МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1997

УДК 539.376

© 1997 г. Я.М. КЛЕБАНОВ, Ю.П. САМАРИН

ВЛОЖЕННЫЕ ПОВЕРХНОСТИ МОЩНОСТИ ДИССИПАЦИИ В ПРОСТРАНСТВАХ СИЛ И СКОРОСТЕЙ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ НЕОДНОРОДНЫХ И АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

Теорема о вложенных поверхностях постоянной нормированной мощности диссипации [1–3] явилась одним из важных результатов в изучении установившейся ползучести, давшем ясное физическое понимание поведения тел при произвольном числе внешних нагрузок. Она сделала возможным построение зависимостей, непосредственно связывающих обобщенные силы и обобщенные перемещения, или обобщенных моделей, которые ассоциированы с поверхностями нормированной мощности [4–6]. Последнее следует из доказательства данной теоремы, полученного в [3].

Вместе с тем, теорема о вложенных поверхностях была доказана лишь для однородных и изотропных тел. При построении приближенных решений задач установившейся ползучести поверхности рассматривались только в пространстве обобщенных сил, поведение поверхностей нормированной мощности в пространстве скоростей обобщенных перемещений при этом не анализировалось.

Рассмотрению поверхностей равной нормированной мощности диссипации неоднородных и анизотропных тел как в пространстве сил, так и в пространстве скоростей перемещений посвящена данная статья.

1. Вложенные поверхности в пространстве сил. Рассмотрим определяющее уравнение установившейся ползучести неоднородной и анизотропной среды в виде

$$\xi_{ij}(x_k)=\frac{\partial\Phi(x_k,\sigma_{lm}(x_k))}{\partial\sigma_{ij}(x_k)}\quad (i,j,k,l,m=1,2,3) \tag{1}$$

где ξ_{ij} – тензор скоростей деформаций, Φ – выпуклая однородная функция напряжений σ_{ij}, зависящая от пространственных координат x_i:

$$\Phi(x_k,\sigma_{ij})=B(x_k)\frac{\sigma_{eq}^{n+1}}{n+1},\quad \sigma_{eq}^2=\Phi_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} \tag{2}$$

где σ_{eq} – эквивалентное напряжение, n – константа, B – функция пространственных координат, Φ_{ijkl} – тензор модулей ползучести, обладающий следующей симметрией

$$\Phi_{ijkl}=\Phi_{jikl}=\Phi_{klij}$$

Функция B описывает неоднородность тела, занимающего пространственную область Ω ($x_i\in\Omega$). Неоднородность может быть вызвана случайным разбросом свойств, воздействием внешних физических полей или другими факторами.

В дальнейшем полагаем, что

$$B(x_i)=B_0B_1(x_i) \tag{3}$$

где B_0 – константа, B_1 – безразмерная функция координат, которая удовлетворяет условию нормирования в виде

$$\frac{1}{\Omega}\int_{\Omega} B_1(x_i)\,d\Omega = 1 \tag{4}$$

Из (1) и (2) следует, что существует эквивалентная скорость деформаций

$$\xi_{eq} = B\sigma_{eq}^{n} \tag{5}$$

такая, что

$$\xi_{eq}^2 = \Psi_{ijkl}\xi_{ij}\xi_{kl} \tag{6}$$

где Ψ_{ijkl} – тензор податливости анизотропного материала,

$$\Psi_{ijkl}\Phi_{ijmo} = \delta_{km}\delta_{lo} \tag{7}$$

Действительно, подставляя (1) и (2) в (6), получаем

$$\xi_{eq}^2 = (B\sigma_{eq}^{n-1})^2\Psi_{ijkl}\Phi_{ijmo}\sigma_{mo}\Phi_{klrs}\sigma_{rs} \quad (i,j,k,l,m,o,r,s = 1,2,3)$$

Отсюда, согласно (7), и следует (5).

Теорема. Рассмотрим два тела A и B, имеющих одинаковую геометрическую форму и размеры и идентично нагруженные, но состоящие из разных материалов. Определяющие зависимости имеют вид

$$\xi_{eq} = B\sigma_{eq}^{n_A}, \quad \xi_{eq} = B\sigma_{eq}^{n_B}$$

$$B(x_i) = B_0 B_1(x_i), \quad \frac{1}{\Omega}\int_{\Omega} B_1(x_i)\,d\Omega = 1$$

Тогда, если $n_A \geqslant n_B$:

$$\left[\frac{1}{\Omega}\int_{\Omega} B_1(\sigma_{eq}^{A})^{n_A+1}d\Omega\right]^{1/(n_A+1)} \geqslant \left[\frac{1}{\Omega}\int_{\Omega} B_1(\sigma_{eq}^{B})^{n_B+1}d\Omega\right]^{1/(n_B+1)}$$

где σ_{eq}^{A}, σ_{eq}^{B} – эквивалентные напряжения, отвечающие действительным полям напряжений.

Доказательство. Введем величины σ_A и σ_B такие, что

$$\frac{1}{\Omega}\int_{\Omega} (\sigma_{eq}^{A})^{n_A+1}d\Omega_1 = \sigma_A^{n_A+1}, \quad \frac{1}{\Omega}\int_{\Omega} (\sigma_{eq}^{B})^{n_B+1}d\Omega_1 = \sigma_B^{n_B+1}$$

$$\beta = \sigma_A / \sigma_B, \quad d\Omega_1 = B_1(x_i)\,d\Omega, \quad \Omega_1 = \Omega$$

Так как на оба тела воздействует одинаковая нагрузка, то согласно теореме о минимуме дополнительной мощности рассеивания для тела B можно записать

$$\int_{\Omega} (\sigma_{eq}^{B})^{n_B+1}d\Omega_1 \leqslant \int_{\Omega} (\sigma_{eq}^{A})^{n_B+1}d\Omega_1$$

Учитывая, что $\sigma_B = \beta\sigma_A$, нетрудно получить

$$\frac{1}{\Omega}\int_{\Omega} (\sigma_{eq}^{B} / \sigma_B)^{n_B+1}d\Omega_1 \leqslant \frac{1}{\beta^{n_B+1}}\frac{1}{\Omega}\int_{\Omega} (\sigma_{eq}^{A} / \sigma_A)^{n_B+1}d\Omega_1$$

Согласно записанному выше определению величины σ_B левая часть последнего неравенства равна единице и, следовательно,

$$\beta^{n_B+1} \leqslant \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} [(\sigma_{eq}^A / \sigma_A)^{n_A+1}]^N d\Omega_1$$

$$N = (n_B + 1) / (n_A + 1), \quad 0 \leqslant N \leqslant 1$$

В соответствии с неравенством Гельдера

$$\frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} [(\sigma_{eq}^A / \sigma_A)^{n_A+1}]^N d\Omega_1 \leqslant \left[\frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} (\sigma_{eq}^A / \sigma_A)^{n_A+1} d\Omega_1 \right]^N$$

получаем

$$\beta^{n_B+1} \leqslant 1, \quad \beta \leqslant 1$$

Итак, показано, что функционал

$$\left(\frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} B_1 \sigma_{eq}^{n+1} d\Omega \right)^{1/(n+1)}$$

монотонно возрастает с увеличением n. В пространстве сил гиперповерхности

$$\left(\frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} B_1 \sigma_{eq}^{n+1} d\Omega \right)^{1/(n+1)} = \text{const} \tag{8}$$

вкладываются друг в друга с увеличением n и ограничены сверху гиперэллипсоидом при $n = 1$ и снизу гиперповерхностью при $n = \infty$.

Легко убедиться, что поверхности постоянной мощности диссипации $\int B \sigma_{eq}^{n+1} d\Omega$ также вкладываются друг в друга. Для этого достаточно положить константу в правой части (8) равной единице. Соответствующее условие нормирования имеет вид

$$\frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} B \sigma_{eq}^{n+1} d\Omega = B_0$$

и является частным случаем условия (8).

2. Вложенные поверхности в пространстве скоростей перемещений. Рассмотрение вложенных поверхностей мощности диссипации в пространстве сил соответствует условию действия заданной системы нагрузок. Аналогичные поверхности могут быть рассмотрены и в пространстве скоростей перемещений в предположении, что внешние скорости перемещений заданы.

Представим определяющее уравнение (1) в виде

$$\sigma_{ij}(x_k) = \frac{\partial \Psi(x_k, \xi_{lm}(x_k))}{\partial \xi_{ij}(x_k)}$$

где, согласно (2), (5)–(7):

$$\Psi(x_k, \xi_{ij}) = \frac{\varepsilon_{eq}^{\nu+1}}{c(x_k)(\nu+1)}, \quad \nu = 1/n, \quad c = B^{1/n} \tag{9}$$

Теорема. Рассмотрим два тела A и B, имеющих одинаковую геометрическую форму и размеры и идентичные заданные скорости перемещений, но состоящие из разных материалов. Определяющие зависимости имеют вид

$$\sigma_{eq} = \xi_{eq}^{\nu_A} / c, \quad \sigma_{eq} = \xi_{eq}^{\nu_B} / c$$

$$c(x_k) = c_0 c_1(x_k), \quad \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \frac{d\Omega}{c_1(x_k)} = 1 \tag{10}$$

Тогда, если $\nu_A \geqslant \nu_B$, объемные силы отсутствуют, а на той части поверхности, где не заданы скорости перемещений, нагрузки равны нулю, то

$$\left[\frac{1}{\Omega}\int_\Omega \frac{1}{c_1}(\xi_{eq}^A)^{\nu_A+1}d\Omega\right]^{1/(\nu_A+1)} \geqslant \left[\frac{1}{\Omega}\int_\Omega \frac{1}{c_1}(\xi_{eq}^B)^{\nu_B+1}d\Omega\right]^{1/(\nu_B+1)}$$

где ξ_{eq}^A, ξ_{eq}^B являются эквивалентными скоростями деформаций, соответствующими действительным полям скоростей.

Доказательство выполняется аналогично приведенному выше. Различие состоит лишь в том, что вместо теоремы о дополнительной мощности рассеивания используется теорема о полной мощности рассеивания.

Таким образом, функционал

$$\left(\frac{1}{\Omega}\int_\Omega \frac{1}{c_1}\xi_{eq}^{\nu+1}d\Omega\right)^{1/(\nu+1)}$$

монотонно возрастающая функция аргумента ν.

В пространстве скоростей перемещений гиперповерхности

$$\left(\frac{1}{\Omega}\int_\Omega \frac{1}{c_1}\xi_{eq}^{\nu+1}d\Omega\right)^{1/(\nu+1)} = \text{const} \tag{11}$$

вкладываются друг в друга с ростом ν, снаружи они ограничены гиперповерхностью при $\nu = 0$, а внутри – гиперэллипсоидом при $\nu = 1$.

Условия нормирования поверхностей полной мощности диссипации $\int_\Omega (\xi_{eq}^{\nu+1}/c)d\Omega$ можно записать в виде

$$\frac{1}{\Omega}\int_\Omega \frac{1}{c}\xi_{eq}^{\nu+1}d\Omega = \frac{1}{c_0}$$

который является частным случаем условия (11). Таким образом, поверхности постоянной нормированной мощности диссипации в пространстве скоростей перемещений также вкладываются друг в друга с ростом ν.

3. Обобщенная модель. Введем функционал

$$\overline{\Phi} = \int_\Omega \Phi d\Omega$$

который представляет собой дополнительную мощность диссипации для всего тела. Согласно (1)–(4):

$$\overline{\Phi} = [B_0/(n+1)]\int_\Omega B_1\sigma_{eq}^{n+1}d\Omega$$

По теореме Кастильяно $u_s = \partial\overline{\Phi}/\partial Q_s$, $\overline{\Phi} = \overline{\Phi}(Q_r)$ $(r, s = 1, 2, \dots)$, где Q_s, u_s – обобщенные силы и скорости обобщенных перемещений.

Эквивалентная обобщенная сила определяется зависимостью $Q = \left(\frac{1}{\Omega}\int_\Omega B_1\sigma_{eq}^{n+1}d\Omega\right)^{1/(n+1)}$. Следовательно

$$\overline{\Phi} = [B_0/(n+1)]\Omega Q^{n+1}, \quad u_s = B_0\Omega Q^n \partial Q/\partial Q_s$$

Таким образом, вектор обобщенных перемещений перпендикулярен поверхности равной диссипации в пространстве сил.

Мощность диссипации всего тела определяется формулой $\overline{\Psi} = \int\limits_{\Omega} \Psi d\Omega$. Согласно (9) и (10)

$$\overline{\Psi} = \frac{1}{c_0(\nu+1)} \int\limits_{\Omega} \frac{1}{c_1} \xi_{eq}^{\nu+1} d\Omega$$

По теореме Лагранжа

$$Q_s = \partial\overline{\Psi} / \partial u_s; \quad \overline{\Psi} = \overline{\Psi}(u_r) \quad (r, s = 1, 2, \ldots)$$

Эквивалентное обобщенное перемещение определяется равенством

$$u = \left(\frac{1}{\Omega} \int\limits_{\Omega} \frac{1}{c_1} \xi_{eq}^{\nu+1} d\Omega \right)^{1/(\nu+1)}$$

Тогда

$$\overline{\Psi} = \frac{1}{c_0(\nu+1)} \Omega u^{\nu+1}, \quad Q_s = \frac{1}{c_0} \Omega u^{\nu} \frac{\partial u}{\partial u_s}$$

Легко убедиться, что

$$u = (B_0 c_0)^{n/(n+1)} Q^{n}$$

Постоянная эквивалентная скорость обобщенных перемещений отвечает поверхности (11).

Данное исследование явилось частью работ, поддержанных грантом Госкомвуза РФ в области авиационной и космической техники.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Calladine C.R., Drucker D.C.* A bound method for creep analysis of structures: direct use of solutions in elasticity and plasticity // J. Mech. Eng. Sci. 1962. V. 4. No. 1. P. 1–11.
2. *Calladine C.R., Drucker D.C.* Nesting surfaces of constant rate energy dissipation in creep // Quart. Appl. Math. 1962. V. 20. No. 1. P. 79–84.
3. *Boyle J.T.* The theorem of nesting surfaces in steady creep and its application to generalised models and limit reference stresses // Res. Mechanica. 1982. V. 4. No. 4. P. 275–294.
4. *Boyle J.T., Spence J.* Stress analysis for creep. London: Butterworth, 1983. 307 p.
5. *Качанов Л.М.* Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960. 455 с.
6. *Малинин Н.Н.* Расчеты на ползучесть машиностроительных конструкций. М.: Машиностроение, 1981. 221 с.

Самара

Поступила в редакцию
8.II.1996