

УДК 539.3

© 1997 г. Н.Н. ЗУЕВ, Э.Н. КНЯЗЕВ, А.Б. КОСТРИЧЕНКО, В.И. ШАЛАШИЛИН

РЕАЛИЗАЦИЯ ПРОДОЛЖЕНИЯ ПО НАИЛУЧШЕМУ ПАРАМЕТРУ В ГЕОМЕТРИЧЕСКИ И ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ СТАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Процесс построения множества решений однопараметрических нелинейных задач может быть рассмотрен, как процесс продолжения решения по параметру [1–4]. В связи с этим возникает задача о выборе наилучшего параметра продолжения, которая была поставлена и решена в общем случае в [3–6], где показано, что наилучшую обусловленность процесса обеспечивает параметр длины вдоль кривой, образующей множество решений в евклидовом пространстве неизвестных и параметра задачи. Ниже рассмотрена особенность реализаций продолжения решения по наилучшему параметру в геометрически и физически нелинейных статических задачах метода конечных элементов (МКЭ).

1. Основная задача МКЭ при рассмотрении статического деформирования состоит в определении зависимости вектора обобщенных узловых перемещений \mathbf{q} от вектора соответствующих \mathbf{q} узловых нагрузок \mathbf{R} (см. напр., [7]). По принципу возможных перемещений условия равновесия тела, как совокупности составляющих его элементов, сводятся к требованию равенства работ внешних и внутренних сил на возможных перемещениях

$$\int_V \delta \epsilon \sigma dV = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{R} \quad (1.1)$$

здесь ϵ и σ -вектора, составленные из соответствующих друг другу компонент тензоров деформаций и напряжений; $\delta \mathbf{q}$ – вектор возможных обобщенных узловых перемещений; $\delta \epsilon$ – вектор возможных деформаций определенный заданием $\delta \mathbf{q}$; интегрирование производится по всему объему тела V ; знак (T) обозначает транспонирование.

Условия равновесия (1.1) необходимо дополнить геометрическими и физическими соотношениями. Геометрические соотношения должны позволить вычислить вектор деформаций ϵ в любой точке тела по заданному \mathbf{q} . В общем случае они имеют вид

$$\epsilon(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{q}) \quad (1.2)$$

где \mathbf{r} – радиус вектор точки тела. Нелинейная вектор-функция $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{q})$, размерность которой совпадает с размерностью вектора ϵ , определяется геометрическими соотношениями типа Коши и функцией формы, которая определена разбивкой типа на конечные элементы и аппроксимацией перемещений внутри элементов [7]. При использовании для соотношений Коши их квадратичных приближений, максимальная нелинейность по компонентам вектора \mathbf{q} в соотношениях (1.2) – квадратичная. Геометрические соотношения (1.2) могут быть также записаны в дифференциальной форме, которая связывает векторы дифференциалов деформаций $d\epsilon$ и перемещений $d\mathbf{q}$:

$$d\epsilon = \mathbf{B}(\mathbf{r}, \mathbf{q}) d\mathbf{q} \quad (1.3)$$

где $\mathbf{B}(\mathbf{r}, \mathbf{q}) = \partial \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{q}) / \partial \mathbf{q}$ – матрица Якоби вектор функции $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{q})$ по компонентам

вектора \mathbf{q} . В стационарной задаче по определению виртуальных перемещений $\delta\epsilon = d\epsilon$ и $\delta\mathbf{q} = d\mathbf{q}$. Поэтому

$$\delta\epsilon = \mathbf{B}(\mathbf{r}, \mathbf{q})\delta\mathbf{q} \quad \text{или} \quad \delta\epsilon^T = \delta\mathbf{q}^T \mathbf{B}^T(\mathbf{r}, \mathbf{q}) \quad (1.4)$$

Это соотношение позволяет перейти от вариационной формулировки уравнений равновесия (1.1) к их записи в проекциях на направления обобщенных перемещений. После подстановки (1.4) в (1.1) получаем, в силу произвольности $\delta\mathbf{q}$, условия равновесия в виде

$$\int_V \mathbf{B}^T(\mathbf{r}, \mathbf{q})\boldsymbol{\sigma} dV - \mathbf{R} = 0 \quad (1.5)$$

Физические соотношения, определяющие свойства материала, в самом общем виде могут быть заданы в форме соотношений, связывающих компоненты векторов напряжений и деформаций

$$\Phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\sigma}, \epsilon) = 0 \quad (1.6)$$

где Φ – вектор функция (или функционал).

Не останавливаясь на всех требованиях, которые должны быть наложены на функцию Φ , заметим только, что она должна быть такой, чтобы в любой момент деформирования малые изменения вектора напряжений $d\boldsymbol{\sigma}$ были бы однозначно определены малыми изменениями вектора деформаций $d\epsilon$. А это означает, что в следующем из уравнения (1.6) соотношении

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{\sigma}} d\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial\Phi}{\partial\epsilon} d\epsilon = 0 \quad (1.7)$$

матрица Якоби $\partial\Phi/\partial\boldsymbol{\sigma}$ вектор-функция Φ по компонентам вектора $\boldsymbol{\sigma}$ должна иметь обратную матрицу, чтобы соотношение (1.7) можно было однозначно разрешить относительно $d\boldsymbol{\sigma}$ и представить его в форме

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_1 d\epsilon, \quad \mathbf{D}_1 = -(\partial\Phi/\partial\boldsymbol{\sigma})^{-1} \partial\Phi/\partial\epsilon \quad (1.8)$$

Дальнейшее рассмотрение ограничим важным для практики случаем, когда вектор обобщенных нагрузок зависит только от одного параметра p :

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(p) \quad (1.9)$$

В этом случае полная система уравнений МКЭ представляется в форме

$$\int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV - \mathbf{R} = 0, \quad \epsilon - \mathbf{F}(\mathbf{q}) = 0, \quad \Phi(\boldsymbol{\sigma}, \epsilon) = 0 \quad (1.10)$$

2. Одним из наиболее общих и эффективных методов решения нелинейных задач вида (1.10) является метод продолжения решения по параметру (МПРП) с использованием наилучшего параметра продолжения [3, 4]. В этой форме он позволяет избежать трудностей, связанных с появлением предельных точек на кривой деформирования и избавляет от необходимости выбирать параметр продолжения. Более того, наилучший параметр обеспечивает наилучшую обусловленность линеаризованных систем, которые решаются на каждом шаге продолжения решения.

Для введения наилучшего параметра продолжения будем считать, что вектор обобщенных перемещений \mathbf{q} , и, следовательно, вектора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ и деформаций ϵ , а также параметр нагрузки p являются функциями параметра продолжения λ , т.е.

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(\lambda), \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\lambda), \quad \epsilon = \epsilon(\lambda), \quad p = p(\lambda) \quad (2.1)$$

Чтобы реализовать МПРП, необходимо от конечных соотношений (1.10) перейти к задаче Коши по параметру λ . Для этого продифференцируем соотношения (1.10) по λ , в результате чего получим следующие уравнения:

$$\int_V \frac{d}{d\lambda} (\mathbf{B}^T) \boldsymbol{\sigma} dV + \int_V \mathbf{B}^T \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\lambda} dV - \frac{d\mathbf{R}}{d\lambda} \frac{dp}{d\lambda} = 0, \quad \frac{d\boldsymbol{\epsilon}}{d\lambda} - \mathbf{B} \frac{d\mathbf{q}}{d\lambda} = 0$$

$$\mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{q}}, \quad \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\lambda} = \mathbf{D}_t \frac{d\boldsymbol{\epsilon}}{d\lambda}, \quad \mathbf{D}_t = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \quad (2.2)$$

При рассмотрении первого слагаемого в первом уравнении (2.2) учтем, что в условиях квадратичной нелинейности вектор-функции $\mathbf{F}(\mathbf{q})$ ее матрица Якоби $\mathbf{B} = \partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{q}$ зависит от \mathbf{q} линейно и может быть представлена в виде

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}) = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1(\mathbf{q}) \quad (2.3)$$

Здесь матрица \mathbf{B}_0 определяет геометрические соотношения при бесконечно малых деформациях, а матрица $\mathbf{B}_1(\mathbf{q})$ нелинейно зависит от компонент вектора обобщенных узловых перемещений \mathbf{q} . Поэтому \mathbf{B}_1 представляет собой линейную однородную форму компонент вектора \mathbf{q} , т.е.

$$\mathbf{B}_{1ij} = \sum_{k=1}^n b_{ij}^k q_k \quad (2.4)$$

Тогда

$$\frac{d}{d\lambda} (\mathbf{B}^T) = \frac{d}{d\lambda} (\mathbf{B}_1^T) = \sum_{k=1}^n b_{ij}^k \frac{dq_k}{d\lambda} \quad (i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}) \quad (2.5)$$

Поэтому, будем иметь

$$\frac{d}{d\lambda} (\mathbf{B}^T) \boldsymbol{\sigma} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m b_{ij}^k \frac{dq_k}{d\lambda} \sigma_i \quad (2.6)$$

Сгруппировав слагаемые в этой сумме и проинтегрировав по объему тела, видим, что

$$\int_V \frac{d}{d\lambda} (\mathbf{B}^T) \boldsymbol{\sigma} dV = \mathbf{K}_\sigma \frac{d\mathbf{q}}{d\lambda}$$

$$\mathbf{K}_\sigma = [K_{ik}^\sigma] = \int_V \left(\sum_{i=1}^m b_{ij}^k \sigma_i \right) dV \quad (i, k = \overline{1, n}) \quad (2.7)$$

Матрица \mathbf{K}_σ называется матрицей геометрической жесткости или матрицей начальных напряжений.

Второе слагаемое в первом уравнении (2.2) с учетом остальных уравнений (2.2) преобразуем следующим образом:

$$\int_V \mathbf{B}^T \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\lambda} dV = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D}_t \frac{d\boldsymbol{\epsilon}}{d\lambda} dV = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D}_t \mathbf{B} \frac{d\mathbf{q}}{d\lambda} dV = \mathbf{K} \frac{d\mathbf{q}}{d\lambda}$$

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D}_t \mathbf{B} dV \quad (2.8)$$

где \mathbf{K} – матрица больших перемещений. При линейно-упругих деформациях, т.е. когда матрица \mathbf{D}_t не зависит от деформаций и равна матрице \mathbf{D} упругих коэффициентов закона Гука ($\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}$), матрица \mathbf{K} , с учетом выражения (2.3), может быть представлена в форме

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1(\mathbf{q}), \quad \mathbf{K}_0 = \int_V \mathbf{B}_0^T \mathbf{D} \mathbf{B}_0 dV \quad (2.9)$$

$$\mathbf{K}_1 = \int_V (\mathbf{B}_0^T \mathbf{D} \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_1^T \mathbf{D} \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1^T \mathbf{D} \mathbf{B}_1) dV \quad (2.10)$$

где \mathbf{K}_0 – обычная матрица жесткости линейной задачи; первые два слагаемых в \mathbf{K}_1 зависят от компонент вектора \mathbf{q} линейно, а последнее – квадратично.

В условиях физической нелинейности, когда матрица \mathbf{D}_i в каждой точке зависит от текущего напряженного состояния, т.е. когда $\mathbf{D}_i = \mathbf{D}_i(\boldsymbol{\sigma})$, вычисление матрицы жесткости линейной задачи в виде (2.9) приводит к громоздким выражениям, которые уже не дают преимуществ в расчетах.

С учетом выражений (2.7), (2.8) первое уравнение в (2.2) сводится к виду (\mathbf{K}_t – касательная матрица жесткости):

$$\mathbf{K}_t \frac{d\mathbf{q}}{d\lambda} - \frac{d\mathbf{R}}{dp} \frac{dp}{d\lambda} = 0 \quad (2.11)$$

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{K} + \mathbf{K}_\sigma \quad (2.12)$$

Дифференциальное уравнение (2.11) должно быть дополнено условием, определяющим начальную (при $\lambda = 0$) конфигурацию системы. Обычно это условие отсутствия нагрузки и деформаций

$$\mathbf{q}(0) = 0, \quad p(0) = 0 \quad (2.13)$$

Уравнения (2.11) вместе с условиями (2.13) составляют неявную форму задачи Коши по параметру λ . Для ее интегрирования необходимо перейти к нормальной форме, т.е. разрешить ее относительно $d\mathbf{q}/d\lambda$ и $dp/d\lambda$. Обусловленность этого перехода зависит от конкретного выбора параметра λ , который пока не был определен. Как показано в [3–6], наилучшую обусловленность перехода к нормальной форме Коши обеспечивает параметр длины интегральной кривой задачи (2.11), (2.13) в пространстве \mathbf{R}^{n+1} : $\{\mathbf{q}, p\}$. Если в \mathbf{R}^{n+1} ввести вектор $\mathbf{q}^* = [\mathbf{q}, p]^T$, то такой параметр обеспечивается соотношением

$$(d\mathbf{q}^* / d\lambda)^T d\mathbf{q}^* / d\lambda = 1 \quad (2.14)$$

Это условие фактически является условием нормировки вектора $d\mathbf{q}^*/d\lambda$, который из уравнения (2.11) определяется только с точностью до постоянного множителя.

В матричной форме задача Коши (2.11), (2.13) с условием (2.14) может быть записана в форме

$$\left\| \begin{array}{c} \mathbf{K}_t \frac{d\mathbf{R}}{dp} \\ \dots \dots \dots \\ \left(\frac{d\mathbf{q}^*}{d\lambda} \right)^T \end{array} \right\| \frac{d\mathbf{q}^*}{d\lambda} = \left\| \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \dots \\ 1 \end{array} \right\|, \quad \mathbf{q}^*(0) = 0 \quad (2.15)$$

Последнее уравнение в этой системе соответствует условию (2.14) и делает эту систему нелинейной. Пути выхода из этой ситуации подробно обсуждены в [3–6]. Наиболее простой из них учитывает, что построение кривой множества решений нелинейной системы (1.10) в \mathbf{R}^{n+1} : $\{\mathbf{q}, p\}$ путем интегрирования задачи Коши (2.15) является процессом движения шаг за шагом вдоль этой кривой. В [3–6] показано также, что ось отсчета параметра λ определяется единичным вектором, задающим последнюю строку матрицы системы (2.15). Задание его в виде единичного вектора $d\mathbf{q}^*/d\lambda$, являющегося касательным к кривой множества решений обеспечивает наилучшую обусловленность матрицы системы (2.15). Очевидно, что при достаточно малом шаге вдоль кривой, вектор $d\mathbf{q}^{*(k-1)}/d\lambda$, касательный к кривой на предыдущем

шаге, будет достаточно близок к наилучшему вектору $d\mathbf{q}^{*(k)}/d\lambda$ текущего k -го шага. Используя его в матрице системы (2.15) обеспечиваем обусловленность, близкую к наилучшей. Тогда задачу Коши (2.15) на k -м шаге можно записать в форме

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_i^{(k)} & \frac{d\mathbf{R}^{(k)}}{dp} \\ \dots & \dots \\ \left(\frac{d\mathbf{q}^{*(k-1)}}{d\lambda}\right)^T & \dots \end{pmatrix} \frac{d\mathbf{q}^{*(k)}}{d\lambda} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

$$\mathbf{q}^*(\lambda_{k-1}) = \mathbf{q}^{*(k-1)}; \quad \lambda_{k-1} \leq \lambda \leq \lambda_k$$

Переход по λ от λ_{k-1} к $\lambda_k = \lambda_{k-1} + \Delta\lambda_k$ может быть осуществлен с помощью той или иной явной или неявной схемы интегрирования задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. В начальный момент времени при $\lambda = 0$ вектор $d\mathbf{q}^{*(0)}/d\lambda$ неопределен. Его можно задать в виде $[0, \dots, 0, 1]^T$. Это означает, что на начальном шаге в качестве параметра λ выбран параметр нагрузки p , т.е. параметр, который фактически используется при решении линейной задачи.

3. Матрицу линейной алгебраической системы (2.16) обозначим через $\mathbf{K}_i^{*(k)}$. Она квадратичная и представляет собой обычную касательную матрицу жесткости МКЭ $\mathbf{K}_i^{(k)}$, окаймленную снизу $(n+1)$ -мерной строкой $(d\mathbf{q}^{*(k-1)}/d\lambda)^T$ и справа n -мерным столбцом $d\mathbf{R}^{(k)}/dp$. Обусловленность $\mathbf{K}_i^{*(k)}$ тем ближе к наилучшей, чем меньше шаг по λ , так как с уменьшением шага сближаются вектора $d\mathbf{q}^{*(k-1)}/d\lambda$ и $d\mathbf{q}^{*(k)}/d\lambda$. Матрица \mathbf{K}_i^* вырождается только в точках ветвления, в отличие от матрицы \mathbf{K}_i , которая вырождается также и в предельных точках. Эта особенность матрицы \mathbf{K}_i^* позволяет разрешить систему (2.16), т.е., перейти от неявной формы задачи Коши к явной с помощью традиционных методов решения линейных систем, среди которых наибольшей экономичностью и устойчивостью отличаются метод исключения Гаусса и метод квадратного корня. В использованной нами системе ДАСАП [8] реализован метод Холецкого, который является частным случаем метода квадратичного корня [9]. Алгоритм этого метода для решения системы уравнений

$$\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{C} \quad (3.1)$$

с симметричной матрицей \mathbf{B} основан на представлении \mathbf{B} в виде произведения трех матриц

$$\mathbf{B} = \mathbf{L}^T \mathbf{D} \mathbf{L} \quad (3.2)$$

Здесь \mathbf{L} – верхняя треугольная матрица, а \mathbf{D} – диагональная матрица, состоящая из +1 и -1. Коэффициенты этих матриц определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} l_{11} &= \sqrt{|b_{11}|}, \quad d_{11} = \text{sign}(b_{11}), \quad l_{1j} = b_{1j} / l_{11} \quad (j = \overline{1, n}) \\ l_{ii} &= \left(\left| b_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ki}^2 \right| \right)^{1/2}, \quad d_{ii} = \text{sign} \left(b_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ki}^2 \right) \\ l_{ij} &= b_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ki} l_{kj} \quad (j = \overline{1, n}; j = \overline{i+1, n}) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Затем на прямом ходе решается система

$$\mathbf{L}^T \mathbf{D} \mathbf{y} = \mathbf{C} \quad (3.4)$$

а на обратном ходе – система

$$Lx = y \quad (3.5)$$

Для обобщения этого алгоритма на решение системы уравнений (2.16) запишем ее в виде

$$\begin{bmatrix} B & r \\ a & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Здесь $B = K_i^{(k)}$, а смысл остальных обозначений ясен из сравнений систем (2.16) и (3.6). Матрица B симметрична и с помощью алгоритма (3.3)–(3.4) она может быть представлена в форме

$$\begin{bmatrix} L^T D & 0 \\ y_1^T & \psi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L & y_2 \\ 0 & \psi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Рассматривая матрицу системы (3.6), как произведение матриц системы (3.7), получаем для определения векторов y_2 и y_1 и произведения $\psi_1 \psi_2$ следующие системы уравнений:

$$L^T D y_2 = r, \quad y_1^T L = L^T y_1 = a, \quad y_1^T y_2 + \psi_1 \psi_2 = \beta \quad (3.8)$$

Ввиду того, что матрицы $L^T D$ и L^T треугольные, эти уравнения легко решаются. Завершает прямой ход решение системы

$$\begin{bmatrix} L^T D & 0 \\ y_1^T & \psi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

При невырожденной матрице эта система имеет решение $w = 0, \zeta = 1/\psi_1$. С учетом этого на обратном ходе решается система

$$\begin{bmatrix} L & y_2 \\ 0 & \psi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \zeta \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Эта система сводится к двум уравнениям

$$\psi_2 \xi = \zeta, \quad Lx + \xi y_2 = 0 \quad (3.11)$$

Из первого уравнения, с учетом того, что $\zeta = 1/\psi_1$ и уравнения (3.8), следует равенство $\xi = 1/(\psi_1 \psi_2) = 1/(\beta - y_1^T y_2)$.

Таким образом, обратный ход сводится к решению системы с треугольной матрицей

$$Lx = \xi y_2, \quad \xi = 1/(\beta - y_1^T y_2) \quad (3.12)$$

Так как матрица $K_i^{(k)}$ не является знакоопределенной, то при реализации этого алгоритма могут встретиться случаи обращения в нуль одного из ее диагональных элементов. В этом случае реализуется прием коррекции главного элемента, подробно описанный в [10, 11].

4. Для описания упругопластического деформирования материала используем теорию течения, в которой постулируется, что текучесть начинается тогда и только тогда, когда напряжения удовлетворяют некоторому критерию текучести

$$F(\sigma, \chi) = 0 \quad (4.1)$$

где χ параметр упрочнения. Изменение деформации $d\epsilon$ представим в виде суммы упругой $d\epsilon_e$ и пластической $d\epsilon_p$ частей

$$d\epsilon = d\epsilon_e + d\epsilon_p \quad (4.2)$$

Применим ассоциированный закон текучести, т.е. будем считать приращение пластических деформаций нормальными к поверхности текучести, определяемой уравнением (4.1). Т.е. положим

$$d\epsilon_p = \mu \partial F / \partial \sigma \quad (4.3)$$

где μ – неопределенная пока бесконечно малая величина. Упругую часть приращения деформаций определим соотношением

$$d\epsilon_e = (D_t^e)^{-1} d\sigma \quad (4.4)$$

Тогда будем иметь

$$d\epsilon = (D_t^e)^{-1} d\sigma + \mu \partial F / \partial \sigma \quad (4.5)$$

При пластическом течении напряжения находятся на поверхности текучести (4.1). Дифференцируя уравнение (4.1), получим

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_1} d\sigma_1 + \frac{\partial F}{\partial \sigma_2} d\sigma_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial \chi} d\chi = 0 \quad (4.6)$$

Запишем это соотношение в матричной форме

$$\left[\frac{\partial F}{\partial \sigma} \right]^T d\sigma - \alpha \mu = 0, \quad \alpha = - \frac{\partial F}{\partial \chi} d\chi \frac{1}{\mu} \quad (4.7)$$

Исключая из соотношений (4.5), (4.6) неопределенную величину μ , приходим к выражению

$$d\sigma = D_t^p d\epsilon \quad (4.8)$$

$$D_t^p = D_t^e - D_t^e \left[\frac{\partial F}{\partial \sigma} \right] \left[\frac{\partial F}{\partial \sigma} \right]^T D_t^e \left\{ \alpha + \left[\frac{\partial F}{\partial \sigma} \right]^T D_t^e \left[\frac{\partial F}{\partial \sigma} \right] \right\}^{-1} \quad (4.9)$$

В упрочняющемся материале параметр χ , определяющий смещение поверхности текучести, является пластической частью работы пластического деформирования, т.е.

$$d\chi = \sigma_x d\epsilon_x^p + \sigma_y d\epsilon_y^p + \dots = \sigma^T d\epsilon_p \quad (4.10)$$

В случае ассоциированного закона течения (4.3) получаем

$$d\chi = \mu \sigma^T \partial F / \partial \sigma \quad (4.11)$$

Если отсюда выразить μ и подставить в (4.7), то приходим к выражению для α

$$\alpha = - \frac{\partial F}{\partial \chi} \sigma^T \frac{\partial F}{\partial \sigma} \quad (4.12)$$

В дальнейшем будем использовать поверхность текучести, определяемую условием Мизеса

$$F = \left\{ \frac{1}{2} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)] \right\}^{1/2} - \sigma_* = 0 \quad (4.13)$$

Использование этого условия для одноосного состояния показывает, что α равняется тангенсу угла наклона диаграммы $\sigma(\epsilon)$ при напряжениях, равных интенсивности напряжений σ_* . В этом случае уравнение (4.8) сводится к соотношениям Прандтля –

Рейсса, которое для девиаторов приращений деформаций $d\varepsilon'$ и напряжений $d\sigma'$ имеет вид (G – модуль сдвига):

$$d\varepsilon'_{ij} = \sigma'_{ij}\mu + \frac{d\sigma_{ij}}{2G}, \quad \mu = \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_*^p}{\sigma_*} = \frac{3}{2} \frac{d\sigma_*}{\sigma_*\alpha}, \quad \alpha = \frac{d\sigma_*}{d\varepsilon_*^p} \quad (4.14)$$

где α – тангенс угла наклона диаграммы интенсивности напряжений $\sigma_*(\varepsilon_*)$ для одноосного растяжения–сжатия; интенсивность напряжений σ_* и приращения пластических деформаций $d\varepsilon_*^p$ определяются выражениями

$$\sigma_* = (\frac{3}{2}\sigma'_{ij}\sigma'_{ij})^{1/2}, \quad d\varepsilon_*^p = (\frac{2}{3}d\varepsilon'_{ij}d\varepsilon'_{ij})^{1/2} \quad (4.15)$$

Здесь и ниже предполагается суммирование по повторяющимся индексам.

Чтобы конкретизировать матрицу D_i^p для случая критерия Мизеса (4.13) и его дифференциальной формы (4.6), запишем их в виде

$$\sigma'_{ij}\sigma'_{ij} = 2/3\sigma_*^2. \quad (4.16)$$

$$\sigma'_{ij}d\sigma'_{ij} = 2/3\sigma_*d\sigma_* = 4/9\sigma^2\alpha d\mu \quad (4.17)$$

Отсюда, с учетом (4.16), получаем

$$\mu = \sigma'_{ij}d\varepsilon'_{ij} / S = \sigma'_{ij}d\varepsilon_{ij} / S \quad (4.18)$$

$$S = \frac{2}{3}\sigma_*^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{3G}\right) \quad (4.19)$$

Здесь было использовано равенство $\sigma'_{ij}d\varepsilon'_{ij} = \sigma'_{ij}d\varepsilon_{ij}$, которое следует из условия равенства нулю среднего напряжения девиатора $\sigma'_{ii} = \sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z = 0$. После подстановки μ из уравнения (4.18) в уравнение (4.14) и учитывая выражение для девиатора приращения деформаций $d\varepsilon'_{ij} = d\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}d\varepsilon_{kk}$, $d\varepsilon_{ii} = d\varepsilon_x + d\varepsilon_y + d\varepsilon_z$, получаем выражение для приращения напряжений в виде

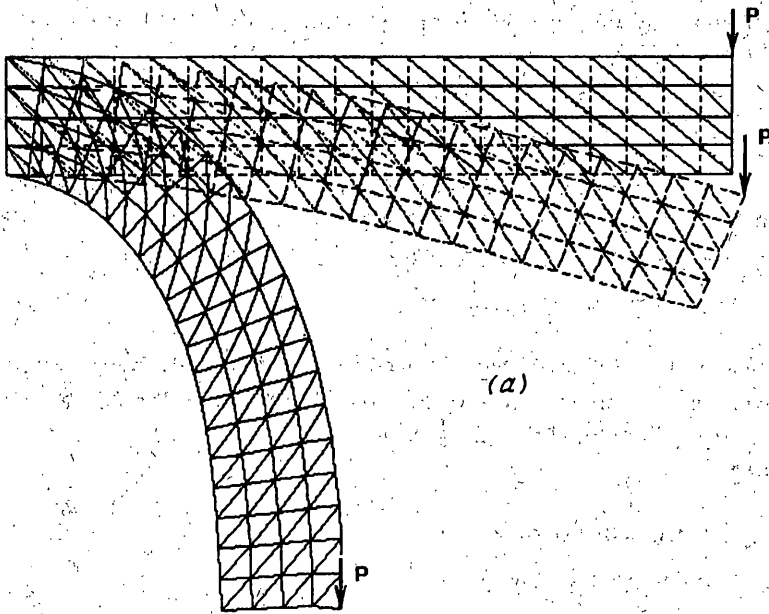
$$d\sigma_{ij} = 2G \left(d\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij}d\varepsilon_{kk} - \sigma'_{ij} \frac{1}{S} \sigma'_{kl}d\varepsilon_{kl} \right) \quad (4.20)$$

Матричная форма этих уравнений имеет вид

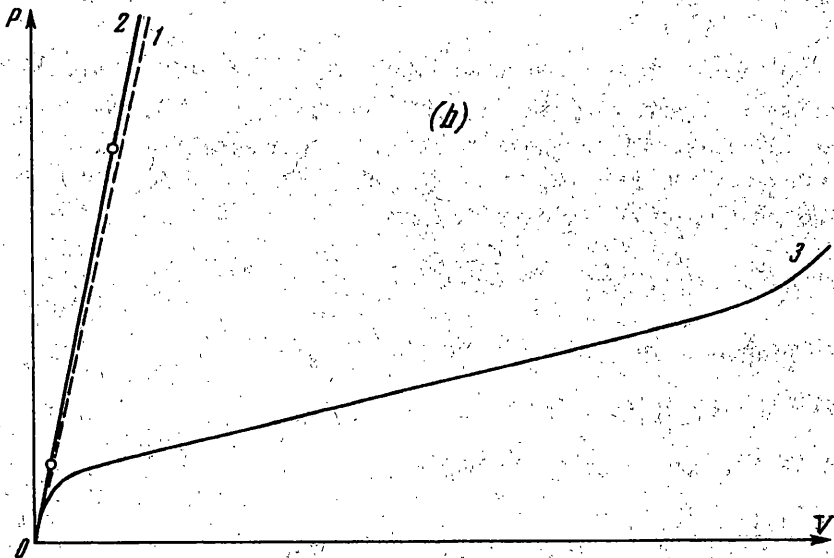
$$d\sigma = ED_i^p d\varepsilon, \quad E = 2(1+\nu)G \quad (4.21)$$

Матрица D_i^p выглядит следующим образом:

$$D_i^p = \frac{1}{1+\nu} \left\| \begin{array}{cccccc} \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\sigma_x'^2}{S} & & & & & \\ \nu \frac{\sigma'_x\sigma'_y}{S} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\sigma_y'^2}{S} & & & & \\ \nu \frac{\sigma'_x\sigma'_z}{S} & \nu \frac{\sigma'_y\sigma'_z}{S} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\sigma_z'^2}{S} & & & \\ \frac{\sigma'_x\tau_{xy}}{S} & \frac{\sigma'_y\tau_{xy}}{S} & \frac{\sigma'_z\tau_{xy}}{S} & \frac{1}{2} \frac{\tau_{xy}^2}{S} & & \\ \frac{\sigma'_x\tau_{yz}}{S} & \frac{\sigma'_y\tau_{yz}}{S} & \frac{\sigma'_z\tau_{yz}}{S} & \frac{\tau_{xy}\tau_{yz}}{S} & \frac{1}{2} \frac{\tau_{yz}^2}{S} & \\ \frac{\sigma'_x\tau_{zx}}{S} & \frac{\sigma'_y\tau_{zx}}{S} & \frac{\sigma'_z\tau_{zx}}{S} & \frac{\tau_{xy}\tau_{zx}}{S} & \frac{\tau_{yz}\tau_{zx}}{S} & \frac{1}{2} \frac{\tau_{zx}^2}{S} \end{array} \right\} \begin{array}{l} SYM. \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \quad (4.22)$$



(a)

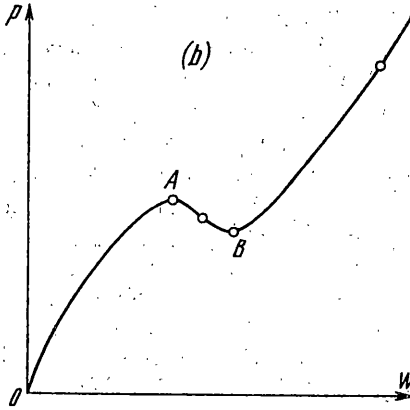
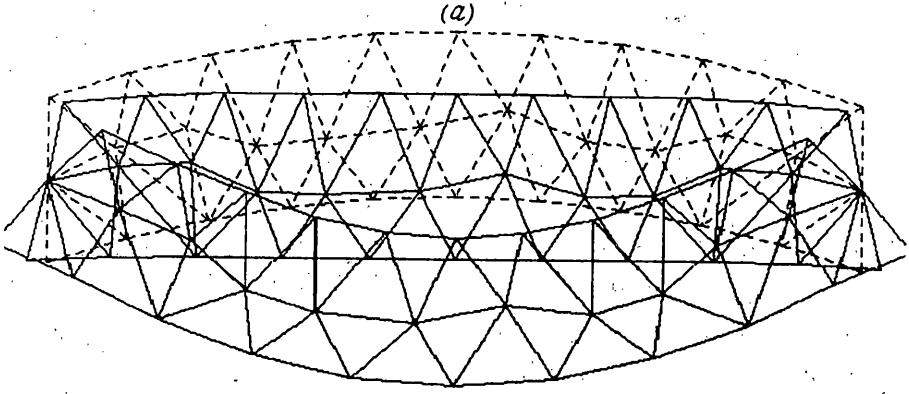


(b)

Фиг. 1

Для плоского напряженного состояния соотношения (4.21) удобно представить в форме

$$\begin{bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \end{bmatrix} = ED_{\sigma}^p \begin{bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\gamma_{xy} \end{bmatrix}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}$$



Фиг. 2

$$D_{\sigma}^p = \frac{1}{Q} \left\| \begin{array}{cc} \sigma'_y + 2p & \text{SYM} \\ -\sigma'_x \sigma'_y + 2vp & \sigma_x'^2 + 2p \\ \sigma'_x + v\sigma'_y & -\frac{\sigma'_y + v\sigma'_x}{1+v} \frac{R}{2(1+v)} + \frac{2\alpha}{9E} (1-v)\sigma_*^2 \\ -\frac{1}{1+v} \tau_{xy} & \end{array} \right\| \quad (4.23)$$

$$p = \frac{2}{9} \frac{\alpha}{E} \sigma_*^2 + \frac{\tau_{xy}^2}{1+v}, \quad Q = R + 2(1-v^2)p$$

$$R = \sigma_x'^2 + 2v\sigma'_x \sigma'_y + \sigma_y'^2 + 2(1-v)\tau_{xy}^2$$

Для случая плоской деформации соотношения упругопластического деформирования легко получить из соотношений (4.21), учитывая, что $d\epsilon_x = d\gamma_{yz} = d\gamma_{zx} = 0$. Они принимают вид

$$\begin{bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \end{bmatrix} = ED_{\epsilon}^p \begin{bmatrix} d\epsilon_x \\ d\epsilon_y \\ d\gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

$$D_{\varepsilon}^p = \frac{1}{1+\nu} \left\| \begin{array}{cc|c} \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\sigma_x^2}{S} & & \\ \nu & \frac{\sigma'_x \sigma'_y}{S} & \\ \hline \frac{\sigma'_x \tau_{xy}}{S} & \frac{\sigma'_y \tau_{xy}}{S} & \frac{1}{2} \frac{\tau_{xy}^2}{S} \end{array} \right\| \begin{array}{l} SYM \\ \\ \end{array}$$

Данные выражения для матриц, описывающих упругопластическое поведение материала в рамках теории пластического течения и ассоциированного закона текучести получены также в [12, 13].

5. В порядке иллюстрации возможностей аппаратно-программного комплекса приведем результаты расчета двух примеров.

1. На фиг. 1, *a* показаны исходное и два деформированных положения для консольной балки, нагруженной вертикальной сосредоточенной силой. Использовался треугольный элемент плоского напряженного состояния. Одна из схем разбивки видна на фиг. 1, *a*. Показанные деформированные состояния соответствуют использованию закона Гука для соотношений (1.8). На фиг. 1, *b* показаны зависимости вертикального смещения V точки приложения силы P . Прямая 1 соответствует линейному решению задачи, кривая 2 соответствует линейноупругому геометрически нелинейному деформированию. Светлыми точками отмечены показанные на фиг. 1, *a* деформированные состояния. Кривая 3 соответствует упругопластическому геометрически нелинейному деформированию балки. Принималась модель идеального упругопластического материала без упрочнения. Пластические деформации описывались соотношениями (4.23).

2. На фиг. 2, *a* показаны начальное и два деформированных состояния пологой арки под равномерным вертикальным давлением. Материал балки считался линейноупругим. Использован треугольный элемент плоского напряженного состояния. На фиг. 2, *b* показана зависимость вертикального прогиба W средней точки арки от давления p . Светлыми точками отмечены точки, соответствующие показанным на фиг. 2, *a* деформированным состояниям. Ветвь АВ на этой кривой соответствует неустойчивым равновесным состояниям арки, а точки А и В – предельные, если использовать параметр нагрузки в качестве параметра продолжения. Использование наилучшего параметра продолжения устранило трудности, связанные с этими особенностями деформирования арки.

Статья подготовлена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 97-01-00091).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lahaye M.E.* Une metode de resolution categorie d'equation transcendantes // *C.r. Sci.* 1934. V. 198. № 21. P. 1840–1842.
2. *Давиденко Д.Ф.* Об одном новом методе численного решения систем нелинейных уравнений // *Докл. АН СССР.* 1953. Т. 88. № 4. С. 601–602.
3. *Григолюк Э.И., Шалашилин В.И.* Проблемы нелинейного деформирования. М.: Наука, 1988. 232 с.
4. *Grigoliuk E.I., Shalashilin V.I.* Problems of Nonlinear Deformation: Dordrecht et al.; Kluwer, 1991. 262 p.
5. *Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б.* Наилучший параметр продолжения решения // *Докл. РАН.* 1994. Т. 334. № 5. С. 566–568.
6. *Кузнецов Е.Б., Шалашилин В.И.* Задача Коши для механических систем с конечным числом степеней свободы как задача продолжения по наилучшему параметру // *ПММ.* 1994. Т. 58. Вып. 6. С. 14–21.
7. *Zienkiewicz O.C.* The Finite Element Method in Engineering Science, London: McGraw-Hill, 1971. 521 p.

8. Шатров Б.В., Осипов Д.М., Мартыненко Ю.Р. Основы конечноэлементного анализа узлов ДЛА с применением ЭВМ. М.: Изд. МАИ, 1994. 68 с.
9. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Наука, 1987. 598 с.
10. Steward G.W. Modifying pivot elements in Gaussian elimination // Math. Comput. 1974. V. 28. № 126. P. 537-542.
11. Икрамов Х.Д. Численные методы для симметричных линейных систем. М.: Наука, 1988. 159 с.
12. Ymada Y., Yoshimura N., Sakurai T. Plastic stress-strain matrix and its application for the solution of elastic plastic problems by the finite element method // Intern. J. Mech. Sci. 1968. V. 10. N 5. P. 343-354.
13. Zienkiewicz O.C., Valliappan S., King I.P. Elasto-plastic solutions of engineering problems; initial-stress, finite element approach // Intern. J. Num. Meth. in Eng. 1969. V. 1. N 1. P. 75-100.

Москва

Поступила в редакцию
21.III.1996