МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1997

УДК 539.3:534.1

© 1997 г. Е.А. ИВАНОВА

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НИЗКОЧАСТОТНЫХ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН

Известно, что при решении задач изгиба пластин теория Кирхгофа позволяет определять асимптотически главные члены всех величин внутри области пластины и допускает асимптотическую ошибку порядка $O(1)$ в сравнении с главным членом при вычислении перерезывающих сил и крутящих моментов вблизи границы. Известно также, что результаты сравнения численных решений задач по теории Кирхгофа и по теории Рейсснера хорошо согласуются с выводами, сделанными на основании асимптотического анализа. Обсуждению асимптотического перехода от теории типа Рейсснера к теории Кирхгофа и сравнению численных результатов решения задач по этим двум теориям посвящено такое множество работ, что, казалось бы, добавить здесь уже нечего. Однако большинство авторов ограничивается рассмотрением жестко заделанных, шарнирно опертых и свободных на контуре пластин, тогда как в теории Рейсснера существует еще пять типов граничных условий, которые также представляют интерес если не с практической, то, хотя бы, с теоретической точки зрения. На первый взгляд кажется очевидным, что выводы, сделанные на основании исследования точности теории Кирхгофа при трех указанных выше типах граничных условий, справедливы всегда. Однако более детальное исследование данного вопроса показало, что последнее утверждение требует уточнения.

Ниже на примере задач о свободных колебаниях прямоугольных пластин проведено сравнение асимптотической и реальной точности теории Кирхгофа (под реальной точностью понимается относительное отличие значения величины, вычисленной по теории Кирхгофа, от значения той же величины, вычисленной по теории Рейсснера, при данном конкретном значении малого параметра). Рассмотрены все возможные в теории Рейсснера краевые условия (восемь типов). При шести типах граничных условий (в том числе при тех трех типах, которые традиционно встречаются в литературе) не возникло никаких противоречий с известными фактами. Что касается еще двух типов граничных условий – то здесь результаты оказались неожиданными. Выяснилось, что в случае задания на контуре условий скользящей заделки ($N_\nu|_c = 0$, $\Psi_\nu|_c = 0$, $\Psi_\tau|_c = 0$) и условий усиленного свободного края ($N_\nu|_c = 0$, $M_\nu|_c = 0$, $\Psi_\tau|_c = 0$) использование теории Кирхгофа приводит к возникновению настолько больших реальных погрешностей (даже когда речь идет о вычислении первых нескольких собственных частот), что приходится сделать вывод о неприменимости теории Кирхгофа при данных типах граничных условий. Это обстоятельство представляется особенно интересным в связи с тем, что с точки зрения асимптотики постановка задачи в рамках теории Кирхгофа позволяет определять собственные частоты с ошибкой, не превышающей $O(h)$ в сравнении с единицей, при всех возможных в теории Рейсснера типах граничных условий. Последнее означает, что при формальном подходе к обсуждаемой проблеме остается не ясным, почему при одних условиях на контуре использование теории Кирхгофа позволяет решить задачу с приемлемой реальной погрешностью, и при других – нет. Ответить на этот вопрос оказалось возможным только после того, как был проведен асимптотический анализ частотных уравнений и получены асимптотические формулы для оценки реальных погрешностей, возникающих при вычислении собственных частот по теории Кирхгофа, при различных типах граничных условий.

В [1] предложена приближенная формулировка задачи о низкочастотных свободных колебаниях пластины Рейсснера, которая отличается от теории Кирхгофа тем, что в ней учтена деформация поперечного сдвига вблизи края пластины (асимптотическая точность обсуждаемой формулировки задачи – $O(h^2)$ в сравнении с единицей). Ниже на примере задач о свободных колебаниях прямоугольных пластин проведено сравнение реальной точности теории Кирхгофа и реальной точности теории с учетом деформации поперечного сдвига вблизи границы (рассмотрены все типы краевых условий). Проведенное исследование показало, что при тех шести типах граничных условий, когда теория Кирхгофа допускает вполне приемлемые погрешности, учет деформации поперечного сдвига оказывает заметное влияние только на вид собственных форм вблизи края пластины. В тех случаях, когда теория Кирхгофа не применима, а именно в случае задания на контуре условий скользящей заделки ($N_\nu|_c = 0$, $\Psi_\nu|_c = 0$, $\Psi_\tau|_c = 0$) и условий усиленного свободного края ($N_\nu|_c = 0$, $M_\nu|_c = 0$, $\Psi_\tau|_c = 0$), учет деформации поперечного сдвига вблизи края пластины принципиально меняет дело: оказывается, что использование теории с учетом деформации поперечного сдвига вблизи границы дает возможность вычислять и собственные частоты, и собственные формы с такими же реальными погрешностями, как и при тех типах граничных условий, когда теория Кирхгофа допускает "нормальные" погрешности.

1. Сводка основных уравнений, описывающих свободные колебания пластины Рейсснера. Дифференциальные уравнения имеют вид [2]:

$$D\Delta\Delta\Phi + \rho h\ddot{\Phi} - \frac{\rho h^3}{12}\left(1 + \frac{2}{\Gamma(1-\mu)}\right)\Delta\ddot{\Phi} + \frac{\rho^2 h^3}{12G\Gamma}(\Phi)^{\cdot\cdot\cdot\cdot} = 0 \tag{1.1}$$

$$\Delta F - \frac{12\Gamma}{h^2}F - \frac{\rho}{G}\ddot{F} = 0 \tag{1.2}$$

Величины, характеризующие напряженно-деформированное состояние пластины, вычисляются по формулам

$$w = -\Phi + \frac{h^2}{6\Gamma(1-\mu)}\Delta\Phi - \frac{\rho h^2}{12G\Gamma}\ddot{\Phi}, \quad \mathbf{\Psi} = \nabla\Phi + \nabla F \times \mathbf{n}$$

$$\mathbf{N} = D\nabla\Delta\Phi - \frac{\rho h^3}{12}\nabla\ddot{\Phi} + Gh\Gamma\nabla F \times \mathbf{n} \tag{1.3}$$

$$\mathbf{M} = D[(1-\mu)\nabla\nabla\Phi + \mu\Delta\Phi\mathbf{a} + \frac{1-\mu}{2}(\nabla\nabla F \times \mathbf{n} - \mathbf{n} \times \nabla\nabla F)]$$

Здесь приняты следующие обозначения: w – поперечный прогиб, $\mathbf{\Psi}$ – вектор углов поворота, $\mathbf{N}$ – вектор поперечных сил, $\mathbf{M}$ – тензор моментов, $D = Eh^3/[12(1-\mu^2)]$ – жесткость на изгиб, $Gh\Gamma$ – жесткость на сдвиг, $G = E/[2(1+\mu)]$, Γ – коэффициент поперечного сдвига, E – модуль Юнга, μ – коэффициент Пуассона, ρ – объемная плотность массы, h – толщина пластины, $\mathbf{n}$ – вектор единичной нормали к плоскости пластины, $\mathbf{a} = \mathbf{E} - \mathbf{nn}$, $\mathbf{E}$ – единичный тензор.

Граничные условия будут сформулированы позже, а сейчас ограничимся замечанием, что теория Рейсснера позволяет удовлетворить трем условиям на контуре и, следовательно, здесь возможны восемь различных типов краевых условий.

2. Приближенная формулировка задачи о низкочастотных свободных колебаниях пластины Рейсснера, учитывающая деформацию поперечного сдвига вблизи края пластины. Ниже приведена формулировка задачи, предложенная в [1]. Дифференциальное уравнение совпадает с уравнением Кирхгофа

$$D\Delta\Delta\Phi + \rho h\ddot{\Phi} = 0 \tag{2.1}$$

Функция, характеризующая погранслойный эффект, имеет вид

$$F(\nu,\tau) = f(\tau)\left[1 - \frac{\nu}{2R}\right]\exp\left(\frac{\delta}{h}\nu\right), \quad \delta = \sqrt{12\Gamma} \quad (\nu < 0) \tag{2.2}$$

Здесь ν, τ – локальная система координат, введенная на контуре пластины, $R(\tau)$ – радиус кривизны контура в данной точке.

Поперечный прогиб, вектор углов поворота, вектор поперечных сил и тензор моментов вычисляются по формулам

$$w = -\Phi, \quad \mathbf{\Psi} = \nabla\Phi - \frac{\delta}{h} f(\tau)\exp\left(\frac{\delta}{h}\nu\right)\tau$$

$$\mathbf{N} = D\nabla\Delta\Phi + Gh\Gamma\left[\left(-\frac{\delta}{h}\left(1-\frac{\nu}{2R}\right)+\frac{1}{2R}\right)f(\tau)\tau + \right.$$

$$\left. +\left(\left(1-\frac{\nu}{2R}\right)f'(\tau)+\frac{\nu R'}{2R^2}f(\tau)\right)\nu\right]\exp\left(\frac{\delta}{h}\nu\right) \tag{2.3}$$

$$\mathbf{M} = D[(1-\mu)\nabla\nabla\Phi + \mu\Delta\Phi\mathbf{a}] + \left[D(1-\mu)\frac{\delta}{h}f'(\tau)(\nu\nu - \tau\tau) - \right.$$

$$\left. -Gh\Gamma\left(1-\frac{\nu}{2R}-\frac{2h}{R\delta}\right)f(\tau)(\nu\tau+\tau\nu)\right]\exp\left(\frac{\delta}{h}\nu\right)$$

Здесь $\boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{\tau}$ – векторы единичной внешней нормали и единичной касательной к контуру пластины ($\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}$ образуют правую тройку).

Заметим, что при переходе от точной формулировки задачи к обсуждаемой здесь приближенной формулировке, граничные условия не претерпевают качественного изменения, так как учет погранслойной функции (2.2) дает возможность удовлетворить всем трем условиям на контуре.

3. Постановка задачи о свободных колебаниях пластины в теории Кирхгофа. Формулировка обсуждаемой задачи в теории Кирхгофа получается из системы уравнений (2.1)–(2.3), при условии что погранслойная функция считается тождественно равной нулю: $F \equiv 0$. При этом возникают сразу две проблемы. Первая проблема заключается в том, что поперечные силы и крутящие моменты вблизи границы пластины, в общем случае, определяются с ошибками в главных членах асимптотических разложений. Очевидно, что решить эту проблему в рамках теории Кирхгофа не представляется возможным, поскольку единственным выходом здесь будет учет асимптотически главного члена погранслойной функции. Вторая проблема связана с формулировкой граничных условий. Она заключается в следующем: игнорирование погранслойной функции приводит к понижению порядка системы дифференциальных уравнений по пространственным координатам, в результате чего возникает необходимость замены трех условий на контуре двумя. Проблему формулировки граничных условий обсудим подробнее. Поставим вопрос так: можно ли при всех типах граничных условий, существующих в теории Рейсснера, допуская асимптотическую ошибку $O(h)$ в сравнении с единицей, переформулировать граничные условия таким образом, чтобы два из них зависели только от функции Φ, характеризующей проникающее во всю область пластины решение, а третье условие либо являлось следствием двух других, либо служило для определения погранслойной функции F. Утвердительный ответ на этот вопрос будет означать, что теория Кирхгофа позволяет определять собственные частоты и формы колебаний внутри области пластины с асимптотической ошибкой порядка $O(h)$ в сравнении с единицей при всех типах граничных условий.

Ниже приведены формулировки граничных условий в теории Кирхгофа, соответствующие различным типам граничных условий в теории Рейсснера, а также сформулированы условия для определения асимптотически главного члена погранслойного потенциала.

1. Жесткая заделка

$$w|_c = 0, \quad \Psi_\nu|_c = 0, \quad \Psi_\tau|_c = 0 \tag{3.1}$$

Теория Кирхгофа

$$\Phi|_c = 0, \quad \partial\Phi / \partial\nu|_c = 0 \tag{3.2}$$

Условие $\partial\Phi/\partial\tau|_c = 0$ является следствием первого условия из (3.2). Главный член погранслойного потенциала равен нулю.

2. Стесненное шарнирное опирание

$$w|_c = 0, \quad M_\nu|_c = 0, \quad \Psi_\tau|_c = 0 \tag{3.3}$$

Теория Кирхгофа

$$\Phi|_c = 0, \quad D\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\nu^2} + \frac{\mu}{R}\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} + \mu\frac{\partial^2\Phi}{\partial\tau^2}\right)\Bigg|_c = 0 \tag{3.4}$$

Условие $\partial\Phi/\partial\tau|_c = 0$ является следствием первого условия из (3.4). Главный член погранслойного потенциала равен нулю.

3. Свободное шарнирное опирание

$$w|_c = 0, \quad M_\nu|_c = 0, \quad M_\tau|_c = 0 \tag{3.5}$$

Теория Кирхгофа. Граничные условия имеют вид (3.4), как в случае стесненного шарнирного опирания. Однако главный член погранслойного потенциала, в отличие от стесненного шарнирного опирания, не равен нулю и определяется формулой

$$f(\tau) = \frac{h^2}{6\Gamma}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\nu\partial\tau}\Bigg|_c \tag{3.6}$$

4. Свободный край

$$N_\nu|_c = 0, \quad M_\nu|_c = 0, \quad M_\tau|_c = 0 \tag{3.7}$$

Теория Кирхгофа

$$D\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\nu^2} + \frac{\mu}{R}\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} + \mu\frac{\partial^2\Phi}{\partial\tau^2}\right)\Bigg|_c = 0, \quad D\left(\frac{\partial\Delta\Phi}{\partial\nu} + (1-\mu)\frac{\partial^3\Phi}{\partial\tau\partial\nu\partial\tau}\right)\Bigg|_c = 0 \tag{3.8}$$

Главный член погранслойного потенциала не равен нулю и определяется соотношением (3.6).

5. Скользящая заделка

$$N_\nu|_c = 0, \quad \Psi_\nu|_c = 0, \quad \Psi_\tau|_c = 0 \tag{3.9}$$

Теория Кирхгофа

$$\partial\Phi / \partial\nu|_c = 0, \quad \partial\Phi / \partial\tau|_c = 0 \tag{3.10}$$

Главный член погранслойного потенциала не равен нулю и определяется формулой

$$f'(\tau) = -\frac{h^2}{6\Gamma(1-\mu)}\frac{\partial\Delta\Phi}{\partial\nu}\Bigg|_c \tag{3.11}$$

6. Ослабленная жесткая заделка

$$w|_c = 0, \quad \Psi_\nu|_c = 0, \quad M_\tau|_c = 0 \tag{3.12}$$

Теория Кирхгофа. Граничные условия имеют вид (3.2), как в случае жесткой заделки. Главный член погранслойного потенциала равен нулю, поскольку третье условие из (3.12) является следствием двух первых.

7. Ослабленная скользящая заделка

$$N_\nu|_c = 0, \quad \Psi_\nu|_c = 0, \quad M_\tau|_c = 0 \tag{3.13}$$

Теория Кирхгофа

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}\right|_c = 0, \quad D\left.\left(\frac{\partial \Delta\Phi}{\partial \nu} + (1-\mu)\frac{\partial^3 \Phi}{\partial \tau \partial \nu \partial \tau}\right)\right|_c = 0 \tag{3.14}$$

Главный член погранслойного потенциала определяется соотношением (3.6), которое с учетом первого условия из (3.14) принимает вид

$$f(\tau) = -(h^2/6\Gamma)(1/R)\partial\Phi/\partial\tau|_c = 0$$

т.е. главный член погранслойного потенциала не равен нулю только в случае криволинейного контура пластины.

8. Усиленный свободный край

$$N_\nu|_c = 0, \quad M_\nu|_c = 0, \quad \Psi_\tau|_c = 0 \tag{3.15}$$

Теория Кирхгофа

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial \tau}\right|_c = 0, \quad D\left.\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \nu^2} + \frac{\mu}{R}\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} + \mu\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2}\right)\right|_c = 0 \tag{3.16}$$

Главный член погранслойного потенциала определяется соотношением (3.11).

Вывод: теория Кирхгофа позволяет определять асимптотически главные члены собственных частот и собственных форм внутри области пластины при всех возможных в теории Рейсснера типах граничных условий.

4. Свободные колебания прямоугольной пластины, шарнирно опертой по двум противоположным сторонам. Рассмотрим пластину, занимающую область $-a \leqslant x \leqslant a$, $-b \leqslant y \leqslant b$. На сторонах $y = \pm b$ выполнены условия стесненного шарнирного опирания (3.3), а на сторонах $x = \pm a$ – произвольные граничные условия. Ниже будут рассматриваться колебания, симметричные относительно осей $x = 0$, $y = 0$. Легко показать, что собственные формы, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям (1.1), (1.2) и граничным условиям (3.3) на сторонах $y = \pm b$, имеют вид

$$\Phi_n(x,y) = [C_{1n}\cos(\lambda_{1n}x) + C_{2n}\cos(\lambda_{2n}x)]\cos(\mu_n y)$$

$$F_n(x,y) = C_{3n}\sin(\delta_n x)\sin(\mu_n y)$$

$$\mu_n = (2n-1)\pi/(2b), \quad \lambda_{1n} = \sqrt{A_n - B_n}, \quad \lambda_{2n} = \sqrt{A_n + B_n} \tag{4.1}$$

$$\delta_n = \sqrt{\rho\omega_n^2/G - 12\Gamma/h^2 - \mu_n^2}, \quad A_n = [1 + \Gamma(1-\mu)/2]\rho\omega_n^2/(2G\Gamma) - \mu_n^2$$

$$B_n = \sqrt{\rho h/D + ([1 - \Gamma(1-\mu)/2]\rho\omega_n^2/(2G\Gamma))^2}$$

Удовлетворение граничным условиям на сторонах $x = \pm a$ приводит к системе линейных однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных C_{1n}, C_{2n}, C_{3n}; условие равенства нулю определителя этой системы дает уравнение для определения собственных частот. При решении обсуждаемой здесь задачи были рассмотрены все восемь указанных выше типов граничных условий и для каждого из них получены частотные уравнения. (Эти уравнения не приводятся из-за их громоздкости.)

Следует заметить, что в теории Рейсснера существует три спектра собственных частот: один – низкочастотный ($\omega \sim h$) и два высокочастотных ($\omega \sim h^{-1}$). Теория Кирхгофа, так же как и теория, учитывающая деформацию поперечного сдвига вблизи границы пластины [1], позволяет вычислять только частоты, принадлежащие низкочастотному спектру. Поэтому высокочастотные колебания ниже обсуждаться не будут.

Кратко остановимся на особенностях решения обсуждаемой задачи по теории, учитывающей деформацию поперечного сдвига вблизи края пластины [1]. Собственные формы, удовлетворяющие уравнениям (2.1), (2.2) и граничным условиям (3.3) на сторонах $y = \pm b$ имеют вид (здесь уже учтена симметрия относительно осей $x = 0$, $y = 0$):

$$\Phi_n(x,y) = [C_{1n}\cos(\lambda_{1n}x) + C_{2n}\cos(\lambda_{2n}x)]\cos(\mu_n y)$$

$$F_n(x,y) = f_n(y)[\exp[-(a-x)\delta/h] - \exp[-(a+x)\delta/h]] \tag{4.2}$$

$$\lambda_{1n} = \sqrt{-\mu_n^2 - \omega_n\sqrt{\rho h/D}}, \quad \lambda_{2n} = \sqrt{-\mu_n^2 + \omega_n\sqrt{\rho h/D}}$$

Вид функции $f_n(y)$ определяется граничными условиями на сторонах $x = \pm a$: $f_n(y) = C_{3n}\sin(\mu_n y)$.

Асимптотический анализ показал, что частотные уравнения и собственные формы, найденные по теории с учетом деформации поперечного сдвига вблизи края пластины, следуют из точных (найденных по теории Рейсснера) частотных уравнений и собственных форм с асимптотической ошибкой порядка $O(h^2)$ в сравнении с единицей.

Обсудим решение данной задачи по теории Кирхгофа. Собственные формы, удовлетворяющие дифференциальному уравнению (2.1) и условиям стесненного шарнирного опирания (3.4) на сторонах $y = \pm b$, определяются соотношениями (4.2), при условии, что функция $f_n(y)$ считается тождественно равной нулю $f_n(y) \equiv 0$. Сделаем два замечания, касающихся результатов решения задачи при различных типах граничных условий на сторонах $x = \pm a$.

Замечание 1. В случае задания на сторонах $x = \pm a$ условий жесткой заделки (3.1), стесненного шарнирного опирания (3.3), ослабленной жесткой заделки (3.12) и ослабленной скользящей заделки (3.13) асимптотически главный член погранслойного потенциала тождественно равен нулю. Следовательно, при этих типах граничных условий теория Кирхгофа позволяет решить задачу о нахождении собственных частот и собственных форм с асимптотической ошибкой порядка $O(h^2)$ в сравнении с единицей, а решение по теории с учетом деформации поперечного сдвига вблизи края пластины в точности совпадает с решением по теории Кирхгофа.

Замечание 2. В случае задания на сторонах $x = \pm a$ условий стесненного шарнирного опирания (3.3), свободного шарнирного опирания (3.5) и усиленного свободного края (3.15) теория Кирхгофа приводит к одному и тому же решению. Действительно, условия свободного и стесненного шарнирного опирания в теории Кирхгофа совпадают и имеют вид (3.4), а условия усиленного свободного края (3.16) отличаются от (3.4) только тем, что здесь вместо условия $\Phi|_c = 0$ поставлено условие, которое непосредственно из него следует: $\partial\Phi/\partial\tau|_c = 0$. В случае задания на сторонах $x = \pm a$ условий жесткой заделки (3.1), скользящей заделки (3.9) и ослабленной жесткой заделки (3.12) теория Кирхгофа также приводит к одному и тому же решению. Условия жесткой и ослабленной жесткой заделки в теории Кирхгофа совпадают и имеют вид (3.2), а условия скользящей заделки (3.10) отличаются тем, что здесь вместо $\Phi|_c = 0$ поставлено условие $\partial\Phi/\partial\tau|_c = 0$.

Таблица 1

N	ω_R	ω	Δ	ω_k	δ_k
			$h = 0{,}1$		
1	740,831	746,960	0,83	756,153	2,07
2	3613,906	3762,387	4,11	3780,612	4,61
3	3614,672	3764,217	4,14	3780,612	4,59
4	6271,550	6716,355	7,09	6805,070	8,51
5	8895,791	9807,466	10,30	9829,529	10,50
			$h = 0{,}04$		
1	300,561	300,990	0,14	302,461	0,63
2	1499,312	1509,547	0,68	1512,245	0,86
3	1499,373	1509,670	0,69	1512,245	0,86
4	2676,121	2708,665	1,22	2722,028	1,72
5	3860,653	3928,806	1,77	3931,812	1,84

Таблица 2

N	ω_R	ω	Δ	ω_k	δ_k
			$h = 0{,}1$		
1	370,032	371,565	0,41	372,024	0,54
2	1385,438	1404,897	1,40	1424,050	2,79
3	3255,978	3376,258	3,69	3381,774	3,86
4	4451,880	4667,923	4,85	4713,277	5,87
5	4840,758	5102,156	5,40	5133,873	6,05
			$h = 0{,}04$		
1	148,626	148,748	0,08	148,810	0,12
2	565,330	569,313	0,70	569,620	0,76
3	1343,761	1351,913	0,61	1352,709	0,67
4	1863,737	1885,127	1,15	1885,311	1,16
5	2030,259	2053,365	1,14	2053,549	1,15

Таблица 3

N	ω_R	ω	Δ	ω_k	δ_k
			$h = 0{,}1$		
1	772,548	773,774	0,16	1109,024	43,55
2	2202,267	2254,363	2,37	4945,102	124,55
3	3613,446	3752,419	3,85	3915,448	8,36
4	5669,845	5985,636	5,57	7653,923	35,00
5	6104,690	6537,085	7,08	11771,931	92,83
			$h = 0{,}04$		
1	371,902	371,840	0,02	443,610	19,28
2	1085,428	1089,106	0,34	1978,041	82,24
3	1526,035	1535,835	0,62	1566,179	2,63
4	2653,017	2685,316	1,22	4708,772	77,49
5	2671,404	2693,713	0,84	3061,569	14,61

Таким образом, восемь существующих в теории Рейсснера типов граничных условий можно разделить на четыре группы:

I. жесткая заделка, скользящая заделка, ослабленная жесткая заделка*;

II. стесненное шарнирное опирание*, свободное шарнирное опирание, усиленный свободный край;

III. свободный край;

Таблица 4

N	ω_R	ω	Δ	ω_k	δ_k
		$h = 0{,}1$			
1	687,816	692,719	0,71	756,153	9,94
2	2002,924	2027,900	1,25	3780,612	88,75
3	3589,084	3734,339	4,05	3780,612	5,34
4	4970,231	5229,177	5,21	9829,529	97,77
5	5665,708	5966,331	5,31	6805,070	20,11
		$h = 0{,}04$			
1	291,858	292,226	0,13	302,461	3,63
2	1083,650	1086,898	0,30	1512,245	39,55
3	1495,818	1505,992	0,68	1512,245	1,10
4	2266,037	2284,607	0,81	3931,812	73,51
5	2583,023	2611,645	1,11	2722,028	5,38

IV. ослабленная скользящая заделка*.

В группы объединены те типы граничных условий, которые в теории Кирхгофа не различимы. Звездочками помечены те типы граничных условий, при которых теория Кирхгофа допускает асимптотические ошибки порядка $O(h^2)$ в сравнении с единицей.

5. Свободные колебания прямоугольной пластины. Сравнительный анализ численных результатов, полученных по различным теориям. Данное исследование проведено на примере задачи, обсуждавшейся в п. 4. Вычисления проводились для пластины размером $a = b = 1$ м, $h = 0{,}1$ м и $h = 0{,}04$ м при следующих значениях констант, характеризующих упругие и инерционные свойства материала: $E = 2{,}1 \cdot 10^{11}$ Па, $\mu = 0{,}25$, $\Gamma = 5/6$, $\rho = 7{,}951 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Результаты вычислений сводятся к следующему:

1. Вычислены первые 10 собственных частот из низкочастотного спектра. Вычисления проводились по различным теориям (по теории Рейсснера, по теории Кирхгофа и по теории с учетом деформации поперечного сдвига вблизи края пластины). Рассмотрены все возможные в теории Рейсснера типы граничных условий.

2. Вычислены реальные погрешности, возникающие при использовании приближенных теорий (также для всех типов граничных условий).

3. Для тех типов граничных условий, когда асимптотически главный член погранслойного потенциала не равен нулю, вычислены собственные формы, соответствующие первым 10-ти собственным частотам.

Перейдем к подробному анализу полученных результатов. Те типы граничных условий, при которых асимптотически главный член погранслойного потенциала обращается в ноль (это условия (3.1), (3.3), (3.12) и (3.13)), представляются мало интересными и далее обсуждаться не будут. Заметим только, что полученные оценки реальных погрешностей, допускаемых теорией Кирхгофа, при этих типах граничных условий хорошо согласуются с известными.

Результаты вычисления первых пяти собственных частот при тех типах граничных условий, когда асимптотически главный член погранслойного потенциала не равен нулю, а именно в случаях задания на сторонах $x = \pm a$ условий свободного шарнирного опирания (3.5), свободного края (3.7), скользящей заделки (3.9) и усиленного свободного края (3.15), приведены в табл. 1–4 соответственно. В таблицах используются следующие обозначения: N – номер частоты, ω_R – значение частоты, вычисленной по теории Рейсснера, ω – значение частоты, вычисленной по приближенной теории с учетом деформации поперечного сдвига вблизи края пластины, Δ – относительная погрешность, допускаемая этой теорией: $\Delta = (|\,\omega - \omega_R\,|/\omega_R)\cdot 100\%$, ω_k – значение частоты, вычисленной по теории Кирхгофа, δ_k – относительная погрешность, допускаемая теорией Кирхгофа: $\delta_k = (|\,\omega_k - \omega_R\,|/\omega_R)\cdot 100\%$.

Как видно из табл. 1 и 2, погрешности, допускаемые теорией Кирхгофа в случаях задания на сторонах $x = \pm a$ условий свободного шарнирного опирания и свободного края, ведут себя "нормально": и их величины, и тот факт, что они стабильно возрастают с ростом номера частоты, и то, что теория Кирхгофа дает завышенные значения частот – все это полностью совпадает с результатами исследований, проведенных ранее другими авторами. Учет деформации поперечного сдвига вблизи края пластины при этих типах граничных условий лишь незначительно увеличивает точность вычисления собственных частот. Последнее, однако, вовсе не означает, что теория с учетом деформации поперечного сдвига вблизи края пластины в данном случае не имеет никаких преимуществ перед теорией Кирхгофа. В самом деле, поскольку асимптотически главный член погранслойного потенциала не равен нулю, при вычислении перерезывающих сил и крутящих моментов теория Кирхгофа вблизи края пластины допускает весьма существенные погрешности, ликвидировать которые позволяет именно учет деформации поперечного сдвига вблизи края пластины.

В случаях задания на сторонах $x = \pm a$ условий скользящей заделки и усиленного свободного края (табл. 3 и 4) реальные погрешности, допускаемые теорией Кирхгофа, "нормальными" назвать нельзя. Напротив, они ведут себя весьма странным образом: во-первых, они теряют свойство стабильного возрастания с ростом номера частоты, а во-вторых, для некоторых частот они оказываются настолько большими, что приходится сделать вывод о неприменимости теории Кирхгофа при данных типах граничных условий. И это при том, что частотные уравнения, полученные в рамках теории Кирхгофа, являются асимптотически главными членами соответствующих частотных уравнений, полученных по теории Рейсснера! Интересным представляется и тот факт, что, как видно из табл. 3 и 4, погрешности, допускаемые теорией с учетом деформации поперечного сдвига вблизи края пластины, оказываются вполне "нормальными", т.е. такими же, как и при всех остальных типах граничных условий. Подобные результаты, прежде всего, наводят на мысль о том, что, возможно, были допущены какие-то вычислительные ошибки. Чтобы рассеять сомнения по этому поводу, приведем частотные уравнения, полученные по теории Кирхгофа и по теории с учетом деформации поперечного сдвига вблизи края пластины, а также асимптотические формулы для относительных погрешностей δ_*, допускаемых теорией Кирхгофа: $\delta_* = [(\omega_k - \omega)/\omega]\cdot 100\%$. (Частотные уравнения, полученные по точной теории Рейсснера, не приводятся из-за их громоздкости. По этой же причине частоты, найденные по теории Кирхгофа, сравниваются не с частотами, найденными по точной теории Рейсснера, а с частотами, найденными по теории, учитывающей деформацию поперечного сдвига вблизи края пластины.)

Скользящая заделка. Частотное уравнение, полученное по теории Кирхгофа, имеет вид

$$\lambda_{1n}\cos(\lambda_{2n}a)\,\mathrm{sh}(\lambda_{1n}a) + \lambda_{2n}\sin(\lambda_{2n}a)\,\mathrm{ch}(\lambda_{1n}a) = 0 \tag{5.1}$$

$$\lambda_{1n} = \sqrt{\omega_n\sqrt{\rho h / D} + \mu_n^2}, \quad \lambda_{2n} = \sqrt{\omega_n\sqrt{\rho h / D} - \mu_n^2}, \quad \mu_n = (2n-1)\pi/(2b)$$

Частотное уравнение, полученное по теории с учетом деформации поперечного сдвига вблизи края пластины, выглядит так

$$(1-\mu)\mu_n^2[\lambda_{1n}\cos(\lambda_{2n}a)\,\mathrm{sh}(\lambda_{1n}a) + \lambda_{2n}\sin(\lambda_{2n}a)\,\mathrm{ch}(\lambda_{1n}a)] -$$
$$-4(h/\delta)\omega_n\sqrt{\rho h / D}\lambda_{1n}\lambda_{2n}\sin(\lambda_{2n}a)\,\mathrm{sh}(\lambda_{1n}a) = 0 \tag{5.2}$$

Относительная погрешность, допускаемая теорией Кирхгофа, приближенно вычисляется по формуле

$$\delta_* = \frac{4}{\delta(1-\mu)}\frac{h}{a}\left[\frac{\mu_n^4}{(\lambda_{1n}\lambda_{2n})^2}\left(1 + \frac{\cos(\lambda_{2n}a)}{(\lambda_{2n}a)\sin(\lambda_{2n}a)}\right) + \frac{\mu_n^2\cos^2(\lambda_{2n}a)}{\lambda_{2n}^2\sin^2(\lambda_{2n}a)}\right]^{-1}\cdot 100\% \tag{5.3}$$

Таблица 5

N	$\delta_*(h=0{,}1)$	$\delta_*(h=0{,}04)$
1	49,18	19,67
2	223,83	89,53
3	5,49	2,20
4	32,24	212,21
5	530,52	12,90

Таблица 6

N	$\delta_*(h=0{,}1)$	$\delta_*(h=0{,}04)$
1	8,51	3,41
2	76,52	30,61
3	0,95	0,38
4	212,54	85,02
5	8,51	3,40

Усиленный свободный край. Частотное уравнение, полученное по теории Кирхгофа, имеет вид

$$\cos(\lambda_{2n}a)=0,\quad \lambda_{2n}=\sqrt{\omega_n\sqrt{\rho h/D}-\mu_n^2},\quad \mu_n=(2n-1)\pi/(2b) \tag{5.4}$$

Частотное уравнение, полученное по теории с учетом деформации поперечного сдвига вблизи края пластины, выглядит так

$$(1-\mu)\mu_n^2\cos(\lambda_{2n}a)\operatorname{ch}(\lambda_{1n}a)-(h/\delta)\omega_n\sqrt{\rho h/D}\times$$
$$\times[\lambda_{1n}\cos(\lambda_{2n}a)\operatorname{sh}(\lambda_{1n}a)+\lambda_{2n}\sin(\lambda_{2n}a)\operatorname{ch}(\lambda_{1n}a)]=0 \tag{5.5}$$

Относительная погрешность, допускаемая теорией Кирхгофа, приближенно вычисляется по формуле

$$\delta_*=\frac{2}{\delta(1-\mu)}\frac{h}{a}\frac{\lambda_{2n}^2}{\mu_n^2}\cdot 100\% \tag{5.6}$$

В табл. 5 и 6 приведены значения относительных погрешностей δ_*, вычисленных по формуле (5.3) для случая скользящей заделки (табл. 5) и по формуле (5.6) для случая усиленного свободного края (табл. 6). Сравнивая значения погрешностей, приведенных в табл. 5 и 6, со значениями соответствующих погрешностей, приведенных в табл. 3 и 4, легко убедиться в том, что совпадение достаточно хорошее для того, чтобы можно было исключить всякую возможность ошибки.

Итак, почему же при двух типах граничных условий теория Кирхгофа оказывается не применимой? Физические основы этого явления будут обсуждаться позже, а с вычислительной точки зрения причина, видимо, заключается в том, что при этих двух типах граничных условий погранслойный потенциал оказывается значительно больше, чем при других (имеются в виду, конечно, реальные значения погранслойного потенциала, а не асимптотический порядок). Приведенные ниже выражения для собственных форм (вычисленных по теории Рейсснера при $h = 0{,}1$ м) в случае свободного шарнирного опирания (когда теория Кирхгофа дает "нормальные" результаты) и в случае скользящей заделки (когда теория Кирхгофа не применима) показывают, что, действительно в случае скользящей заделки погранслойный потенциал оказывается примерно в 3 раза больше, чем в случае свободного шарнирного опирания.

Свободное шарнирное опирание

$$\Phi_1=0{,}0349\cos(1{,}55x)\cos(1{,}57y),\quad F_1=0{,}0002[e^{-31{,}66(1-x)}-e^{-31{,}66(1+x)}]\sin(1{,}57y)$$

$$\Phi_2=0{,}0327\cos(1{,}54x)\cos(4{,}71y),\quad F_2=0{,}0005[e^{-31{,}95(1-x)}-e^{-31{,}95(1+x)}]\sin(4{,}71y)$$

$$\Phi_3=-0{,}0331\cos(4{,}70x)\cos(1{,}57y),\quad F_3=0{,}0005[e^{-31{,}64(1-x)}-e^{-31{,}64(1+x)}]\sin(1{,}57y)$$

$$\Phi_4=-0{,}0314\cos(4{,}66x)\cos(4{,}71y),\quad F_4=0{,}0015[e^{-31{,}91(1-x)}-e^{-31{,}91(1+x)}]\sin(4{,}71y)$$

$$\Phi_5=0{,}0296\cos(1{,}53x)\cos(7{,}85y),\quad F_5=0{,}0009[e^{-32{,}47(1-x)}-e^{-32{,}47(1+x)}]\sin(7{,}85y)$$

Скользящая заделка

$$\Phi_1 = -0,0290\cos(1,62x)\cos(1,57y), \quad F_1 = 0,0008[e^{-31,66(1-x)} - e^{-31,66(1+x)}]\sin(1,57y)$$

$$\Phi_2 = 0,0295\cos(3,50x)\cos(1,57y), \quad F_2 = 0,0019[e^{-31,65(1-x)} - e^{-31,65(1+x)}]\sin(1,57y)$$

$$\Phi_3 = -0,0320\cos(1,53x)\cos(4,71y), \quad F_3 = 0,0014[e^{-31,95(1-x)} - e^{-31,95(1+x)}]\sin(4,71y)$$

$$\Phi_4 = 0,0278\cos(4,15x)\cos(4,71y), \quad F_4 = 0,0045[e^{-31,92(1-x)} - e^{-31,92(1+x)}]\sin(4,71y)$$

$$\Phi_5 = -0,0311\cos(6,34x)\cos(1,57y), \quad F_5 = 0,0017[e^{-31,61(1-x)} - e^{-31,61(1+x)}]\sin(1,57y)$$

Таким образом, получается, что при переходе к теории Кирхгофа отбрасываются члены, содержащие погранслойный потенциал, реальные значения которых в случае условий скользящей заделки и усиленного свободного края не достаточно малы по сравнению с оставшимися слагаемыми. Именно в этом и заключается причина возникновения недопустимо больших погрешностей при использовании теории Кирхгофа.

6. Обсуждение физического смысла полученных результатов. Рассмотрим те типы краевых условий, при которых теория Кирхгофа оказывается не применимой, а именно условия скользящей заделки

$$N_\nu\big|_c = 0, \quad \Psi_\nu\big|_c = 0, \quad \Psi_\tau\big|_c = 0$$

и условия усиленного свободного края

$$N_\nu\big|_c = 0, \quad M_\nu\big|_c = 0, \quad \Psi_\tau\big|_c = 0$$

Как видно из формул (2.3), и в случае условий скользящей заделки, и в случае условий усиленного свободного края, единственным условием, в главном члене зависящим от погранслойного потенциала, является условие равенства нулю перерезывающей силы. Поэтому при переходе к теории Кирхгофа это условие исключается и граничные условия формулируются следующим образом: скользящая заделка $\Psi_\nu|_c = 0$, $\Psi_\tau|_c = 0$; усиленный свободный край $M_\nu|_c = 0$, $\Psi_\tau|_c = 0$.

Обсуждая специфику формулировки условий скользящей заделки и усиленного свободного края в теории Кирхгофа, следует обратить внимание на два обстоятельства.

Угол поворота вокруг нормали к контуру пластины в теории Кирхгофа не является независимой величиной, а выражается через поперечный прогиб по формуле $\Psi_\tau = -\partial w/\partial\tau$. Это означает, что условие $\Psi_\tau|_c = 0$ с физической точки зрения вступает в противоречие с условием $N_\nu|_c = 0$, и если формально условие $N_\nu|_c = 0$ может быть удовлетворено путем учета асимптотически главного члена погранслойного потенциала, то фактически получается так, что на контуре одновременно задается и поперечный прогиб и перерезывающая сила, что с физической точки зрения, вообще говоря, бессмысленно.

Поскольку в теории Кирхгофа условие $\Psi_\tau|_c = 0$ является следствием условия $w|_c = 0$, получается, что условия скользящей заделки эквивалентны условиям жесткой заделки, а условия усиленного свободного края, в свою очередь, эквивалентны условиям шарнирного опирания. С физической точки зрения такая ситуация абсурдна.

Все сказанное выше позволяет сделать следующий вывод. Хотя формально переход к теории Кирхгофа в случае задания на контуре условий скользящей заделки и усиленного свободного края возможен, получающиеся при этом формулировки совершенно не отражают физического смысла задач. Поэтому нет ничего удивительного в том, что теория Кирхгофа при данных типах граничных условий оказывается не применимой.

Автор благодарит П.А. Жилина и Ю.Г. Исполова за обсуждение работы и полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Иванова Е.А.* Приближенные функционалы Гамильтона в задачах о низкочастотных и высокочастотных свободных колебаниях пластины Рейсснера // Изв. АН. МТТ. 1995. № 4. С. 181 – 190.
2. Вибрации в технике. Т. 1. М.: Машиностроение, 1978. 352 с.

С.-Петербург

Поступила в редакцию
25.VII.1995