МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1997

УДК 539.3:534.1

© 1997 г. И.В. АНДРИАНОВ, В.И. ПИСКУНОВ

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕБРИСТЫХ ПЛАСТИН ПРИ УЧЕТЕ ДИСКРЕТНОСТИ РАЗМЕЩЕНИЯ РЕБЕР

Рассматриваемой задаче посвящено значительное количество работ [1–11]. Общие выводы после их анализа могут быть сведены к следующим пунктам: учет влияния дискретности непосредственно на критические усилия потери устойчивости, если не учитываются другие факторы (моментность докритического состояния, связанности форм потери устойчивости и т.д.). не является основным; но: оценка такого влияния необходима для правильного представления о влиянии различных факторов на процесс потери устойчивости. Проще всего подобную оценку получить на основе метода осреднения [12–18].

Основные идеи применяемого подхода проиллюстрируем на примере задачи об устойчивости прямоугольной пластины ($0 \leqslant x \geqslant L_1$, $-L_2 \leqslant y \geqslant L_2$) на упругом винклеровом основании, подкрепленной регулярным силовым набором из $N = 2k + 1$ симметрично расположенных относительно ее срединной поверхности ребер. Исходное уравнение можно в этом случае записать так

$$D\nabla^4 W + E_c J\Phi(y) W_{xxxx} + C_1 W + T W_{xx} = 0 \tag{1}$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad \Phi(y) = \sum_{i=-0,5(N-1)}^{0,5(N-1)} \delta(y - ib), \quad b = 2L_2/(N+1)$$

Здесь T – сжимающее усилие; C_1 – коэффициент постели основания; E, ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала пластины; h – толщина пластины; E_c – модуль Юнга материала ребра; J – момент инерции ребра.

Считается, что сжимающая нагрузка передается только на пластинку (например, ребра подрезаны у торцов). На краях пластины должны быть заданы граничные условия. Без ограничения общности будем считать

$$W = W_y = 0 \text{ при } y = \pm L_2 \tag{2}$$

$$W = W_{xx} = 0 \text{ при } x = 0, L_1 \tag{3}$$

или $$W = W_x = 0 \text{ при } x = 0, L_1 \tag{4}$$

Условия сопряжения соседних участков пластины через ребро имеют вид:

$$W^{++} = W^{-}, \; W_y^{+} = W_y^{-}, \; W_{yy}^{+} = W_{yy}^{-}, \; D(W_{yyy}^{-} - W_{yyy}^{+}) = E_c J W_{xxxx}^{+} \tag{5}$$

Здесь

$$(\ldots)^{(\pm)} = \lim_{y \to ib(\pm)0} (\ldots) \tag{6}$$

Приведем исходное уравнение (1) к следующему безразмерному виду:

$$\nabla^4 W + CW + \alpha\Phi(\varphi)W_{\xi\xi\xi\xi} + \lambda W_{\xi\xi} = 0 \tag{7}$$

$$\nabla^4 = \frac{\partial}{\partial\xi^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial\xi^2\partial\eta_1^2} + \frac{\partial^4}{\partial\eta_1^4}, \quad \xi = \frac{x}{2L_2}, \quad \eta_1 = \frac{y}{2L_2}$$

$$C = \frac{16C_1L_2}{D}, \quad \alpha = \frac{E_cJ}{Db}, \quad \varphi = \frac{y}{b}, \quad \Phi(\varphi) = \sum_{i=-0,5(N-1)}^{0,5(N-1)} \delta(\varphi - i), \quad \lambda = \frac{4TL_2^2}{D}$$

Условия сопряжения (5) в новых переменных можно записать так:

$$\{W^+, W^+_{n_1}, W^+_{n_1n_1}\} = \{W^-, W^-_{n_1}, W^-_{n_1n_1}\}, \quad -W^+_{n_1n_1n_1} + W^+_{n_1n_1n_1} = \varepsilon\alpha W^+_{\xi\xi\xi} \tag{8}$$

$$(\ldots)^{(\pm)} = \lim_{\varphi\pm0}(\ldots), \quad \varepsilon = \tfrac{1}{2}b / L_2$$

Поскольку в уравнение (7) входят разрывные коэффициенты, решение его будем понимать в обобщенном смысле.

Можно показать, что спектр $\{\lambda_k\}$ ($k = 1, 2,\ldots$) задачи (2), (3), (7) вещественный, положительный и состоит из счетного множества значений. Соответствующие собственные функции W_k вещественны и образуют базис в $L^2(\Omega)$, ортонормированный в $L^2(\Omega)$ и ортогональный в смысле скалярного произведения $[W, z]$ (Ω; $0 \leqslant \xi \leqslant l$; $-0{,}5 \leqslant \eta_1 \leqslant 0{,}5$; $l = L_1/L_2$).

Введем пространство Y как замыкание множества функций из C_0^2 по норме $||W||_Y^2 = [W, W]$. Тогда однородная задача (7), (2), (3) (или (7), (2), (4)) однозначно разрешима в Y, если только $\lambda \neq \{\lambda_k\}$ ($k = 1, 2,\ldots$).

Параметр ε характеризует частоту расположения ребер. Будем считать его малым ($\varepsilon \ll 1$) и перейдем к асимптотическому анализу уравнения (7). Перед этим нужно еще установить соотношения между входящими в него величинами. Параметр c не оказывает существенного влияния на построение асимптотики. В дальнейшем полагаем $C \sim \varepsilon^{-1}$. Для относительной жесткости ребер примем оценку $\alpha \sim \varepsilon^{-1}$. Физически это означает, что приведенная жесткость одного ребра имеет порядок жесткости обшивки.

Решение уравнения (7) должно иметь две характерные изменяемости по координате η_1, обусловленные изменяемостью формы потери устойчивости и частотой расположения ребер. Поэтому естественно использовать метод двух масштабов [19], вводя вместо одной переменной η_1 две: "медленную" $\eta = \eta_1$ и "быструю" $\varphi = y/b = \eta_1/\varepsilon$. Тогда выражение для производной по η_1 принимает вид:

$$\partial / \partial\eta_1 = \partial / \partial\eta + \varepsilon^{-1}\partial / \partial\varphi \tag{9}$$

Нормальное перемещение W и собственное число λ представим в виде разложений по ε:

$$W = W_0(\xi, \eta, \varphi) + \varepsilon W_1(\xi, \eta, \varphi) + \ldots \tag{10}$$

$$\lambda = \varepsilon^{-1}\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots \tag{11}$$

Подставляя выражения (10), (11) в уравнение (7) и учитывая новое выражение для производной (9), получаем после расщепления по ε рекуррентную систему уравнений. Анализ ее показывает, что $W_0 = W_{00}(\xi, \eta)$, а разложение (10) удобно представить в виде:

$$W = W_{00}(\xi, \eta) + \varepsilon W_{01}(\xi, \eta) + \varepsilon^2 W_{02}(\xi, \eta) + \ldots + \varepsilon^3[W_1(\xi, \eta, \varphi) + \varepsilon W_2(\xi, \eta, \varphi) + \ldots] \tag{12}$$

Здесь W_1 – периодические по φ с периодом l функции

Окончательно рекуррентную последовательность расщепленных по ε уравнений можно записать так

$$W_{1\varphi\varphi\varphi\varphi} + \Pi_0 W_{00} = 0$$

$$W_{2\varphi\varphi\varphi\varphi} + \Pi_0 W_{01} - \lambda_1 W_{00\xi\xi} = \Pi_1 W_1 - \nabla^4 W_{00} \tag{13}$$

$$W_{3\varphi\varphi\varphi\varphi} + \Pi_0 W_{02} - (\lambda_1 W_{01} + \lambda_2 W_{00\xi\xi}) = \Pi_1 W_2 + \Pi_2 W_1 - \nabla^4 W_{01}$$

$$W_{4\varphi\varphi\varphi\varphi} + \Pi_0 W_{03} - (\lambda_1 W_{02\xi\xi} + \lambda_2 W_{01\xi\xi} + \lambda_3 W_{00\xi\xi} + \lambda_0 W_{1\xi\xi}) =$$
$$= \Pi_1 W_3 + \Pi_2 W_2 + \Pi_3 W_1 - \nabla^4 W_{02}$$

$$W_{5\varphi\varphi\varphi\varphi} + \Pi_0 W_{04} - \left(\sum_{i=1}^{4} \lambda_i W_{04-i\xi\xi} + \lambda_0 W_{2\xi\xi} + \lambda_1 W_{1\xi\xi}\right) = \sum_{i=1}^{3} \Pi_i W_{5-i} + \nabla^4 (W_{03} + W_1)$$

. . . .

$$W_{k\varphi\varphi\varphi\varphi} + \Pi_0 W_{0k-1} - \left(\sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i W_{0k-1-i\xi\xi} + \sum_{i=0}^{k-4} \lambda_i W_{0k-3-i\xi\xi}\right) = \sum_{i=1}^{3} \Pi_i W_{k-i} + \nabla^4 (W_{0k-2} + W_{k-4})$$

. . . .

$$\Pi_0 = c + \alpha\Phi \frac{\partial^4}{\partial\xi^4} - \lambda_0 \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}, \quad \Pi_1 = -4 \frac{\partial^3}{\partial\varphi^2 \partial\eta}$$

$$\Pi_2 = -6 \frac{\partial^4}{\partial\varphi^2 \partial\eta^2} - 2 \frac{\partial^4}{\partial\varphi^2 \partial\xi^2}$$

$$\Pi_3 = \Pi_{31} + \Pi_{30} = -4\left(\frac{\partial^4}{\partial\varphi\partial\eta\partial\xi^2} + \frac{\partial^4}{\partial\varphi\partial\eta^3}\right) + \left(-c - \alpha\Phi \frac{\partial^4}{\partial\xi^4}\right)$$

Граничные условия примут вид:

при $\xi = 0, l$: $\quad W_{0i} = -W_{i-2}, \quad W_{0i\xi\xi} = -W_{i-2\xi\xi}$ (14)

или $\quad W_{01} = -W_{i-2}, \quad W_{0i\xi} = -W_{i-2\xi}$

при $\eta = \pm 0{,}5$: $\quad W_{0i} = -W_{i-2}, \quad W_{0i\eta} = -W_{i-1\varphi} - W_{i-2\eta}$ (15)

$i = 0, 1, \ldots; \quad W_i = 0$ при $i \leqslant 0$

Выполним теперь в соотношениях (3)–(15) осреднение по φ, т.е. применим к каждому члену их оператор осреднения

$$\overline{\overline{(\ldots)}} = \frac{1}{N+1} \int_{-0,5(N+1)}^{0,5(N+1)} (\ldots) d\varphi$$

Отметим, что $\overline{\overline{W}}_{0i} = W_{0i}$, $\overline{\overline{\Phi}} = 1$, а в силу периодичности функций $W_i \overline{\overline{\Pi_1 W_i}} = \overline{\overline{\Pi_2 W_i}} = \overline{\overline{\Pi_{31} W_i}} = 0$.

Учитывая это обстоятельство, после осреднения приходим к следующим краевым задачам:

$$\Pi_{00} W_{00} = [\alpha\partial^4 / \partial\xi^4 + c + \lambda_0 \partial^2 / \partial\xi^2] W_{00} = 0 \tag{16}$$

$$\Pi_{00} W_{01} + \lambda_0 W_{00\eta\eta} = -\nabla^4 W_{00} \tag{17}$$

$$\Pi_{00} W_{02} + (\lambda_1 W_{01\eta\eta} + \lambda_2 W_{00\eta\eta}) = -\nabla^4 W_{00} \tag{18}$$

$$\Pi_{00} W_{03} + (\lambda_1 W_{02\eta\eta} + \lambda_2 W_{01\eta\eta} + \lambda_3 W_{00\eta\eta}) - \lambda_3 W_{00\eta\eta} = \overline{\overline{\Pi_{30} W_1}} - \nabla^4 W_{02} \tag{19}$$

. . . .

$$\Pi_{00}W_{0k}+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i W_{0k-i\eta\eta}+\sum_{i=1}^{k-3}\lambda_i\overline{\overline{W_{k-2-i\eta\eta}}}=\overline{\overline{\Pi_{30}W_{k-2}}}-\nabla^4(W_{0k-1}+\overline{\overline{W_{k-3}}}) \quad (20)$$

. . . .

$$\text{при}\quad \xi=0,l: \qquad W_{0i}=-\overline{\overline{W_{i-2}}},\quad W_{0i\xi\xi}=-\overline{\overline{W_{i-2\xi\xi}}} \quad (21)$$

$$\text{или} \qquad W_{01}=-\overline{\overline{W_{i-2}}},\quad W_{0i\xi}=-\overline{\overline{W_{i-2\xi}}} \quad (22)$$

$$\text{при}\quad \eta=\pm 0{,}5: \qquad W_{0i}=-\overline{\overline{W_{0i-2}}},\quad W_{0i\eta}=-\overline{\overline{W_{i-2\eta}}} \quad (23)$$

$\overline{\overline{W_i}}=0$ при $i\leqslant 0$

Соотношения для определения быстрых периодических функций W_i можно записать так

$$W_{1\varphi\varphi\varphi\varphi}=\Pi_{01}W_{00}\equiv[\alpha\partial^4/\partial\xi^4-\lambda_0\partial^2/\partial\xi^2]W_{00\xi\xi} \quad (24)$$

$$W_{2\varphi\varphi\varphi\varphi}=\Pi_1W_1+\Pi_{01}W_{01}-\lambda_1W_{00\xi\xi} \quad (25)$$

. . . .

$$W_{k\varphi\varphi\varphi\varphi}=\sum_{i=1}^{3}\overline{\Pi_iW_{k-i}}-\nabla^4\overline{W_{k-4}}+\Pi_{01}W_{0k-1}-\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_iW_{0k-1-i\xi\xi}+\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i\overline{W_{0k-3-i\xi\xi}} \quad (26)$$

. . . .

$$\text{при}\quad \varphi=\pm\ k\quad (k=0,1,\ldots,0{,}5(N+1)),\qquad W_i=W_{i\varphi}=0 \quad (27)$$

Здесь $\overline{(\ldots)}=(\ldots)-\overline{\overline{(\ldots)}}$.

Условия сопряжения (8) при таком построении функций W_i и W_{0i} автоматически выполняются в каждом приближении. Поясним условия (27). Формально следовало бы писать их в виде: при $\varphi=\pm k, W_i=c_i^0(\xi,\eta), W_{i\varphi}=c_i^1(\xi,\eta)$, однако функции c_i^0, c_i^1 можно отнести к медленным составляющим решения W_{0i}.

Если при $y=\pm L_2$ будут заданы условия, отличные от условий защемления (2), то граничные условия (27) при $\varphi=\pm 0{,}5(N+1)$ должны быть заменены. Например, если при $y=\pm L_2$, $W=W_{yy}$, то при $\varphi=\pm 0{,}5(N+1)$ должно быть $W_i=W_{i\varphi\varphi}=0$.

Функции W_i не удовлетворяют, вообще говоря, граничным условиям при $\xi=0,1$, а решения W_{0i} позволяют компенсировать только медленную часть невязки. Поэтому необходимо построение быстрозатухающего состояния типа пограничного слоя. Для этой цели введем новую быструю переменную $\psi=\xi/\varepsilon$ (для медленной оставим обозначение ξ).

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial\xi}=\frac{\partial}{\partial\xi}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial}{\partial\psi} \quad (28)$$

Решения типа пограничного W_b слоя можно в силу периодичности невязки разыскивать на одном периоде $0\leqslant\varphi\leqslant 1$. Представим его в виде разложения

$$W_b=\varepsilon^3[W_{b1}(\xi,\eta,\psi,\varphi)+\varepsilon W_{b2}(\xi,\eta,\psi,\varphi)+\ldots] \quad (29)$$

После подстановки выражений (28), (29) в исходные соотношения и расчленения по ε приходим к следующей рекуррентной системе краевых задач

$$\nabla W_{b1} \equiv \left(\frac{\partial^4}{\partial\psi^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial\psi^2\partial\varphi^2} + \frac{\partial^4}{\partial\varphi^4} \right) W_{b1} = 0 \quad (30)$$

. . . .

$$\nabla_1 W_{bk} = \sum_{i=1}^{3} A_i W_{bk-i} - cW_{bk-3} - \nabla^4 W_{bk-4} - \sum_{i=1}^{k-4} \lambda_i W_{bk-3-i\xi\xi} \quad (k = 2, 3, \ldots) \quad (31)$$

. . . .

при $\varphi = 0, 1$: $W_{b1} = 0$, $W_{b1\varphi} = 0$ (32)

$$\frac{\partial^4 W_{bp}}{\partial\psi^4} = -A_0 W_{bp-1} + \sum_{i=1}^{4} A_{1i} W_{bp-i} + p\sum_{i=0}^{k-5} \lambda_i W_{bp-3-i\xi\xi} \quad (p = 2, 3, \ldots) \quad (33)$$

$W_{bp\varphi} = 0$

при $\xi = 0, l$: $\psi = 0, l_1$ $(l_1 = \varepsilon^{-1} l)$

$$W_{bj} = -\overline{W_j}, \quad W_{bj\psi\psi} = -\overline{W_{j\xi\xi}} - 2W_{bj-1\psi\xi} - W_{bj-2\xi\xi} \quad (34)$$

$$\text{или} \quad W_{bj} = -\overline{W_j}, \quad W_{bj\psi} = -\overline{W_{j\xi}} - W_{bj-1\xi} \quad (35)$$

Здесь $W_{bp} = 0$ при $p \leqslant 1$.

$$A_1 = -4\left(\frac{\partial^4}{\partial\psi^3\partial\xi} + \frac{\partial^4}{\partial\psi\partial\xi\partial\varphi^2} + \frac{\partial^4}{\partial\psi^2\partial\eta\partial\varphi} + \frac{\partial^4}{\partial\varphi^3\partial\eta} \right)$$

$$A_2 = -6\frac{\partial^4}{\partial\psi^2\partial\xi^2} - 2\frac{\partial^4}{\partial\varphi^2\partial\xi^2} - 8\frac{\partial^4}{\partial\psi\partial\xi\partial\varphi\partial\eta} - 6\frac{\partial^4}{\partial\varphi^2\partial\eta^2} - 2\frac{\partial^4}{\partial\psi^2\partial\eta^2}$$

$$A_3 = -4\left(\frac{\partial^4}{\partial\psi\partial\xi^3} + \frac{\partial^4}{\partial\eta\partial\xi^2\partial\varphi} + \frac{\partial^4}{\partial\psi\partial\eta^2\partial\xi} + \frac{\partial^4}{\partial\varphi\partial\eta^3} \right)$$

$$A_0(\ldots) = (\alpha\varepsilon)^{-1}\left[\left.\frac{\partial^3(\ldots)}{\partial\varphi^3}\right|_{\varphi=1} - \left.\frac{\partial^3(\ldots)}{\partial\varphi^3}\right|_{\varphi=0} \right]$$

$$A_{11} = -4\frac{\partial^4}{\partial\psi^3\partial\xi}, \quad A_{12} = -6\frac{\partial^4}{\partial\varphi^3\partial\xi}, \quad A_{13} = -4\frac{\partial^4}{\partial\psi\partial\xi^3}, \quad A_{14} = -4\frac{\partial^4}{\partial\xi^4}$$

Предлагаемый метод позволяет определять разложения искомых критических усилий и форм потери устойчивости с точностью до любой степени ε. Однако на практике, как правило, бывает достаточно ограничиться первыми членами соответствующих разложений, к анализу которых мы и переходим.

Осредненное уравнение (16) с точностью до членов порядка ε совпадает с уравнением конструктивно-ортотропной теории, хотя и имеется существенное отличие: переменная η входит в нее параметрически, поэтому зависимость W_{00} от η можно определить только в следующем приближении.

Ясно, что в "случае общего положения" λ_0 – не кратное собственное значение. Поэтому для определения λ_1 нужно умножить обе части уравнения (17) на W_{00} и проинтегрировать с учетом граничных условий (21) (или (22)) и (23) по Ω [20]. В результате получаем уравнение для определения λ_1 и зависимость функции W_{00} от переменной η:

$$\nabla^4 W_{00} - \lambda_1 W_{00\xi\xi} = 0 \quad (36)$$

Собственное число λ_1, вообще говоря, может быть кратным, однако подобные случаи не являются "случаями общего положения" и не представляют большого интереса для механики пластин и оболочек. Поэтому далее будем считать соответствующие собственные числа не кратными. Отметим, что и в случае кратности построение следующих приближений в разложении λ не представляет труда и может быть выполнено по известной схеме [20].

Считая λ_1 не кратным, находим

$$\lambda_2 = 0, \quad W_{01} = W_{02} = 0$$

$$\lambda_3 = \left[\lambda_{03} - \int_0^1 \int_{-0,5}^{0,5} [\lambda_0 W_{1\xi\xi} + \Pi_{30} W_1] W_{00} d\xi d\eta\right] B \tag{37}$$

$$\lambda_k = \left[\lambda_{0k} - \int_0^1 \int_{-0,5}^{0,5} \left[\sum_{i=1}^{k-3} \lambda_i W_{0k-i\xi\xi} - \nabla^4 W_{0k-1} + W_{k-3} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{i=1}^{k-3} \lambda_i \overline{\overline{W_{k-2-i\xi\xi}}} + \overline{\overline{\Pi_{30} W_{k-2}}}\right] W_{00} d\xi d\eta\right] B \quad (k = 4, 5, \ldots) \tag{38}$$

$$B = \left[\int_0^1 \int_{-0,5}^{0,5} W_{00} W_{00\xi\xi} d\xi d\eta\right]^{-1}$$

Вид выражения λ_{0i} зависит от граничных условий при $\xi = 0, l$. Для условий (21):

$$\lambda_{0j} = \alpha \int_{-0,5}^{0,5} (W_{j-2\xi\xi} W_{00\xi} + W_{j-2} W_{00\xi\xi})\Big|_{\xi=0}^{\xi=1} d\eta$$

а для условий (22):

$$\lambda_{0j} = \alpha \int_{-0,5}^{0,5} (W_{j-2\xi} W_{00\xi\xi} + W_{j-2} W_{00\xi\xi\xi})\Big|_{\xi=0}^{\xi=1} d\eta \quad (j = 3, 4, \ldots)$$

Медленные составляющие W_{0k} ($k \geqslant 3, 4, \ldots$) определяются из уравнений (19), (20) после подстановки в них найденных значений λ_i.

Уравнения (16), (17) можно объединить в одно, которое в исходных переменных будет иметь вид

$$D_1 W_{0xxxx} + 2DW_{0xxyy} + DW_{0yyyy} + cW_0 + \overline{T} W_{0xx} = 0 \tag{39}$$

$$D_1 = D + E_c J / b, \qquad \overline{T} = T_0 + \varepsilon T_1$$

Это обычное уравнение конструктивно-ортотропной теории, получаемое "размазыванием" жесткостей и ребер по обшивке.

Граничные условия для уравнения (39) имеют вид:

$$\text{при} \quad x = 0, L_1: \quad W_0 = W_{0xx} = 0 \quad \text{или} \quad W_0 = W_{0x} = 0$$

$$\text{при} \quad y = \pm L_2: \quad W_0 = W_{0y} = 0 \tag{40}$$

Перейдем к построению быстрых составляющих решения W_i.

Используя уравнение (24) и граничные условия (27), находим

$$W_1 = \tfrac{1}{24} \Pi_{01} W_0 F_4(\varphi) \tag{41}$$

где $F_4(\varphi)$ – периодическая функция, имеющая на периоде $0 \leqslant \varphi \leqslant l$ вид

$$F_4(\varphi) = \varphi^2(\varphi - 1)^2$$

В исходных переменных

$$W_1=\frac{1}{24b}\left(\frac{E_cJ}{b}\frac{\partial^4}{\partial x^4}-\overline{T}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)W_0y^2(y-b)^2 \tag{42}$$

Выражение для W_1 при $i>1$ можно записать

$$W_1=\frac{1}{24}\left(\Pi_{01}W_{0i-1}-\sum_{j=1}^{i-1}\lambda_j W_{0k-1-j\xi\xi}\right)A_4(\varphi)+$$
$$+\int\int\int\int\left[\sum_{j=1}^{3}\overline{\Pi_jW_{i-j}}-\nabla^4\overline{W_{i-4}}+\sum_{j=0}^{i-4}\lambda_j\overline{W_{i-3-j\xi\xi}}\right]d\varphi d\varphi d\varphi d\varphi+\sum_{j=0}^{3}c_j^{(i)}\varphi^j$$

где "постоянные" $c_j^{(i)}(\xi,\eta)$ подбираются таким образом, чтобы удовлетворялись граничные условия (27).

Отметим, что соотношения (24)–(27) физически означают, что под действием быстропеременной по координате y фиктивной нагрузки деформация пластины сводится в основном к цилиндрическому изгибу между ребрами.

Наконец, рассмотрим соотношения пограничного слоя.

Решение уравнения (30) при граничных условиях (32) можно построить методом Канторовича [21], представляя функцию W_{b1} в виде

$$W_{b1}=\sum_{j=1}^{\infty}P_j(\psi)\varphi^2(\varphi-0,5)^{2j-2} \tag{43}$$

Ограничиваясь одним членом выражения (43) (такое приближение дает при расчете пластин вполне приемлемую точность [21]), приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$P_{1\psi\psi\psi\psi}-8P_{1\psi\psi}+\frac{63}{8}P_1=0 \tag{44}$$

Общее решение уравнения (44) имеет вид

$$P_1=\exp(-\sigma_1\psi)[c_{10}\cos(\sigma_1\psi)+c_{20}\sin(\sigma_2\psi)]+$$
$$+\exp[\sigma_1(\psi-l_1)][c_{30}\cos(\sigma_2(\psi-l_1))+c_{40}\sin(\sigma_2(\psi-l_1))]$$

Здесь $\sigma_1=4{,}150$, $\sigma_2=2{,}286$, $c_{10}-c_{40}$ – постоянные, позволяющие удовлетворять краевым условиям (34) (или (35)).

В исходных переменных погранслойное решение W_{b1} можно записать так

$$W_{b1}=\{\exp(-4{,}150x/b)[c_{10}\cos(2{,}286x/b)+c_{20}\sin(2{,}286x/b)]+$$
$$+\exp(-4{,}150(x-L_1)/b)[c_{30}\cos(2{,}286(x-L_1)/b)+$$
$$+c_{40}\sin(2{,}286(x-L_1)/b)]\}y^2(y-b)^2$$

Если $l_1>2$, то взаимным влиянием торцов полосы при определении постоянных c_{i0} можно пренебречь, заменяя условия на противоположном торце условиями затухания $W_{b1}\to 0$, $W_{b1\psi}\to 0$, $|\psi|\to\infty$.

Последующие составляющие решения типа пограничного слоя можно найти из уравнений (31) и краевых условий (32)–(35) также при помощи метода Канторовича [21].

Сделаем некоторые выводы о применимости конструктивно-ортотропной теории, широко используемой в инженерной практике.

Справедливы оценки

$$\lambda=\varepsilon^{-1}\lambda_0+o(\varepsilon^2),\quad W=W_0+o(\varepsilon^3)$$

$$M_i=M_i^{(0)}+M_i^{(1)}+o(\varepsilon)\quad (i=1,2);\quad M_{12}=M_{12}^{(0)}+\varepsilon M_{12}^{(1)}+o(\varepsilon^2)$$

где M_1, M_2 – изгибающие моменты в направлениях x, y соответственно, M_{12} – крутящий момент.

Отсюда следует, что конструктивно-ортотропная схема позволяет достаточно точно определять критические усилия, форма же потери устойчивости может быть определена достоверно лишь при учете дискретности расположения ребер. Отметим, что несмотря на малость поправки к собственной форме в краевой зоне (составляющая W_{b1} мала по сравнению с W_1), поправка к изгибающим моментам у края того же порядка, что и в основной зоне.

Эта работа была частично поддержана Международной Соросовской Программой поддержки науки в области точных наук (ISSEP) (грант № SPU 061002).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Амиро И.Я., Грачев О.А., Заруцкий В.А. и др.* Устойчивость ребристых оболочек вращения. Киев: Наук. думка, 1987. 160 с.
2. *Амиро И.Я., Заруцкий В.А.* Теория ребристых оболочек. Киев: Наук. думка, 1980. 368 с.
3. *Амиро И.Я., Заруцкий В.А.* Исследования в области устойчивости ребристых оболочек // Прикл. механика. 1983. Т. 19. № 11. С. 3–20.
4. *Амиро И.Я., Заруцкий В.А.* Статика, динамика и устойчивость ребристых оболочек // Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Сер. Механика деформируемого твердого тела. М.: ВИНИТИ, 1990. Т. 21. С. 132–191.
5. *Амиро И.Я., Заруцкий В.А., Поляков П.С.* Ребристые цилиндрические оболочки. Киев: Наук. думка, 1973. 248 с.
6. *Гавриленко Г.Д.* Исследование неоднородных нелинейных задач теории ребристых оболочек // Прикл. механика. 1979. Т. 15. № 9. С. 25–31.
7. *Гавриленко Г.Д.* Устойчивость стрингерных оболочек при неоднородном напряженно-деформированном состоянии // Прикл. механика. 1980. Т. 16. № 11. С. 41–46.
8. *Веллер Т., Зингер И., Баттерман С.Ч.* Влияние эксцентриситета нагрузки на потерю устойчивости цилиндрическими оболочками, подкрепленными стрингерами // Тонкостенные оболочечные конструкции. М.: Машиностроение, 1980. С. 320–339.
9. *Ильин В.П., Карпов В.В.* Устойчивость ребристых оболочек при больших перемещениях. Л.: Стройиздат, 1986. 168 с.
10. *Маневич А.И.* Устойчивость и оптимальное проектирование подкрепленных оболочек. Киев; Донецк: Вища школа, 1979. 152 с.
11. *Андрианов И.В., Маневич Л.И.* К расчету напряженно-деформированного состояния ортотропной полосы, подкрепленной ребрами жесткости // Изв. АН СССР. МТТ. 1975. № 4. С. 135–140.
12. *Андрианов И.В., Лесничая В.А., Маневич Л.И.* Метод усреднения в статике и динамике ребристых оболочек. М.: Наука, 1985. 221 с.
13. *Андрианов И.В., Маневич Л.И.* Применение метода осреднения к расчету оболочек // Успехи механики. 1983. Т. 6. № 3/4. С. 3–29.
14. *Образцов И.Ф., Нерубайло Б.В., Андрианов И.В.* Асимптотические методы в строительной механике тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1991. 416 с.
15. *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.
16. *Babuška I.* Homogenization approach in engineering // Lectures Notes in Econ. and Math. Systems. Berlin: Springer, 1976. V. 134. P. 137–153.
17. *Bensoussan A., Lions J.-L., Pananicolaou G.* Asymptotic Analisys for Periodic Structures. Amsterdam: North-Holland. 1978. 700 p.
18. *Лесничая В.А., Маневич Л.И.* Асимптотическое исследование колебаний пластин, подкрепленных ребрами жесткости // Прикл. механика. 1980. Т. 16. № 7. С. 67–72
19. *Найфе А.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 456 с.
20. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения. М.: Наука, 1968. 504 с.
21. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. М.; Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.

Днепропетровск

Поступила в редакцию
6.II.1996