

УДК 531.36

© 1997 г. Д.Д. ЛЕЩЕНКО

ЭВОЛЮЦИЯ ВРАЩЕНИЙ ТРЕХОСНОГО ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ МОМЕНТА СИЛ СВЕТОВОГО ДАВЛЕНИЯ

Исследованию движения спутника относительно центра масс под действием моментов сил различной природы (гравитационных, магнитных, светового давления и др.) посвящено много работ (см. [1–7] и приведенную в этих работах библиографию). Оценка величины моментов возмущающих сил [1] показывает, что на высотах, больших 35000–40000 км над поверхностью Земли, на космические аппараты существенное влияние оказывает момент сил светового давления. При помощи метода усреднения исследуется вызванное моментом сил светового давления движение относительно центра масс близкого к динамически-сферическому космического аппарата в случае, когда аппарат представляет собой тело вращения. При этом коэффициент момента сил светового давления аппроксимируется тригонометрическим полиномом.

1. Исходные предположения и постановка задачи. Рассмотрим движение космического аппарата относительно центра масс под действием момента сил светового давления. Аппарат движется по эллиптической орбите вокруг Солнца. Введем три правых декартовых системы координат, начало координат совместим с центром инерции спутника [1, 2]. Система координат $OXYZ$ движется поступательно вместе со спутником, ось Y параллельна нормали к плоскости орбиты, ось Z – направлению радиус-вектора орбиты в ее перигелии, ось X – направлению вектора скорости центра масс спутника в перигелии. Положение вектора кинетического момента L в системе координат $OXYZ$ определим углами ρ и σ , как показано в [1, 2, 4] (L – кинетический момент тела относительно его центра масс). Для построения системы координат OL_1L_2L , связанной с вектором L , в плоскости OYL проведем ось L_1 , перпендикулярную к вектору L и составляющую тупой угол с осью Y . Ось L_2 дополняет оси L_1 и L до правой системы координат. Оси связанной системы координат $Ox_1x_2x_3$ совместим с главными центральными осями инерции спутника. Взаимное положение главных центральных осей инерции и осей L, L_1, L_2 определим углами Эйлера φ, ψ, θ [1, 2, 4]. При этом направляющие косинусы (α_{ij}) осей x, y, z относительно системы OL_1L_2L выражаются через углы Эйлера φ, ψ, θ по известным формулам [1].

Будем пренебрегать моментами всех сил, кроме сил светового давления. Допустим, что поверхность аппарата представляет собой поверхность вращения, причем единичный орт оси симметрии k направлен по оси Oz . Как показано в [1, 3, 5], в этом случае для момента сил светового давления M , действующего на спутник, имеет место формула

$$M = (a_c(\epsilon_s)R_0^2 / R^2)\epsilon_s \times k \quad (1.1)$$

$$a_c(\epsilon_s)R_0^2 / R^2 = p_c S(\epsilon_s) z'_0(\epsilon_s), \quad p_c = (E_0 / c)(R_0 / R)^2$$

Здесь e_r – единичный вектор по направлению радиус-вектора орбиты, ϵ_s – угол между направлениями e_r и k , так что $|e_r \times k| = \sin \epsilon_s$, R – текущее расстояние от центра Солнца до центра масс спутника, R_0 – фиксированное значение R , например, в начальный момент времени, $a_c(\epsilon_s)$ – коэффициент момента сил светового давления, S – площадь "тени" на плоскости, нормальной к потоку, z'_0 – расстояние от центра масс до центра давления, p_c – величина светового давления на расстоянии R от центра Солнца, c – скорость света, E_0 – величина потока энергии светового давления на расстоянии R_0 от центра Солнца. Если R_0 – радиус орбиты Земли, тогда $p_{c0} = 4,64 \cdot 10^{-6}$ Н/м².

Далее полагаем [1] $a_c = a_c(\cos \epsilon_s)$ и аппроксимируем a_c полиномами по степеням $\cos \epsilon_s$. Момент сил светового давления имеет силовую функцию, зависящую только от ориентации оси симметрии тела в пространстве [1]. Представим функцию $a_c(\cos \epsilon_s)$ в виде

$$a_c = a_0 + a_1 \cos \epsilon_s + \dots + a_N \cos^N \epsilon_s \quad (1.2)$$

Уравнения возмущенного движения спутника при наличии силовой функции в переменных $L, \rho, \sigma, \varphi, \psi, \theta$ имеют вид [2, 4]:

$$\dot{\sigma} = (L \sin \rho)^{-1} \partial U / \partial \rho, \quad \dot{\rho} = -(L \sin \rho)^{-1} \partial U / \partial \sigma + L^{-1} \operatorname{ctg} \rho \partial U / \partial \psi, \quad \dot{L} = \partial U / \partial \psi \quad (1.3)$$

$$\dot{\theta} = L \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi (A^{-1} - B^{-1}) - (L \sin \theta)^{-1} \partial U / \partial \varphi + L^{-1} \operatorname{ctg} \theta \partial U / \partial \psi$$

$$\dot{\varphi} = L \cos \theta (C^{-1} - A^{-1} \sin^2 \varphi - B^{-1} \cos^2 \varphi) + (L \sin \theta)^{-1} \partial U / \partial \theta$$

$$\dot{\psi} = L (A^{-1} \sin^2 \varphi + B^{-1} \cos^2 \varphi) - L^{-1} (\partial U / \partial \rho \operatorname{ctg} \rho + \partial U / \partial \theta \operatorname{ctg} \theta)$$

Силовая функция U зависит от времени t через истинную аномалию $v(t)$ и от направляющих косинусов $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ оси Oz относительно системы координат $OXYZ$; она имеет вид $U = U(v(t), \alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$.

К системе уравнений (1.3) необходимо присоединить уравнение, описывающее изменение истинной аномалии со временем

$$dv / dt = \omega_0 (1 - e^2)^{-3/2} (1 + e \cos v)^2 \quad (1.4)$$

$$\omega_0 = 2\pi / T_0 = [\kappa (1 - e^2)^3 P^{-3}]^{1/2}$$

Здесь ω_0 – средняя угловая скорость движения центра масс по эллиптической орбите, T_0 – период обращения спутника, e и P – эксцентриситет и фокальный параметр орбиты соответственно, κ – произведение постоянной всемирного тяготения на массу Солнца.

Момент сил (1.1) соответствует силовой функции

$$U(\cos \epsilon_s) = -R_0^2 R^{-2} \int a_c(\cos \epsilon_s) d(\cos \epsilon_s)$$

Рассмотрим вначале

$$a_c(\cos \epsilon_s) = a_n \cos^n \epsilon_s \quad (1.5)$$

Силовая функция в этом случае имеет вид

$$U_n(\cos \epsilon_s) = -\frac{a_n R_0^2}{(n+1) R^2} \cos^{n+1} \epsilon_s \quad (1.6)$$

$$\cos \epsilon_s = \gamma_3 \cos v + \alpha_3 \sin v$$

Направляющие косинусы α_3, γ_3 выражаются через $\rho, \sigma, \theta, \psi$ по известным формулам [1].

Пусть главные центральные моменты инерции спутника близки друг к другу и представимы в виде

$$A = J_0 + \varepsilon A', \quad B = J_0 + \varepsilon B', \quad C = J_0 + \varepsilon C' \quad (1.7)$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$ – малый параметр. Предположим также, что $a_0 \sim \varepsilon, a_1 \sim \varepsilon, \dots, a_N \sim \varepsilon$, т.е. моменты сил светового давления имеют тот же порядок величины ε , что и гироскопические моменты. Из (1.6) следует, что $U \sim \varepsilon$. Исследуем решение системы (1.3), (1.4) при малом ε на большом промежутке времени $t \sim \varepsilon^{-1}$. Погрешность усредненного решения для медленных переменных составляет величину $O(\varepsilon)$ на интервале времени, за которой тело совершит порядка ε^{-1} оборотов. Независимое усреднение по ψ, v проводим как для нерезонансных случаев [2].

2. Преобразование выражения силовой функции, процедура усреднения и построение системы первого приближения. Рассмотрим невозмущенное движение ($\varepsilon = 0$), когда уравнения (1.3), (1.4) описывают движение сферически симметричного тела и момент сил светового давления (1.1) равен нулю. Из системы (1.3) в этом случае получим, что σ, ρ, L, θ и ϕ постоянны, а

$$\psi = LJ_0^{-1}t + \psi_0, \quad \psi_0 = \text{const} \quad (2.1)$$

что соответствует равномерному вращению спутника вокруг вектора кинетического момента L , который движется поступательно. При малом $\varepsilon \neq 0$ в системе семи уравнений (1.3), (1.4) с учетом (1.7) медленными переменными являются величины $\sigma, \rho, L, \theta, \phi$, а быстрыми – ψ и v . Для получения решения в первом приближении достаточно просто усреднить правые части уравнений (1.3), подставив в них v из решения уравнения (1.4) и ψ из (2.1). Предполагаем, что для частот ω_0 и LJ_0^{-1} не выполняются резонансные соотношения $m_1\omega_0 + n_1LJ_0^{-1} \neq 0$, где m_1 и n_1 – любые целые числа. Как показано в [2], в этом предположении усреднение по времени можно заменить независимым усреднением по переменным ψ и $v(t)$ по определенной схеме. Усреднение по времени функций, зависящих от v , сводится, в силу (1.4), к усреднению по v следующим образом:

$$\begin{aligned} M_t\{f(v)\} &= \frac{1}{T} \int_0^T f(v) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1-e^2)^{3/2} f(v) dv}{(1+e \cos v)^2} = (1-e^2)^{3/2} M_v \left\{ \frac{f(v)}{(1+e \cos v)^2} \right\} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Сомножитель $\cos^{n+1} \varepsilon_s$ выражения силовой функции (1.6) можно представить в виде

$$\cos^{n+1} \varepsilon_s = (d + g \cos v)^{n+1} \quad (2.3)$$

$$d = \cos \theta \sin \rho \cos(\sigma - v), \quad v = \psi - \chi$$

$$g = \{\sin^2 \theta [\sin^2(\sigma - v) \sin^2 \rho + \cos^2 \rho]\}^{1/2}$$

$$\cos \chi = \sin \theta \sin(\sigma - v) \{\sin^2 \theta [\sin^2(\sigma - v) \sin^2 \rho + \cos^2 \rho]\}^{-1/2},$$

$$\sin \chi = \sin \theta \cos \rho \cos(\sigma - v) \{\sin^2 \theta [\sin^2(\sigma - v) \sin^2 \rho + \cos^2 \rho]\}^{-1/2}$$

Используя формулу бинома Ньютона, выразим правую часть (2.3) следующим образом:

$$(d + g \cos v)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k \cos^k v (g^k d^{n+1-k}) \quad (2.4)$$

С помощью известных выражений для направляющих косинусов $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ оси z относительно системы координат $OXYZ$ [1] получим среднее по ψ значение силовой функции. Для этого определим

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (d + g \cos v)^{n+1} dv = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k g^k d^{n+1-k} I_k \quad (2.5)$$

$$I_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^k v dv, \quad I_{2m+1} = 0, \quad I_{2m} = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}$$

Таким образом, для искоемых выражений (2.5) имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (d + g \cos v)^{n+1} dv = \sum_{m=0}^{E\left(\frac{n+1}{2}\right)} C_{n+1}^{2m} \times (g^{2m} d^{n+1-2m}) \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \quad (2.6)$$

где $E(z)$ означает целую часть числа z . В результате усреднения по ψ получим с учетом (2.6):

$$U_n = -\frac{a_n R_0^2}{(n+1)R^2} \sum_{m=0}^{E\left(\frac{n+1}{2}\right)} C_{n+1}^{2m} \times (g^{2m} d^{n+1-2m}) \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \quad (2.7)$$

Для упрощения записи усредненные выражения будем обозначать теми же символами, что и до усреднения.

Проведем усреднение по v согласно (2.2). Заметим, что с учетом уравнения движения центра масс по эллиптической орбите имеем $R = P(1 + e \cos v)^{-1}$, поэтому на основании (2.2) и (2.7) выражения $(1 + e \cos v)^2$ в формуле для U_n сокращаются.

Обозначим $u = \sigma - v$; тогда $d = h \cos u$, где $h = \cos \theta \sin \rho$. Выражение g^{2m} в (2.7) представим в виде

$$g^{2m} = \{\sin^2 \theta \{\sin^2(\sigma - v) \sin^2 \rho + \cos^2 \rho\}\}^m = \\ = (b + q \sin^2 u)^m, \quad b = \sin^2 \theta \cos^2 \rho, \quad q = \sin^2 \theta \sin^2 \rho$$

Вновь применяя формулу бинома Ньютона, получим

$$(b + q \sin^2 u)^m = \sum_{k=0}^m C_m^k \sin^{2k} u (q^k b^{m-k})$$

Для второго усреднения по $u = \sigma - v$ необходимо рассмотреть интеграл вида

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (b + q \sin^2 u)^m (h \cos u)^{n-2m+1} du = \\ = \sum_{k=0}^m C_m^k (q^k b^{m-k}) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^{2k} u (h \cos u)^{n+1-2m} du = \\ = \sum_{k=0}^m h^{n+1-2m} C_m^k (q^k b^{m-k}) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^{2k} u (\cos u)^{n+1-2m} du$$

Полученный интеграл вычисляется в явном виде [8], причем при $n = 2l$ он равен нулю.

Пусть $n = 2l + 1$ – нечетная степень, тогда имеем

$$k = 0, 1, \dots, m; \quad m = 0, 1, \dots, \quad E\left(\frac{n+1}{2}\right) = l + 1$$

После усреднения (2.7) по $u = \sigma - v$ получим

$$U_{2l+1} = -\delta_l \sum_{m=0}^{l+1} \sum_{k=0}^m A_{lmk} (\cos \theta)^{2(l+1-m)} \times \\ \times \sin^{2m} \theta (\sin \rho)^{2(l+1-m+k)} (\cos \rho)^{2(m-k)} \quad (2.8)$$

$$\delta_l = \frac{a_{2l+1} R_0^2 (1-e^2)^{3/2}}{2(l+1)P^2}$$

$$A_{lmk} = C_{2(l+1)}^{2m} C_m^k \frac{(2m-1)!!(2k-1)!![2(l+1-m)-1]!!}{(2m)!![2(k+l+1-m)]!!}$$

Силовая функция для коэффициента момента сил светового давления вида (1.2) записывается следующим образом:

$$U(\theta, \rho) = \sum_{l=0}^Q U_{2l+1}(\theta, \rho), \quad Q = E\left(\frac{N-1}{2}\right) \quad (2.9)$$

Таким образом, в первом приближении коэффициент момента сил светового давления (1.2) эквивалентен следующему:

$$a_c \sim \tilde{a}_c = \sum_{l=0}^Q a_{2l+1} (\cos \varepsilon_s)^{2l+1} \quad (2.10)$$

поскольку четные гармоники коэффициента момента сил светового давления выпадают при усреднении.

Вычисляя частные производные $\partial U / \partial \rho$, $\partial U / \partial \theta$ от функции (2.8) с учетом (2.9) и учитывая тождества $\partial U / \partial \sigma = \partial U / \partial \psi = \partial U / \partial \varphi \equiv 0$ находим, что усредненная система первого приближения принимает вид

$$\sigma^* = -2\delta_l (L \sin \rho)^{-1} \partial U / \partial \rho \quad (2.11)$$

$$\rho^* = 0, \quad L^* = 0, \quad \theta^* = L \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi (A^{-1} - B^{-1})$$

$$\varphi^* = L \cos \theta (C^{-1} - A^{-1} \sin^2 \varphi - B^{-1} \cos^2 \varphi) - 2\delta_l (L \sin \theta)^{-1} \partial U / \partial \theta$$

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = \sum_{l=0}^Q \sum_{m=0}^{l+1} \sum_{k=0}^m A_{lmk} (\cos \theta)^{2(l+1-m)} \times$$

$$\times \sin^{2m} \theta (\sin \rho)^{2(l-m+k)+1} (\cos \rho)^{2(m-k)-1} [(l+1) \cos^2 \rho + k - m]$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = \sum_{l=0}^Q \sum_{m=0}^{l+1} \sum_{k=0}^m A_{lmk} (\sin \rho)^{2(l+1-m+k)} \times$$

$$\times (\cos \rho)^{2(m-k)} (\cos \theta)^{2(l-m)+1} (\sin \theta)^{2m-1} [m - (l+1) \sin^2 \theta]$$

Коэффициенты δ_l и A_{lmk} определены в (2.8). Заметим, что коэффициенты a_{2l} разложения (1.2), содержащие четные степени, при усреднении исчезают. Далее подлежит исследованию система (2.11). Вектор кинетического момента остается постоянным по величине и постоянно наклоненным к нормали к плоскости орбиты. Рассмотрим уравнения для определения углов нутации θ и собственного вращения φ (2.11). Они описывают движение вектора кинетического момента \mathbf{L} относительно тела.

3. Исследование уравнений для θ , φ . Уравнения для определения θ и φ (2.11) приводятся к виду (в медленном времени ξ):

$$\theta' = \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi \quad (3.1)$$

$$\varphi' = \cos \theta (\mu - \sin^2 \varphi) - 2\delta_l B^{-1} L_0^{-2} (\sin \theta)^{-1} \partial U(\theta, \rho_0) / \partial \theta$$

$$\xi_z = L_0 \beta t, \quad \mu = -\gamma / \beta, \quad \beta = A^{-1} - B^{-1}, \quad \gamma = B^{-1} - C^{-1}$$

Параметр δ_l определен в (2.8), а $\partial U(\theta, \rho_0) / \partial \theta$ введено в (2.11). Величины L_0, ρ_0 в (3.1) — это значения L, ρ в начальный момент времени. С учетом соотношений (1.7) и предположения $a_{2l+1} \sim \varepsilon$ ($l = 0, \dots, Q$), получим, что $\beta, \gamma, \delta_l \sim \varepsilon$. Для системы (3.1) имеет место первый интеграл

$$c = \sin^2 \theta (\mu - \sin^2 \varphi) - 4\delta_l \beta^{-1} L_0^{-2} f(\theta, \rho_0) \quad (3.2)$$

$$f(\theta, \rho_0) = \sum_{l=0}^Q \sum_{m=0}^{l+1} \sum_{k=0}^m A_{lmk} \left[\frac{m^{l-m}}{2} \sum_{i=0}^{l-m} C_{l-m}^i \times \frac{(-1)^i (\sin \theta)^{2(m+i)}}{m+i} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (l+1) \sum_{i=0}^{l-m} \frac{(-1)^i (\sin \theta)^{2(m+i+1)}}{m+i+1} \right] (\sin \rho_0)^{2(l+1-m+k)} (\cos \rho_0)^{2(m-k)}$$

в чем можно убедиться непосредственной проверкой.

Для дальнейших исследований более удобно преобразованное выражение первого интеграла (3.2)

$$c = \sin^2 \theta (\mu - \sin^2 \varphi) - 4\delta_l \beta^{-1} L_0^{-2} F(\theta, \rho_0) \quad (3.3)$$

$$F(\theta, \rho_0) = \sum_{l=0}^Q \left\{ \left[-C_{2(l+1)}^0 \frac{(l+1)}{2} \sum_{i=0}^l C_l^i \frac{(-1)^i (\sin \theta)^{2i+1}}{i+1} \right] \times \right. \\ \times (\sin \rho_0)^{2(l+1)} \frac{[2(l+1)-1]!!}{[2(l+1)]!!} + \sum_{m=1}^l \sum_{k=0}^m A_{lmk} \times \\ \times \left[\frac{m^{l-m}}{2} \sum_{i=0}^{l-m} \frac{(-1)^i (\sin \theta)^{2(m+i)}}{m+i} - \frac{(l+1)^{l-m}}{2} \sum_{i=0}^{l-m} C_{l-m}^i \times \right. \\ \left. \times \frac{(-1)^i (\sin \theta)^{2(m+i+1)}}{m+i+1} \right] (\sin \rho_0)^{2(l+1-m+k)} \times \\ \left. \times (\cos \rho_0)^{2(m-k)} + \frac{[2(l+1)-1]!! (\sin \theta)^{2(l+1)}}{[2(l+1)]!! 2} \sum_{k=0}^{l+1} C_{l+1}^k (\sin \rho_0)^{2k} (\cos \rho_0)^{2(l+1-k)} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \right\}$$

При отсутствии влияния момента сил светового давления, т.е. при $a_{2l+1} = 0$ ($l = 0, \dots, Q$) система (3.1) приводится к виду

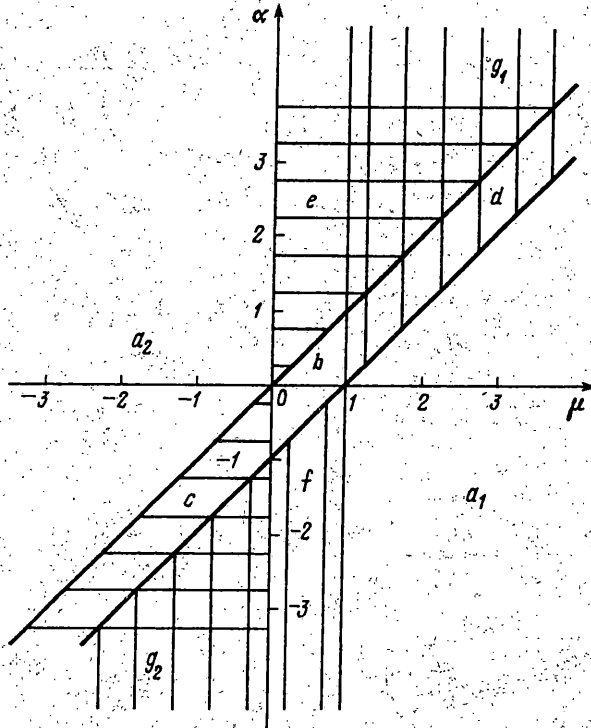
$$\theta' = \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi, \quad \varphi' = \cos \theta (\mu - \sin^2 \varphi) \quad (3.4)$$

Для случая $n = 1$ ($l = 0$), рассмотренного в [7], первый интеграл (3.3) записывается следующим образом:

$$c = \sin^2 \theta (\mu^* - \sin^2 \varphi) = \sin^2 \theta_0 (\mu^* - \sin^2 \varphi_0) = \text{const} \quad (3.5)$$

$$\mu^* = (\alpha - \gamma) / \beta, \quad \alpha = -\frac{1}{2} (1 - e^2)^{\frac{3}{2}} a_1 R_0^2 P^{-2} L_0^{-2} (1 - \frac{1}{2} \sin^2 \rho_0)$$

Выражение μ^* с точностью до $\frac{1}{2}$ совпадает с аналогичным выражением из [7]. Это



Фиг. 1

объясняется тем, что в [7] функция $a_c(\cos \epsilon_s)$ представлена в виде $a_c = a_0 + 2a_1 \cos \epsilon_s$. Как отмечалось, коэффициент a_0 при усреднении исчезает.

4. Частный случай. Представим функцию $a_c(\cos \epsilon_s)$ в виде

$$a_c = \sum_{k=0}^Q a_{2k} \cos^{2k} \epsilon_s + a_3 \cos^3 \epsilon_s \quad (4.1)$$

В этом случае уравнения для определения θ и φ , как следует из (3.1), принимают вид (остаются члены, обусловленные a_3):

$$\theta' = \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi, \quad (\dots)' = d/d\xi \quad (4.2)$$

$$\varphi' = \cos \theta (\mu - \sin^2 \varphi - \alpha \sin^2 \theta)$$

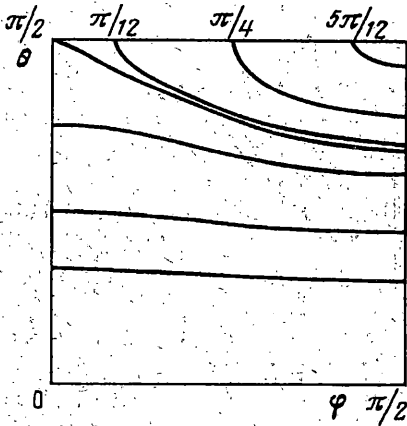
$$\mu = -\frac{\gamma}{\beta} - \alpha \beta s, \quad \alpha = \frac{3a_3 R_0^2}{64 L_0^2 P^2} (1 - e^2)^{3/2} \times$$

$$\times (8 - 40 \sin^2 \rho_0 + 35 \sin^4 \rho_0), \quad s = \frac{4 \sin^2 \rho_0 (4 - 5 \sin^2 \rho_0)}{8 - 40 \sin^2 \rho_0 + 35 \sin^4 \rho_0}$$

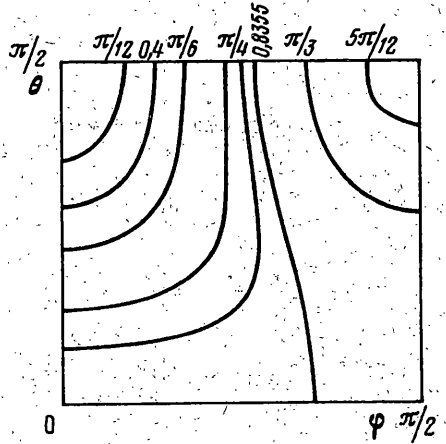
Величины ξ , β , γ определены в (3.1). С учетом соотношения (1.7) и предположения $a_3 \sim \epsilon$ получим, что β , α , γ — величины $\sim \epsilon$.

Для системы (4.2) имеет место первый интеграл, который можно получить непосредственно или из выражения первого интеграла для функции a_c , аппроксимируемой тригонометрическим полиномом произвольного порядка, (3.3) при $n = 3$ ($l = 1$):

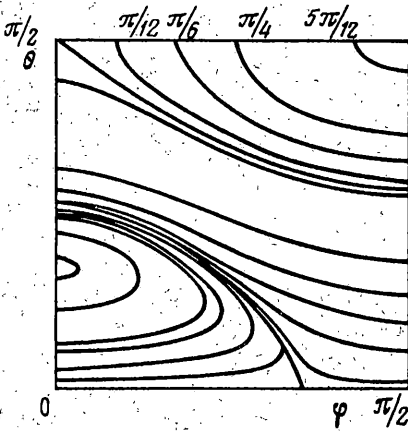
$$c = \sin^2 \theta (\mu - \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} \alpha \sin^2 \theta) = \sin^2 \theta_0 (\mu - \sin^2 \varphi_0 - \frac{1}{2} \alpha \sin^2 \theta_0) = \text{const} \quad (4.3)$$



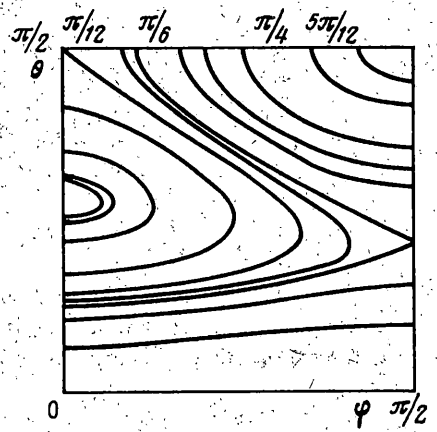
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Проведем качественный анализ фазовой плоскости (θ, φ) . Исследуем систему для θ и φ (4.2) с первым интегралом c (4.3). В этой системе переменные θ, φ изменяются в пределах $0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi$, а параметр μ может принимать произвольные значения $-\infty < \mu < +\infty$ (в зависимости от соотношений между моментами инерции). Область D допустимых значений параметров (α, μ) приведена на фиг. 1.

Определим стационарные точки уравнений (4.2), приравняв нулю их правые части.
 1. $\cos \theta = 0, \theta = \pm\pi/2; \varphi = 0, \pi, \pm\pi/2$. Эти точки существуют во всей плоскости (μ, α) .

2. $\sin \theta = 0, \theta = 0, \pi; \mu - \sin^2 \varphi = 0, 0 \leq \mu \leq 1, \varphi = \pm \arcsin \sqrt{\mu}, \varphi = \pm \arcsin \sqrt{\mu} + \pi$. Эти точки существуют в полосе $0 \leq \mu \leq 1$.

3. $\varphi = 0, \pi; \mu - \alpha \sin^2 \theta = 0, 0 < \mu/\alpha \leq 1, \sin \theta = \pm \sqrt{\mu/\alpha}, \theta = \pm \arcsin \sqrt{\mu/\alpha}, \theta = \pm \arcsin \sqrt{\mu/\alpha} + \pi$. Эти точки существуют во внутренней углов, заштрихованных горизонтально на фиг. 1, т.е. при $\mu \leq \alpha$ ($\mu, \alpha > 0$), $\mu \geq \alpha$ ($\mu, \alpha < 0$).

4. $\varphi = \pm\pi/2; \mu - 1 - \alpha \sin^2 \theta = 0, 0 \leq \frac{\mu-1}{\alpha} \leq 1, \theta = \pm \arcsin \sqrt{\frac{\mu-1}{\alpha}}, \theta = \pm \arcsin \sqrt{\frac{\mu-1}{\alpha}} + \pi$. Эти точки существуют во внутренней углов, заштрихованных вертикально, т.е. при $\mu-1 \leq \alpha$ ($\mu-1, \alpha > 0$), $\mu-1 \geq \alpha$ ($\mu-1, \alpha < 0$).

Можно рассмотреть различные характерные случаи выбора параметров μ , α (см. фиг. 1): (a_{1,2}) незаштрихованные части плоскости вне углов; (b) незаштрихованный параллелограмм в центре; (c) полуполоса внизу налево; (d) полуполоса вверху направо; (e) полуполоса вверху; (f) полуполоса внизу; (g₁) угол вверху вправо; (g₂) угол внизу влево.

Ниже приводятся фазовые портреты усредненной системы, построенные численно для перечисленных выше случаев. Отметим, что все фазовые траектории, в силу (4.3), симметричны относительно прямых $\theta = \pi/2$ и $\varphi = \pi/2$. Поэтому достаточно изображать четвертую часть фазового портрета системы при $0 \leq \theta \leq \pi/2$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$.

Семейство фазовых траекторий усредненной системы в плоскости θ , φ при $\mu = -5$, $\alpha = -2$ (случай (a₂)) представлено на фиг. 2. Эти графики соответствуют колебаниям по углу θ , а по φ происходят либо колебания (внутри сепаратрисы), либо вращения (вне сепаратрисы). Аналогичный характер зависимости θ от φ будет и в случае (a₁) ($\mu = 5$, $\alpha = 2$). При этом, в случае (a₂) на фазовой плоскости (θ , φ) имеется стационарная точка $(\pi/2, \pi/2)$ типа центр и точка $(\pi/2, 0)$ типа седло, а в случае (a₁) – точка $(\pi/2, 0)$ типа центр и $(\pi/2, \pi/2)$ типа седло.

При $\mu = 0,8$; $\alpha = 0,5$ (случай (b)) фазовые траектории представлены на фиг. 3. Стационарными точками в этом случае являются $(\pi/2, 0)$, $(\pi/2, \pi/2)$, $(0, 1,1071)$. При $\mu = 0,8$; $\alpha = 3$ (случай (e)) фазовые кривые описывают колебания по θ и колебания или вращения по φ , разделенные сепаратрисами (см. фиг. 4). Стационарные точки в этом случае таковы: $(\pi/2, \pi/2)$, $(\pi/2, 0)$, $(0, 1,1071)$, $(0,5426; 0)$.

Подобные фазовые траектории получаются и в случае (f) ($\mu = 0,8$; $\alpha = -1,5$). При этом стационарными точками являются $(\pi/2, 0)$, $(\pi/2, \pi/2)$, $(0, 1,1071)$, $(0,3738, \pi/2)$.

При $\mu = 3$, $\alpha = 5$ (случай (g₁)) фазовые траектории изображены на фиг. 5 и описывают колебания по θ , колебания по φ внутри и выше сепаратрисы, проходящей через точку $\theta = \pi/2$, $\varphi = 0,3225$, и вращения по φ ниже сепаратрисы. Стационарными точками являются: $(\pi/2, 0)$, $(\pi/2, \pi/2)$, $(0,6847; \pi/2)$, $(0,8861; 0)$. В случае (g₂) ($\mu = -2$, $\alpha = -5$) имеет место аналогичный характер фазовых кривых. При этом сепаратриса проходит через точку $\theta = \pi/2$, $\varphi = 0,9553$; стационарные точки – $(\pi/2, 0)$, $(\pi/2, \pi/2)$, $(0,8861; \pi/2)$, $(0,6847; 0)$.

5. Специальные случаи движения тела. Значение $\theta = 0$ является стационарной точкой первого уравнения (4.2). Уравнение для φ при $\theta = 0$ принимает вид, допускающий разделение переменных. После интегрирования этого уравнения получим

$$\text{tg } \varphi = l \text{tg}[\pm r\xi + \arctg(l^{-1} \text{tg } \varphi_0)] \quad (5.1)$$

$$l = [\mu / (\mu - 1)]^{1/2}, \quad r = [\mu(\mu - 1)]^{1/2}, \quad \xi = \bar{L}_0 \beta t$$

Верхний и нижний знаки у r в (5.1) соответствуют случаям $\mu > 1$ и $\mu < 0$.

Если $0 < \mu < 1$, то имеем

$$\text{tg } \varphi = j[a \exp(J\xi) - w][a \exp(J\xi) + w]^{-1} \quad (5.2)$$

$$a = 1 + [(1 - \mu)\mu^{-1}]^{1/2} \text{tg } \varphi_0, \quad J = 2[\mu(1 - \mu)]^{1/2}$$

$$w = 1 - [(1 - \mu)\mu^{-1}]^{1/2} \text{tg } \varphi_0, \quad j = [\mu / (1 - \mu)]^{1/2}$$

При малых θ система (4.1) записывается следующим образом:

$$\theta' = \theta \sin \varphi \cos \varphi, \quad \varphi' = \mu - \sin^2 \varphi \quad (5.3)$$

Здесь учтены члены порядка θ . Уравнение для определения φ в случае малых θ совпадает с соответствующим уравнением при $\theta = 0$ и его решение может быть представлено в виде (5.1), (5.2). После интегрирования уравнения (5.3) для θ с учетом

решения (5.1) получим

$$\theta^2 = \theta_0^2 l^{\mp 2} (l^2 \cos^2 \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0)^{\pm 1} \times \\ \times \{\cos^2 [\pm r\xi + \arctg(l^{-1} \operatorname{tg} \varphi_0)] + l^2 \sin^2 [\pm r\xi + \arctg(l^{-1} \operatorname{tg} \varphi_0)]\}^{\pm 1} \quad (5.4)$$

Верхние и нижние знаки в (5.4) отвечают, соответственно, $\mu > 1$ и $\mu < 0$.
Если $0 < \mu < 1$, то с учетом (5.2) определим

$$\theta = \theta_0 [G \exp(2J\xi) + H \exp(J\xi) + V]^{1/2} \exp(-1/2 J\xi) \quad (5.5)$$

$$G = a^2(1 + j^2), \quad H = 2aw(1 - j^2), \quad V = w^2(1 + j^2)$$

Таким образом, исследована эволюция вращений спутника, близкого к динамически – сферическому, под действием момента сил светового давления. При этом коэффициент момента сил светового давления аппроксимируется тригонометрическим полиномом произвольного порядка. Выявлены новые качественные эффекты вращений спутника.

Автор благодарит Ф.Л. Черноусько, Л.Д. Акуленко, Н.Н. Болотника за ценные советы, полезные обсуждения, конкретную помощь.

Работа была частично поддержана грантом № АРУ051058 Международной Соросовской программы поддержки образования в области точных наук (ISSEP) в Украине.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.
2. *Черноусько Ф.Л.* О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 3. С. 474–483.
3. *Карымов А.А.* Устойчивость вращательного движения геометрически симметричного искусственного спутника Солнца в поле сил светового давления // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 5. С. 923–930.
4. *Белецкий В.В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ, 1975. 308 с.
5. *Абалакин В.К., Аксенов Е.П., Гребеников Е.А., Демин В.Г., Рябов Ю.А.* Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М.: Наука, 1976. 862 с.
6. *Леценко Д.Д., Шамаев А.С.* О движении спутника относительно центра масс под действием моментов сил светового движения // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 1. С. 14–21.
7. *Акуленко Л.Д., Леценко Д.Д.* Эволюция вращений трехосного спутника, близкого к динамически-сферическому, под действием моментов сил светового давления // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 2. С. 3–12.
8. *Тимофеев А.Ф.* Интегрирование функций. М. – Л.: Гостехиздат, 1948. 432 с.

Одесса

Поступила в редакцию
19.III.1996