

УДК 624.042:519.2

© 1997 г. В.В. БОЛОТИН, В.П. РАДИН, В.П. ЧИРКОВ

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ ОЦЕНКИ СЕЙСМИЧЕСКОГО РИСКА КОНСТРУКЦИЙ¹

В рамках статистической теории сейсмостойкости проводится систематическое исследование влияния случайных факторов на показатели безопасности и риска конструкций, подверженных воздействию потоков землетрясений. В условиях неполноты статистической информации о параметрах сейсмических воздействий используются априорные распределения. Для получения более достоверных оценок сейсмического риска по результатам статистического моделирования при ограниченном числе реализаций применяются асимптотические распределения экстремальных значений с дальнейшей экстраполяцией в область редких событий.

1. Прогноз сейсмического риска сооружений и конструкций в терминах вероятностей и/или ожидаемых потерь (как прямых, так и косвенных) необходим для минимизации повреждений и разрушений от возможных сильных землетрясений, для проектирования более рациональных и безопасных конструкций, для оптимального усиления существующих объектов, для планирования восстановления конструкций после землетрясений.

Трудности, возникающие при оценивании сейсмического риска, хорошо известны [1–4]. Среди них – недостаточность статистической информации о сильных землетрясениях, о свойствах конструкций и грунта. Особые трудности связаны с необходимостью прогнозирования редких событий, причем допустимый риск прогноза должен быть очень малым. Следовательно, при оценке конструкционного риска необходимо оперировать с весьма малыми вероятностями. Другой источник трудностей – сложный характер поведения инженерных конструкций, когда единственным путем получения численных результатов является метод статистического моделирования (метод Монте-Карло) с последующей статистической обработкой результатов. С другой стороны, число реализаций при моделировании ограничено. Проблема состоит в экстраполяции в область редких событий по результатам сравнительно малого числа реализаций. С точки зрения математической статистики эта проблема неразрешима. Некоторые эвристические пути преодоления описанных выше трудностей обсуждаются в данной статье.

2. Конструкционный сейсмический риск $H(t)$ определяется как вероятность события, состоящего в том, что в течение определенного промежутка времени (срока службы) наблюдается по крайней мере одно критическое состояние конструкции при ожидаемых на данной площадке сильных землетрясениях. Конструкционный риск есть дополнение до единицы функции безопасности $S(t)$ на том же отрезке времени при тех же критических состояниях

$$H(t) = 1 - S(t) \quad (2.1)$$

¹ Посвящается юбилею проф. Франца Циглера (Венский технический университет, Вена, Австрия).

Функция безопасности $S(t)$ вводится [5, 6] как вероятность пребывания вектора качества $v(t)$, характеризующего функционирование конструкции, в допустимой области Ω , ограниченной поверхностью Γ , достижение которой соответствует критическим отказам

$$S(t) = P\{v(t_1) \in \Omega(t_1); t_1 \in [t_0, t]\} \quad (2.2)$$

где $P\{\cdot\}$ – вероятность события, t_0 – начальный момент времени. Область Ω может меняться во времени, например, вследствие ухудшения свойств материала или накопления повреждений.

Для численного оценивания вероятности $H(t)$, которая должна быть весьма малой, разложим сейсмический риск на компоненты, сопоставимые по точности вычислений и требующие для их оценки ограниченного объема реализаций. Пусть землетрясения на данной площадке разбиты на классы I_1, I_2, \dots, I_m в соответствии с их интенсивностью [1]. Введем условный риск, равный вероятности наступления критического состояния при условии, что произошло землетрясение из класса I_j :

$$H(t|I_j) = 1 - P\{v(\tau|I_j, t) \in \Omega(t); \tau \in T(I_j, t)\} \quad (2.3)$$

По сравнению с (2.2) здесь используется два масштаба времени. В "медленном" масштабе времени t , измеряемом годами, землетрясения проявляются как потоки событий со случайными моментами их появления и случайными интенсивностями. "Быстрый" масштаб времени τ , которое измеряется секундами или десятками секунд, используется для описания движения грунта и реакции конструкции в течение сейсмического воздействия продолжительностью $T(I_j, t)$, малой по сравнению с интервалом $[t_0, t]$.

Третью меру риска, которую будем называть парциальным риском, введем как вероятность наступления определенного типа критического состояния. Представим предельную поверхность Γ как совокупность $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_N$, где Γ_α обозначает часть предельной поверхности, которая соответствует определенному механизму наступления критического состояния. Если ввести обозначение $v \uparrow \Gamma_\alpha$ для первого выброса вектора v из области Ω через границу Γ_α , то парциальный риск $H_\alpha(t)$, а также условный парциальный риск $H_\alpha(t|I_j)$ можно ввести как вероятности

$$H_\alpha(t) = P\{v(t_1) \uparrow \Gamma_\alpha; t_1 \in [t_0, t]\} \quad (2.4)$$

$$H_\alpha(t|I_j) = P\{v(\tau|I_j, t) \uparrow \Gamma_\alpha; \tau \in T(I_j, t)\} \quad (2.5)$$

Введенные показатели риска позволяют существенно сократить процесс численного моделирования реализаций сейсмических воздействий и реакции на них конструкций для получения оценок общего (интегрального) риска на всем интересующем отрезке времени $[t_0, t]$. Например, если возможные на данной площадке землетрясения могут быть представлены в виде пуассоновского потока событий, а отказы независимы, то суммарный сейсмический риск, определяемый соотношениями (2.1) и (2.2), и условный риск (2.3) связаны следующим образом:

$$H(t) = 1 - \exp\left[-\sum_{j=1}^m \lambda_j(t-t_0)H(t|I_j)\right] \quad (2.6)$$

где λ_j – частота повторяемости событий из класса I_j . Если получены оценки для условного парциального риска (2.5), то для парциального риска (2.4) будет эффективной двухсторонняя оценка [1]:

$$\max_{\alpha} H_{\alpha}(t|I_j) \leq H(t|I_j) \leq \min\left\{1, \sum_{\alpha=1}^N H_{\alpha}(t|I_j)\right\} \quad (2.7)$$

3. Алгоритмы оценок сейсмического риска, основанные на применении метода статистического моделирования, предусматривают генерирование потока воздействий в медленном масштабе времени, моделирование искусственных акселерограмм в быстром масштабе времени, численное интегрирование уравнений движения с последующей статистической обработкой, оценку показателей риска с экстраполяцией в область малых вероятностей.

Поток сейсмических воздействий характеризуется двумя основными параметрами: интенсивностью воздействия и временем между следующими друг за другом землетрясениями. Очевидно, что при разбиении сейсмических воздействий на классы I_j ($j = 1, \dots, m$) с ростом балльности землетрясения его интенсивность и время ожидания очередного землетрясения из этого класса возрастают, причем эти параметры являются случайными.

Интенсивность землетрясения из класса I_j будем характеризовать параметром A_j , который можно интерпретировать как некоторое пиковое значение ускорения грунта при землетрясении из класса I_j . Номинальное (нормативное) значение этого параметра A_{0j} возрастает в геометрической прогрессии с ростом j : $A_{0j} = 2^{j-7}$, что соответствует номинальным ускорениям 1, 2, 4 мс^{-2} при $j = 7, 8, 9$ соответственно. Ввиду отсутствия достоверной информации о параметре A_j примем априорное логарифмически равномерное распределение на отрезке $[a_{1j}, a_{2j}]$ с функцией распределения

$$F_A(A_j) = \lg(A_j/a_{1j})/\lg(a_{2j}/a_{1j}) \quad (3.1)$$

Граничные значения a_{1j} и a_{2j} подбираются таким образом, чтобы математическое ожидание параметра A_j было близко к номинальному значению A_{0j} : $a_{1j} = 0,75 A_{0j}$, $a_{2j} = 1,5 A_{0j}$.

Распределение времени t_j между двумя следующими друг за другом землетрясениями из класса I_j возьмем в виде

$$F_t(t_j) = 1 - \exp[-(\lambda_j t_j)^2] \quad (3.2)$$

Одна из реализаций потока землетрясений из классов I_6, I_7, I_8 , полученная методом статистического моделирования с использованием априорных распределений (3.1) и (3.2), показана на фиг. 1 (A_j — $[\text{мс}^{-2}]$, t — [годы]). При этом для частот повторяемости λ_j принята зависимость $\lambda_j = 10^{6-j}$ (год^{-1}).

В быстром масштабе времени сейсмическое воздействие представляет собой существенно нестационарный случайный процесс. Для генерирования искусственных акселерограмм землетрясений из класса I_j возьмем схематизацию горизонтального ускорения грунта в виде стационарного случайного процесса $\varphi(\tau)$, модулированного медленно меняющейся по сравнению с $\varphi(\tau)$ функцией [7]:

$$a_j(\tau) = A_j(\tau)\varphi(\tau) \quad (3.3)$$

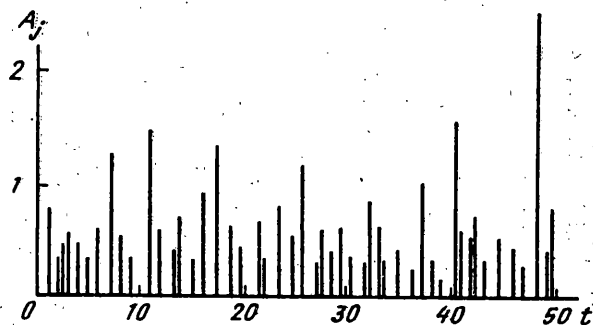
Случайный процесс $\varphi(\tau)$ представляет собой центрированный стационарный процесс с единичной дисперсией и спектральной плотностью

$$S_\varphi(\omega) = \frac{2\alpha\theta^2}{\pi[(\omega^2 - \theta^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2]} \quad (3.4)$$

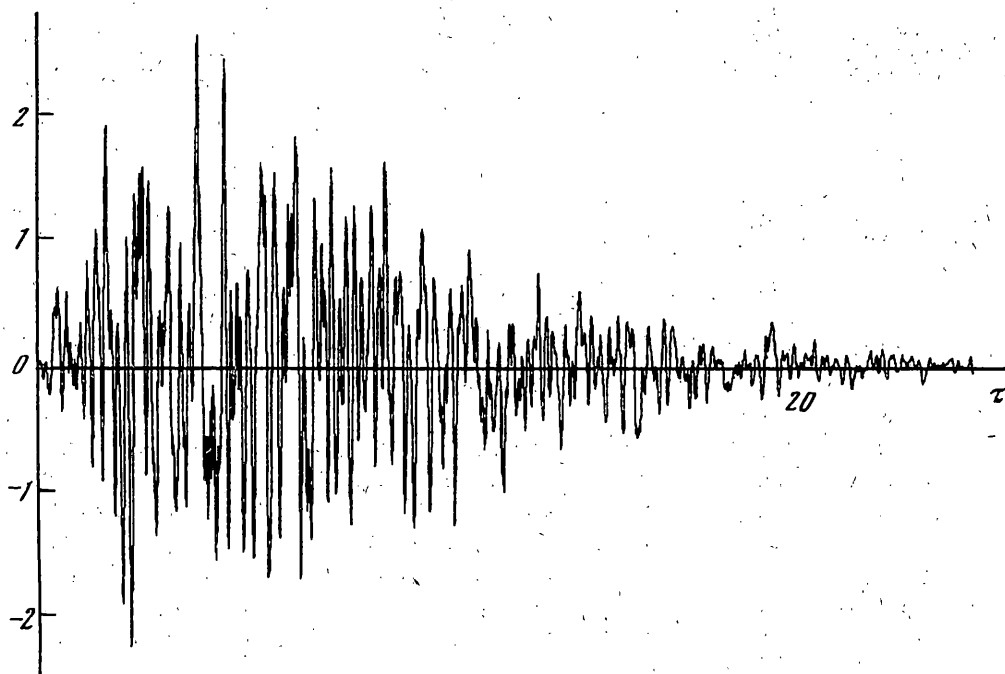
Характерная частота θ и параметр корреляции α , вообще, являются случайными. Вследствие недостаточной информации о спектральном составе будем использовать априорные равномерные распределения на отрезках $[\theta_1, \theta_2]$, $[\alpha_1, \alpha_2]$.

Медленно меняющаяся функция $A_j(\tau)$ в (3.3) определяет интенсивность землетрясения и длительность его интенсивной фазы. Для этой функции, называемой псевдоогibaющей, возьмем аппроксимацию

$$A_j(\tau) = A_j\beta\tau \exp(-\beta\tau) \quad (3.5)$$



Фиг. 1

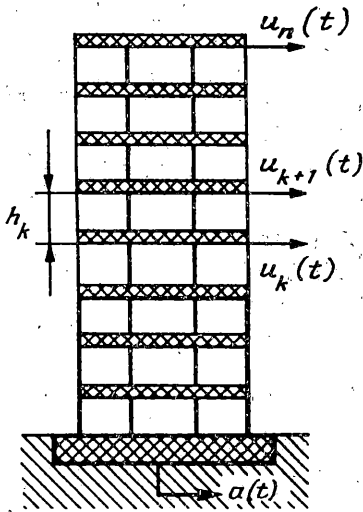


Фиг. 2

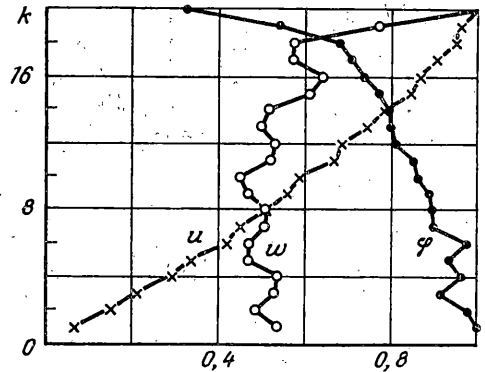
со случайными параметрами A_j и β . Для параметра A_j псевдоогibaющей (3.5) возьмем распределение (3.1), а для параметра β примем равномерное на отрезке $[\beta_1, \beta_2]$ распределение.

Характерная реализация искусственной акселерограммы приведена на фиг. 2 (a_8 — $[m\text{c}^{-2}]$, τ — $[c]$). Генерирование этой акселерограммы произведено при $j = 8$, случайные равномерно распределенные параметры θ , α , β , имеющие размерности c^{-1} , моделировались на отрезках $\theta \in [20 \dots 30]$, $\alpha \in [10 \dots 20]$, $\beta \in [0,15 \dots 0,25]$.

4. Методику оценивания сейсмического риска проиллюстрируем на примере многоэтажной конструкции рамного типа (фиг. 3). Междуэтажные перекрытия массой m_k ($k = 1, \dots, n$), рассматриваемые как абсолютно твердые тела, соединены колоннами высотой h_k и изгибной жесткостью EI_k . В рамках сдвиговой модели имеем систему с n степенями свободы и обобщенными координатами, равными горизонтальным смеще-



Фиг. 3



Фиг. 4

ниям $u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)$ перекрытий относительно колеблющегося основания. Уравнения колебаний системы имеют вид

$$m_k \ddot{u}_k + 2\varepsilon_k m_k \dot{u}_k + c_{k+1}(u_k - u_{k+1}) + c_k(u_k - u_{k-1}) = -m_k a(t) \quad (k = 1, \dots, n) \quad (4.1)$$

Здесь введено обозначение $c_k = 12EI_k/h_k^3$. В уравнениях (4.1) следует положить $u_0 = 0$ при $k = 0$ и $c_{n+1} = 0$ при $k = n$.

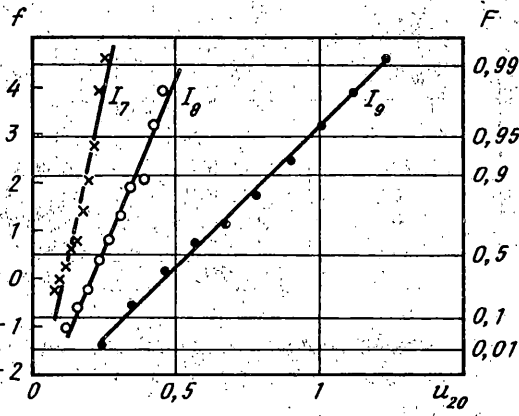
В качестве компонентов вектора качества $v(t)$, определяющих показатели безопасности и риска (2.2)–(2.5), выберем смещения междуэтажных перекрытий $u_k(t)$, их абсолютные ускорения $w_k(t) = \ddot{u}_k(t) + a(t)$, а также относительные углы сдвига между соседними междуэтажными перекрытиями $\varphi_k(t) = [u_k(t) - u_{k-1}(t)]/h_k$. Последние компоненты пропорциональны изгибающим моментам в соединительных стыках колонн. Превышение функцией $\varphi_k(t)$ предельного значения φ_{k*} означает достижение предельного состояния, которое приводит к разрушению колонн соответствующего этажа и его обрушению. Допустимую область Ω в соотношениях (2.2), (2.3) и ее границы Γ_α в (2.4), (2.5) определим как

$$\Omega = \{|u_k(t)| < u_{k*}, |w_k(t)| < w_{k*}, |\varphi_k(t)| < \varphi_{k*}, k = 1, \dots, n\} \quad (4.2)$$

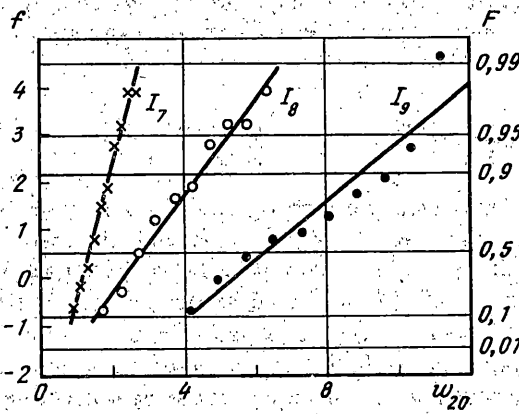
где предельные значения u_{k*} , w_{k*} и φ_{k*} в общем случае являются случайными величинами.

Многokратное генерирование сейсмических воздействий определенной интенсивности и численное интегрирование уравнений (4.1) позволяет получать реализации реакции конструкции на эти воздействия. Некоторые результаты моделирования представлены на фиг. 4, где приведено распределение по этажам максимальных по модулю значений $u_k = \max_t |u_k(t)|$, $w_k = \max_t |w_k(t)|$, $\varphi_k = \max_t |\varphi_k(t)|$, отнесенных к их наибольшим значениям $\max u_k$, $\max w_k$, $\max \varphi_k$.

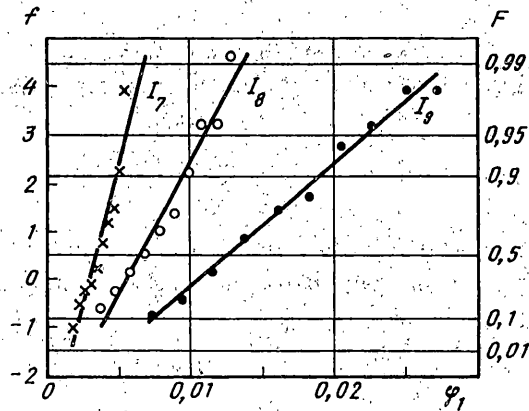
Численные данные получены по 50 реализациям реакции конструкции на землетрясения из класса I_9 . Вычисления проведены для $n = 20$, $h_k = 3$ м. Массы междуэтажных перекрытий m_k и жесткости колонн EI_k увеличиваются на 10% с понижением номера этажа, при этом $m_{20} = 10^5$ кг, $EI_{20} = 10^8$ Н м². Парциальные коэффициенты демпфирования $\varepsilon_k = 0,1\omega_k$ приняты пропорциональными собственным частотам.



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

Большое число ограничений по безопасности, определяющих допустимую область (4.2) в пространстве качества, осложняет оценку показателей безопасности и риска. Для уменьшения размерности вектора качества воспользуемся результатами моделирования. Как видно из фиг. 4, максимальные амплитуды перемещений u_k и ускорений

j	$H_{\alpha}(I_j)$			$H(I_j)$	
	$u_{20} < u_*$	$w_{20} < w_*$	$\varphi_1 < \varphi_*$	min	max
6	$9,99 \cdot 10^{-16}$	$2,51 \cdot 10^{-13}$	$1,11 \cdot 10^{-16}$	$2,51 \cdot 10^{-13}$	$2,52 \cdot 10^{-13}$
7	$1,34 \cdot 10^{-8}$	$4,78 \cdot 10^{-8}$	$6,68 \cdot 10^{-8}$	$6,68 \cdot 10^{-8}$	$1,28 \cdot 10^{-7}$
8	$9,96 \cdot 10^{-5}$	$2,71 \cdot 10^{-4}$	$1,62 \cdot 10^{-4}$	$2,71 \cdot 10^{-4}$	$5,33 \cdot 10^{-4}$
9	$1,87 \cdot 10^{-2}$	$3,32 \cdot 10^{-2}$	$1,27 \cdot 10^{-2}$	$3,32 \cdot 10^{-2}$	$6,46 \cdot 10^{-2}$
10	$1,29 \cdot 10^{-1}$	$1,51 \cdot 10^{-1}$	$1,51 \cdot 10^{-1}$	$1,51 \cdot 10^{-1}$	$4,32 \cdot 10^{-1}$
$H(T_*)$				0,0028	0,0062

w_k достигаются при $k = 20$, а максимальные значения φ_k – при $k = 1$. Поэтому вместо (4.2) допустимую область возьмем в виде

$$\Omega = \{u_{20} < u_*, w_{20} < w_*, \varphi_1 < \varphi_*\} \quad (4.3)$$

Первичная статистическая обработка результатов моделирования показывает, что распределение максимальных значений амплитуд достаточно хорошо аппроксимируется асимптотическим распределением Гумбеля [8, 9]:

$$F(v) = \exp \left[-\exp \left(-\frac{v - v_0}{v_c} \right) \right], \quad v > v_0 \quad (4.4)$$

с параметрами v_0 и v_c . Этот вывод проиллюстрирован на фиг. 5–7, построенных по результатам статистической обработки 50 реализаций для потоков землетрясений из классов I_7, I_8, I_9 . Здесь показаны эмпирические функции распределения для перемещения 20-го этажа u_{20} [м] (фиг. 5), абсолютного ускорения на этом этаже w_{20} [мс^{-2}] (фиг. 6) и междуэтажного сдвига первого этажа φ_1 (фиг. 7). Использована функциональная шкала $f(v) = -\ln [-\ln F(v)]$, соответствующая распределению (4.4). Экстраполяция в область редких событий на основе асимптотических распределений типа (4.4) позволяет оценить величину условного парциального риска (2.5):

$$H_{\alpha}(I_j) = 1 - F(v_{\alpha*} | I_j) \quad (4.5)$$

Здесь предполагается, что предельные значения $v_{1*} = u_*, v_{2*} = w_*, v_{3*} = \varphi_*$ заданы детерминистически. Если учитывать случайный характер ограничений, то вместо (4.5) будем иметь

$$H_{\alpha}(I_j) = 1 - \int_{v_{0*}}^{\infty} F(v_{\alpha*} | I_j) p_*(v_{\alpha*}) dv_{\alpha*} \quad (4.6)$$

Плотность вероятности $p_*(v_{\alpha*})$ параметра $v_{\alpha*}$ можно взять в виде одного из асимптотических распределений для минимальных значений, например, распределение Вейбулла

$$F_*(v_*) = 1 - \exp \left[-\left(\frac{v_* - v_{0*}}{v_{c*}} \right)^{\alpha} \right] \quad (4.7)$$

с пороговым значением v_{0*} и параметрами v_{c*} и α . Для вычисления интегралов типа (4.6) в области малых значений риска эффективным является применение асимптотических формул [10], точность которых тем выше, чем меньше значения оцениваемых вероятностей.

В таблице сведены результаты оценок величин парциального условного риска $H_{\alpha}(I_j)$ (первые три столбца), условного риска $H(I_j)$ (последние два столбца) и

интегрального риска $H(T_*)$ (последняя строка) в течение срока службы $T_* = 50$ лет. Оценка условного парциального риска проводилась по формуле (4.5) при $u_* = 2$ м, $w_* = 20$ м с⁻², $\varphi_* = 0,05$. Для условного риска $H(I_j)$ брались двухсторонние оценки (2.7). Основной вклад в двухстороннюю оценку суммарного риска, связанного с условными вероятностями $H(I_j)$ соотношением (2.6), вносят потоки землетрясений из классов I_7, I_8, I_9 . Землетрясения слабой интенсивности вносят малый вклад из-за весьма малых значений парциального риска. Разрушительные землетрясения имеют условные показатели риска, близкие к единице, но их вклад в суммарный риск незначителен вследствие очень редкой их повторяемости.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96-01-01034).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Болотин В.В.* Ресурс машин и конструкций. М.: Машиностроение, 1990. 448 с.
2. *Newmark N.M., Rosenblueth E.* Fundamentals of earthquake engineering. Englewood Cliffs, New York: Prentice-Hall, 1971. 640 p.
3. *Augusti G., Baratta A., Casciati F.* Probabilistic methods in structural engineering. London, New York: Chapman and Hall, 1984. 556 p.
4. *Bolotin V.V.* Seismic risk assessment for structures with the Monte Carlo simulation // Probab. Eng. Mech. 1993. № 8. P. 169–177.
5. *Болотин В.В.* Теория надежности механических систем с конечным числом степеней свободы // Изв. АН СССР. МТТ. 1969. № 5. С. 73–81.
6. *Болотин В.В.* Теория надежности распределенных механических систем // Изв. АН СССР. МТТ. 1969. № 6. С. 72–79.
7. *Болотин В.В.* Статистическая теория сейсмостойкости сооружений // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1959. № 4. С. 123–129.
8. *Гумбель Е.* Статистика экстремальных значений. М.: Мир, 1965. 450 с.
9. *Castillo E.* Extreme value theory in engineering. New York: Academic Press, 1988. 389 p.
10. *Болотин В.В., Чирков В.П.* Асимптотические оценки для вероятности безотказной работы по моделям типа нагрузка – сопротивление // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1992. № 6. С. 3–10.

Москва

Поступила в редакцию
25.III.1997