lambda + 2\mu)(H_1 \varphi) - \mu q (H_2 \psi_2)] - \mu \frac{\partial}{\partial x} (H_2 \psi_1) &= 0 \\
 (\lambda + 2\mu) q (H_1 \varphi) - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} (H_2 \psi_2) - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} (H_2 \psi_2) &= \sigma_0(x, y) \mathbf{f}(p) \\
 H_i &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \left(\frac{p^2}{c_i^2} + q^2 \right)
 \end{aligned}$$

где H_i ($i = 1, 2$) – операторы Гельмгольца, а $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu) / \rho}$, $c_2 = \sqrt{\mu / \rho}$ – соответственно скорости продольных и поперечных волн.

Первые два уравнения дают

$$\mu q H_2 \psi_2 - (\lambda + 2\mu) H_1 \varphi = \xi(x, y), \quad H_2 \psi_1 = \eta(x, y)$$

где $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$ – пара гармонических функций, связанных друг с другом соотношениями Коши–Римана, но, как следует из (6), поля перемещений, соответствующих этим решениям, тождественно равны нулю, поэтому нужно брать

$$\begin{aligned}
 \mu q H_2 \psi_2 &= (\lambda + 2\mu) H_1 \varphi & (7) \\
 H_2 \psi_1 &= 0 & (8)
 \end{aligned}$$

Учитывая (7), можно получить двухкратное уравнение Гельмгольца

$$H_0 H_2 \psi_2 = - \frac{\sigma_0(x, y)}{\mu} \mathbf{f}(p), \quad H_0 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - q^2 \tag{9}$$

Уравнение (8) имеет очевидное решение $\psi_1 \equiv 0$ в силу отсутствия всякого рода крутильных движений.

Система уравнений (7) и (9) должна определить ϕ и ψ_2 , соответственно продольный и поперечный потенциалы. Примем, что $\sigma_0(x, y)$ – симметричная функция относительно обеих координат x и y . Тогда нетрудно убедиться, что функции

$$\begin{aligned} \phi_{km} &= \cos \alpha_k x \cos \beta_m y, & \phi_{2km} &= \cos \alpha_k x \cos \beta_m y \\ \alpha_k &= (\frac{1}{2} + k)\pi / a, & \beta_m &= (\frac{1}{2} + m)\pi / b \end{aligned} \quad (10)$$

удовлетворяют всем граничным условиям, поэтому они могут служить собственными функциями задачи. Тогда общие решения будем искать в виде

$$\phi = \sum_k \sum_m A_{km} \cos \alpha_k x \cos \beta_m y, \quad \psi_2 = \sum_k \sum_m B_{km} \cos \alpha_k x \cos \beta_m y \quad (11)$$

Совместное решение уравнений (7) и (9) определяет A_{km} и B_{km} :

$$A_{km} = \frac{f(p)q}{\lambda + 2\mu} \frac{\sigma_{km}}{(\alpha_k^2 + \beta_m^2 + p^2 / c_1^2 + q^2)(\alpha_k^2 + \beta_m^2 + q^2)} \quad (12)$$

$$B_{km} = \frac{f(p)}{\mu} \frac{\sigma_{km}}{(\alpha_k^2 + \beta_m^2 + p^2 / c_2^2 + q^2)(\alpha_k^2 + \beta_m^2 + q^2)} \quad (13)$$

$$\sigma_{km} = \frac{1}{ab} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \sigma_0(x, y) \cos \alpha_k x \cos \beta_m y dx dy \quad (14)$$

Сходимость рядов (11) вплоть до произведений третьего порядка в выражениях (12) и (13) очевидна.

Нахождение обратных преобразований функций вида (12) или (13) не представляет большого труда. Не вдаваясь в подробности, можно привести готовые решения.

$$u = \sum_k \sum_m \frac{\sigma_{km}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\Omega_{km}^{(1)} c_1}{\lambda + 2\mu} + \frac{\Omega_{km}^{(2)} c_2}{\mu} \right) \alpha_k \sin \alpha_k x \cos \beta_m y \quad (15)$$

$$v = \sum_k \sum_m \frac{\sigma_{km}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\Omega_{km}^{(1)} c_1}{\lambda + 2\mu} + \frac{\Omega_{km}^{(2)} c_2}{\mu} \right) \beta_m \cos \alpha_k x \sin \beta_m y \quad (16)$$

$$w = \sum_k \sum_m \frac{\sigma_{km}}{\sqrt{2\pi}} \gamma_{km} \left(\frac{\overline{\Omega}_{km}^{(1)} c_1}{\lambda + 2\mu} + \frac{\overline{\Omega}_{km}^{(2)} c_2}{\mu} \right) \cos \alpha_k x \cos \beta_m y \quad (17)$$

$$\Omega_{km}^{(i)} = f(t) * \int_0^{c_i t} J_0 \left(\gamma_{km} \sqrt{c_i^2 t^2 - \tau^2} \right) \{ e^{-\gamma_{km}(z+\tau)} + \text{sign}(z-\tau) e^{-\gamma_{km}|z-\tau|} \} d\tau$$

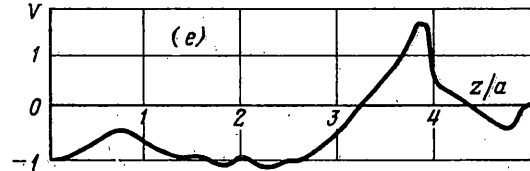
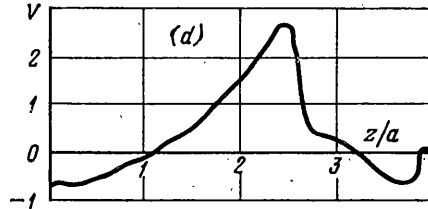
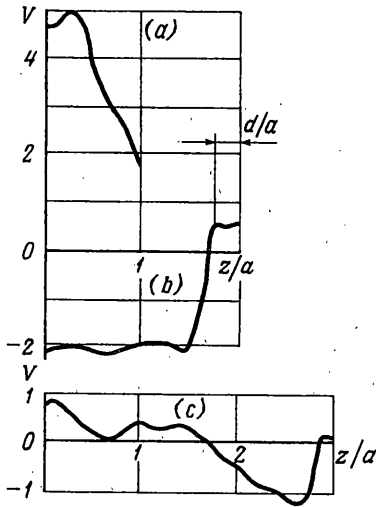
$$\overline{\Omega}_{km}^{(i)} = f(t) * \int_0^{c_i t} J_0 \left(\gamma_{km} \sqrt{c_i^2 t^2 - \tau^2} \right) \{ e^{-\gamma_{km}(z+\tau)} + e^{-\gamma_{km}|z-\tau|} \} d\tau \quad (i=1, 2), \quad \gamma_{km} = \sqrt{\alpha_k^2 + \beta_m^2}$$

где знак (*) указывает на свертки функций. Заметим, что эти формулы были выведены с использованием второй теоремы о разложении, теоремы о свертках и таблиц, приведенных в [1].

Сходимость рядов (15)–(17) и их производных очевидна из-за наличия экспоненциальных членов в выражениях $\Omega_{km}^{(i)}$ ($i=1, 2$).

Следует отметить, что эти решения верны для любой симметричной функции $\sigma_0(x, y)$, интегрируемой в области $-a \leq x \leq a$; $-b \leq y \leq b$. Заметим, что для $\sigma_0(x, y) = \sigma_0 = \text{const}$: $\sigma_{km} = 4\sigma_0(-1)^{k+m} / (ab\alpha_k\beta_m)$.

Полученные решения показывают следующую волновую картину: по призме в направлении оси z независимо друг от друга распространяются волны: продольная со скоростью c_1 и поперечная со скоростью c_2 . Что касается отражения волн от боковых



поверхностей, здесь можно лишь утверждать, что каждый тип волн вызывает отражения этого же типа, а не другого. При условии (4) этот результат может казаться правдоподобным, хотя этого нельзя ожидать от случая свободных боковых поверхностей.

На основе полученных формул произведен расчет скоростей частиц тела для случая $\sigma_0(x, y) = \text{const}$, $f(t) = H(t)$ и $a = b$. Учитывая подобность зависимости величин от координат и времени при обоих движениях, анализ приведен только для продольного движения.

Построены графики скорости $V = \pi^{3/2}(\lambda + 2\mu)\dot{W} / (2\sqrt{2}\sigma_0 c_1)$ частиц центральной оси ($x = 0, y = 0$) от осевой координаты z для последовательных значений времени. За единицу времени взято $t_0 = a/c_1$. Процесс, происходящий за время $1 \cdot t_0$, показан на фигуре, а, представляя переднюю часть возмущений. Дифракционные волны, исходящие от боковых границ, еще не достигли центральной оси. Начиная с этого момента эти волны окажут свое влияние, как показывают последующие графики. Со временем ширина пика на переднем фронте уменьшается по закону $d = c_1 t - \sqrt{c_1^2 t^2 - a^2}$.

Дифракционные волны с момента своего действия резко меняют значения скорости, при этом сильно тормозя продвижение ударяющего тела в направлении оси z . По мере ослабления эффекта торможения в условиях активного нагружения появляется новая волна. На фигуре, в на стадии формирования, но в последующий момент $t = 4t_0$ (фигуре, с) благодаря дисперсии волн образуется резкий фронт, который снова преследуют волны торможения от границ. В последующий момент, когда $t = 5t_0$ (фигуре, d), эта картина почти сохранится. Не исключено, что колебания скоростей будут повторяться, возможно, с меньшей амплитудой.

Первый вывод, который сразу можно сделать, это факт затухания волн вдоль оси z . Заметим, что если коэффициент Пуассона $\nu = 1/3$, то $c_2 = 1/2c_1$, тогда кривые 1, а и 1, в с точностью до некоторого постоянного множителя дают распределения скоростей поперечного движения соответственно для моментов $t = 2t_0$ и $t = 4t_0$.

Автор выражает глубокую признательность Д.Г. Агаларову и Н. Аккаш за ряд полезных замечаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Физматгиз, 1961. 524 с.

Баку

Поступила в редакцию
27.XII.1995