

УДК 539.374

© 1997 г. И.В. СИМОНОВ, М.В. ХАВРОШКИНА

**ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ УДЛИНЕННЫХ ТЕЛ
ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ ВНЕДРЕНИИ
В УПРУГОПЛАСТИЧЕСКУЮ СРЕДУ**

Рассматривается высокоскоростной вход упругого ударника игольчатой формы под малым углом атаки в упругопластическую мишень. Предлагается упрощенная модель взаимодействия ударник – прочная среда при учете срыва потока. Из решения задачи о динамическом изгибе стержня под действием "бегущей" нагрузки получены оценки сверху максимальных напряжений и размаха колебаний в зависимости от безразмерной скорости внедрения. Изучены также формы вынужденных колебаний. Результаты позволяют оценить влияние изгиба удлиненных тел при проникании в прочную среду и пределы допустимых параметров входа.

1. Физическое описание. В экспериментах по высокоскоростному внедрению стальных игл в упругопластическую среду невысокой прочности иногда визуально наблюдалось разрушение проникателя на две–три части или его значительная пластическая деформация [1]. Это свидетельствовало о динамическом изгибе стержня при взаимодействии со средой. Боковая нагрузка на фигуру появляется из-за возмущения параметров входа. А именно, технически трудно было обеспечить вход по нормали к поверхности мишени – всегда имелись малые углы атаки, оцениваемые сверху величиной $\eta < 3^\circ$. По-видимому, когда этот угол был близок к максимальному, при высоких скоростях входа (до 300 м/с) упругий изгиб переходил в пластический и стержень разрушался.

В научном аспекте проникание иглы интересно как пример движения фигуры предельно допустимого с точки зрения статической устойчивости удлинения. Этот асимптотический случай сравнительно просто интерпретировать теоретически. Кроме того, из физических соображений ясно и это подтверждается анализом [2], что удлиненные формы наиболее перспективны для целей глубинного проникания в природную среду: минимизируется площадь миделева сечения, трение также можно свести к минимуму (например, предварительным разогревом ударника перед внедрением в лед). С другой стороны террадинамические технологии в настоящее время находят все больше мирных приложений: динамическая забивка свай, исследование физико-химических свойств приповерхностных слоев вземных объектов пенетраторами-зондами, измерения глубин льда и воды, пенетрация стенки вулкана с целью снятия опасных напряжений [3–6] и др. Поэтому изучение проникания удлиненных форм с использованием разных подходов представляется целесообразным. Особенно это касается вопроса пределов допустимых условий входа.

Проникание иглы как жесткой фигуры под малым углом атаки изучено в [1]. Ниже предлагается упрощенная модель высокоскоростного погружения тонкого упругого тела в прочную среду с учетом кавитационного характера обтекания – срыва потока с боковой поверхности.

Рассмотрим внедрение однородного удлиненного упругого цилиндра в упругопластическое полупространство под малым углом атаки η . При относительно

высоких начальной скорости входа V_0 по нормали к поверхности мишени, удлинения и плотности проникателя, а также малой прочности среды, начальный этап входа можно рассматривать в квазистационарном приближении ($V = V_0 = \text{const}$). Это — типичные условия экспериментов по прониканию стальных игл в глинистую среду [1]. При возмущениях осесимметричного входа, вызванных наличием угла атаки, а также в случае ненулевого угла входа и вращений будет возникать (и это наблюдается экспериментально) отрыв потока среды с боковой поверхности фигуры и появляется боковая нагрузка.

Таким образом, в течение времени погружения $0 < t < t_0$ на тело действует переменная осевая и распределенная по некоторому закону "бегущая" боковая нагрузка. В начальный момент времени нагрузка отсутствует, а при заглублинии она будет распределена по всей длине проникателя. Под действием этих усилий он совершает плоское движение как жесткое целое и, кроме того, испытывает изгиб. Такая сложная кинематика движения будет определять, вообще говоря, переменные области смачивания боковой поверхности S стержня и неизвестные априори границы раздела между ними и областями, свободными от напряжений S_+ . Однако физически очевидно следующее. Если смачивание при $0 < t < t_0$ сохраняется односторонним, то действие изгибающего динамического момента будет максимальным по сравнению с иными режимами обтекания. Это можно доказать и теоретически. В [1] установлен критерий существования такого режима движения: $\eta V_0^2 r \rho / 2\tau_d l > 1, 2$, где τ_d — предел текучести среды, определяемый из динамических пенетрационных испытаний; ρ — плотность тела; l, r — длина и радиус иглы. Поэтому при изучении кинематики изгибного движения и прочности верхние оценки можно получить, рассматривая следующую упрощенную модель динамического изгиба тонкого проникателя. Предположим, что в процессе погружения он испытывает одностороннее обтекание параллелей (обратное влияние изгиба на характер взаимодействия среда-проникатель здесь не учитывается). В отличие от жидкости кавитация в прочной среде обнаруживается при сколь угодно малых скоростях. Согласно критерию идеального отрыва [1] каверна в момент образования (срыва потока) совпадает по форме с миделевым сечением тела в каждой точке его оси. На контуре этого сечения расположены точки отрыва потока. Наблюдения при скоростях $\leq 10^2$ м/с входа тел различных конфигураций в глинистые среды с хорошей точностью подтверждают это предположение. Более высокие скорости приводят к уменьшению области смачивания из-за влияния инерции как в жидкости. Однако верхние оценки, полученные на основе теории идеального отрыва, останутся в силе. Значительные начальные напряжения также могут исказить картину, но ими здесь пренебрегается. Для цилиндра при любом наклоне к потоку смачиваемой частью "погруженной" параллели является полукруглость. Другая часть свободна от напряжений, также как и вся непогруженная часть боковой поверхности. Боковая (нормальная) нагрузка в этом случае будет постоянна в области смачивания и равна нулю на непогруженной части. Независимость этой нагрузки от малого угла встречи с потоком для тонких тел устанавливается теоретически [7]. Таким образом, воздействие среды на фигуру при ее наклоне к потоку моделируется бегущей со скоростью V_0 вдоль образующей цилиндра ступенчатой нагрузкой. Контактное нормальное напряжение определяется согласно методу изолированного элемента, как и в задаче осесимметричного обтекания тонкого жесткого тела потоком упругопластической среды [7] (инерционное сопротивление не учитывается):

$$\sigma_n = b\tau_d, \quad b = \ln \frac{4\mu}{\tau_d} - 1$$

где μ — модуль упругого сдвига среды. Итак, удельная боковая нагрузка равна $q_0 = 2r\sigma_n$. Осевая нагрузка по оценкам достаточно мала (носовая часть тела может быть заостренной и т.д.), чтобы не вызвать заметное изменение осевой составляющей

скорости в течение времени погружения. При $t > t_0$ односторонняя нагрузка, если она сохраняется, изгибающего действия не производит либо возросшая боковая нагрузка быстро ликвидирует угол атаки и вращение (переходной процесс), так что дальнейшее движение происходит вдоль оси тела также при отсутствии изгиба. Поэтому ограничимся рассмотрением упругого динамического изгиба стержня в интервале времени $0 < t < t_0$.

Инерционная распределенная сила q_i определяется из уравнений поступательного и вращательного движений элемента массы dm стержня как жесткого целого

$$q_i = -q_0 T [1 - 6(1 - T)(X - 0,5)]$$

$$m = \rho S l, \quad S = \pi r^2, \quad X = x/l, \quad T = V_0 t/l$$

где x и t – координата вдоль оси тела и время, X и T – их безразмерные аналоги.

Суммарная боковая распределенная нагрузка на стержень $q/q_0 = H(X - T) - T[1 - 6(X - 0,5)(1 - T)](H(X) - \text{ступенчатая функция})$ будет уже самоуравновешена – главный вектор и главный момент равны нулю:

$$\int_0^1 q dX = \int_0^1 q(X - 0,5) dX = 0$$

2. Формы и размах вынужденных колебаний. Уравнение вынужденных колебаний стержня можно записать так:

$$R^{-2} Y'''' + \ddot{Y} = H(T - X) \quad (2.1)$$

$$Y = \frac{y}{rQ}, \quad Q = \frac{q_0 l^2}{r\rho S V_0^2}, \quad R = \frac{lV_0}{a}, \quad a^2 = \frac{EI}{\rho S}$$

где $Y = Y(X, T)$ – безразмерное смещение точек стержня при изгибе, штрих и точка означают дифференцирование по X и T , соответственно; E – модуль Юнга, $I = \pi r^4/4$ – момент инерции поперечного сечения стержня.

Ищется единственное решение в квадрате $0 < X, T < 1$ при следующих начальных и краевых условиях:

$$Y = \dot{Y} = 0; \quad T = 0; \quad Y'' = Y''' = 0, \quad X = 0, 1 \quad (2.2)$$

Таким образом, амплитуда изгиба обусловлена единичной бегущей нагрузкой и в задаче остался один безразмерный параметр R . Часто проводят испытания при неизменных параметрах среды и ударника и ставят серию опытов с изменением скорости удара. Тогда величина R играет роль безразмерной скорости входа. Ниже для наглядности приводятся результаты для характерных значений скорости удара V_0 (м/с) для стальной иглы с удлинением ≈ 45 , диаметром $2r = 1$ мм, проникающей в глинистую среду (пластилин) при температуре 18°C с параметрами: $\rho_0 = 1,5 \cdot 10^3$ кг/м³, $\tau_d \approx 6 \cdot 10^5$ Па, $\mu/\tau_d \approx 3 \cdot 10^3$.

Известны разные подходы к решению сформулированной начально-краевой задачи. Однако, возможно более простому прямому численному расчету предпочтем аналитический метод разложения по базисным функциям, в качестве которых естественно выбрать собственные формы колебаний. Это позволяет провести спектральный анализ картины колебаний и лучше понять физику процесса.

Задача рассматривается в инерциальной (лабораторной) системе координат, в которой стержень совершает поступательно-вращательное движение как жесткое целое и изгибные колебания. Можно также изучать изгиб в неинерциальной системе координат, связанной с движением стержня как жесткого тела. В ней, согласно принципу Даламбера, при рассмотрении изгибных колебаний следует добавить распределенные силы инерции. Это приводит к появлению в правой части уравнения

(2.1) дополнительного слагаемого q_i/q_0 . Кажется бы, должен измениться и результат решения задачи. Это нетривиальный вопрос, поскольку собственные функции, описывающие свободные колебания стержня со свободными концами и уравнение частот имеют вид [8]:

$$P_n(X) = A(\operatorname{ch} \alpha_n X + \cos \alpha_n X) - D(\operatorname{sh} \alpha_n X + \sin \alpha_n X) \cos \alpha_n \operatorname{ch} \alpha_n = 1 \quad (2.3)$$

$$A = (\operatorname{sh} \alpha_n - \sin \alpha_n), \quad D = (\operatorname{ch} \alpha_n - \cos \alpha_n)$$

и на первый взгляд дополнительная, зависящая от X и T нагрузка должна внести вклад в колебания. Однако проверка показала, что выполняются условия ортогональности:

$$\int_0^1 P_n(X) q_i(X, T) dX = 0$$

и поэтому на изгибные колебания стержня дополнительное слагаемое q_i не оказывает влияния, как и должно быть. Таким образом постановка задачи (2.1) является оправданной. Решение ищем методом разделения переменных Фурье, используя полноту, ортогональность и подчиненность собственных функций $P_n(X)$ краевым условиям (2.2):

$$Y(X, T) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(X) Q_n(T) \quad (2.4)$$

Действуя стандартным путем, подставляем (2.4) в уравнение (2.1), совершаем подстановку $P_k''''(X) = \alpha_n^4 P_k(X)$, умножаем обе части равенства на $P_n(X)$, и интегрируем по X от нуля до единицы. Таким образом приходим к задаче отыскания функций $Q_n(T)$:

$$\ddot{Q}_n(T) + R^{-2} \alpha_n^4 Q_n(T) = \frac{1}{I_n} \int_0^1 P_n(X) dX \quad (2.5)$$

$$Q_n(0) = \dot{Q}_n(0) = 0, \quad I_n = \int_0^1 P_n^2(X) dX$$

Решение ищем в виде суммы частного решения уравнения (2.5) и общего решения соответствующего однородного уравнения:

$$Q_n(T) = B_1 \sin(\alpha_n T) + B_2 \cos(\alpha_n T) + B_3 \exp(\alpha_n T) + B_4 \exp(-\alpha_n T) + B_5 \sin(\alpha_n^2 R^{-1} T) + B_6 \cos(\alpha_n^2 R^{-1} T)$$

Неизвестные коэффициенты находятся при подстановке в уравнение (2.5) и начальные условия:

$$B_1 = AG / C_-, \quad B_2 = DG / C_-, \quad B_3 = G(A - D) / 2C_+, \quad B_4 = -G(A + D) / 2C_+$$

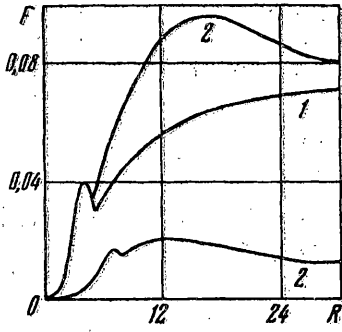
$$B_5 = R(B_4 - B_1 - B_3) / \alpha_n, \quad B_6 = -B_2 - B_3 - B_4$$

$$G = (\alpha_n I_n)^{-1}, \quad C_{\pm} = \alpha_n^2 (R^{-1} \alpha_n^2 \pm 1)$$

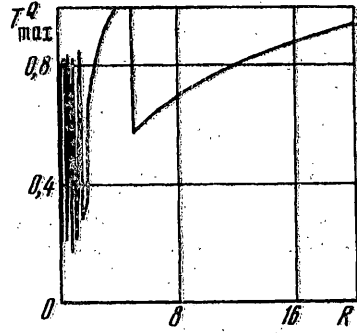
Вследствие быстрой сходимости ряда (2.4) при расчетах ограничимся вычислением лишь первых пяти членов разложения: $\alpha_1 = 4,7300$, $\alpha_2 = 7,8532$, $\alpha_3 = 10,9956$, $\alpha_4 = 14,1372$, $\alpha_5 = 17,2788$. Достаточную для практики точность давали уже первые два слагаемых – остальные были необходимы для контроля точности.

Создана программа расчета величины наибольшего размаха колебаний F в квадрате $0 < X, T < 1$:

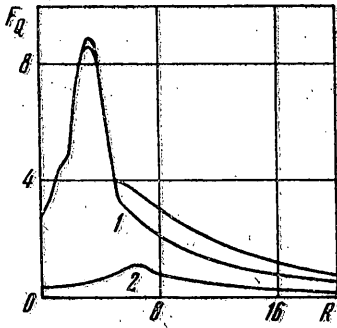
$$F = \max_{0 \leq T \leq 1} \left\{ \max_{0 \leq X \leq 1} Y - \min_{0 \leq X \leq 1} Y \right\}$$



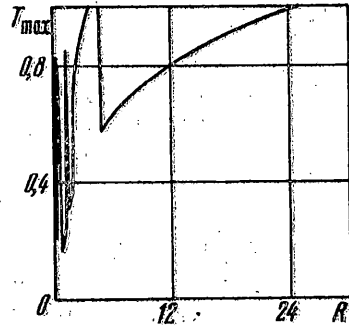
Фиг. 1



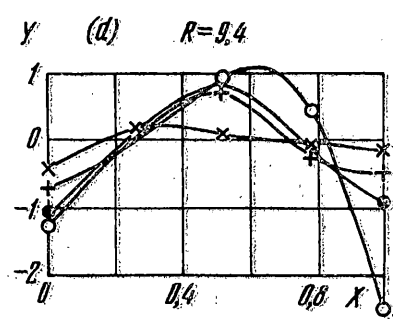
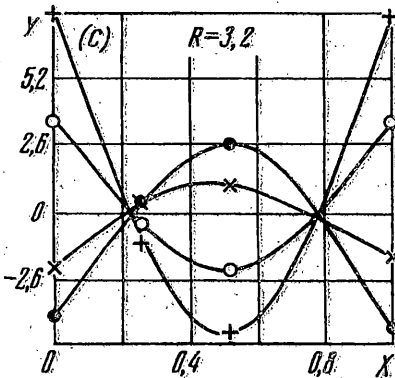
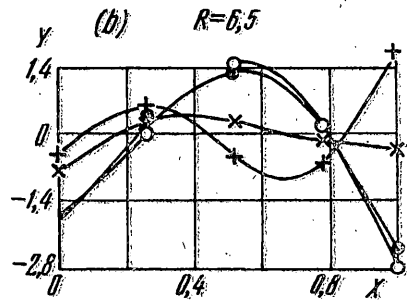
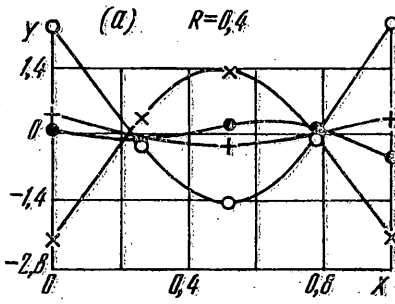
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

График зависимости F от параметра R показан на фиг. 1. На том же графике цифрой 1 отмечен вклад в полный размах колебаний первой формы свободных колебаний $P_1(X)Q_1(T)$ и цифрой 2 – второй. Видно, что основной вклад дает первая форма, заметная поправка за счет второй формы появляется при высоких значениях параметра $R > 5$. На фиг. 2 приведены также значения моментов времени достижения максимума полного размаха при различных значениях R . Нерегулярное поведение функции $T_{\max}(R)$ оказалось неожиданным, но оно объясняет некоторые особенности графика $F(R)$, например, изломы. Кроме того, расчеты подтвердили предположение о достаточности рассмотрения интервала $0 < t < t_0$ для целей нашего исследования, поскольку граничное значение $T_{\max} = 1$ достигается только на сравнительно малом интервале изменения параметра R , который не включает точки экстремумов функции $F(R)$.

На фиг. 3, 4 показаны графики $F_Q(R)$ и $T_{\max}^Q(R)$ для системы игла – пластилин. Они отличаются от предыдущего графика тем, что прежняя функция F умножена на величину безразмерной нагрузки Q , зависящей, кстати, от скорости. Поэтому такое преобразование не является простым подобием. Таким образом, теперь разыскивается прогиб Y от действия нагрузки $QH(T - X)$ в правой части уравнения (2.1). Графики отвечают данному конкретному случаю и, как видно, они более выразительны и просты для интерпретации. Максимум полного размаха приходится на значение $R_1 = 3,2 \Rightarrow V_0 = 89$ м/с. Практически эта точка совпадает с аналогичной точкой для вклада первой формы. Максимум вклада от второй формы достигается в точке $R_2 = 6,5 \Rightarrow V_0 = 184$ м/с. Последующие формы влияют существенно меньше, а максимумы их влияния приходятся на все большие значения параметра R : $R_3 = 9,4$, $R_4 = 12,9$, $R_5 = 16,2$. Описанное поведение подтверждает быструю практическую сходимость ряда (2.4). Наибольшее значение $\max_{0 < R < \infty} F = 0,96$ является оценкой сверху влияния изгиба на кинематику высокоскоростного входа стержня в прочную среду. Пересчитанный в размерных единицах размах позволяет оценить целесообразность учета изгиба при исследовании кинематики и динамики входа конкретного тонкого тела вращения в среду и обосновать границы применимости теории жесткого проникателя. Для стальной иглы, например, при $V_0 = 89$ м/с и уже описанных выше остальных параметрах размах будет равен $f = 8,87$ г. Абсолютному максимуму F соответствует значение $T_{\max} \approx 0,97$.

На фиг. 5 изображены формы вынужденных нестационарных колебаний при значениях $R = R_i$, $i = 0, 1, 2, 3$. Значение $R_0 = 0,4$ соответствует низким скоростям распространения нагрузки (квазистатика), а последующие количества отвечают максимумам вкладов первой, второй и третьей собственных форм колебаний в величину размаха. На каждой отдельной фигуре приведены четыре графика функции $Y(X, T_j)$, отмеченные косым крестом, темной и светлой точками и прямым крестом соответственно фиксированным моментам времени $T_j = 0,25j$, $j = 1, 2, 3, 4$. Для низких скоростей характерна симметрия графика относительно центра $X = 0,5$ при значениях $T \approx 0,25$; $0,75$, ярко выражена первая форма, наблюдается эффект опрокидывания формы. При $T \approx 0,5$; 1 амплитуды на порядок величины меньше и доминируют вторая и третья формы. При значении $R = R_1$, когда реализуется абсолютный максимум функции F , первая форма доминирует при всех значениях $0 \leq T \leq 1$. Дальнейшее увеличение $R = R_2, R_3$ приводит опять к несимметрии графика, однако искажение первой формы при достижении максимальных амплитуд незначительно. При $R > R_2$ эффект "опрокидывания" формы теряется. В интервале $R_2 \leq R \leq R_3$ амплитуда колебаний монотонно растет, достигая максимума при $0,5 < T_m < 1$ и затем, несколько падает, причем $T_m \rightarrow 1$, $R \rightarrow \infty$. Однако, уменьшаются и амплитуды: $F \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$. Это естественно, так как с ростом R уменьшается время действия изгибающей нагрузки.

Ограниченностью этого времени объясняется слабое проявление резонансных эффектов – пиков на графиках фиг. 2.

3. Предельная динамическая нагрузка. Динамический изгибающий момент M , нормированный на $q_0 l^2$, рассчитаем, исходя из формулы

$$\frac{\partial^2 M}{\partial X^2} = H(T - X) - \frac{\rho S}{q_0} \frac{\partial^2 W}{\partial T^2}$$

где $W = U + Y$ – полное смещение, U – смещение точки стержня как жесткого целого. Получим

$$M = \int_0^X [H(Z - T) + q_i(Z, T) - \ddot{Y}(Z, T)](X - Z) dZ = M_1 + M_2 + M_3$$

$$M_1 = \begin{cases} X^2 / 2, & \text{если } X \leq T \\ T(2X - T) / 2, & \text{если } X > T \end{cases}$$

$$M_2 = \frac{1}{2} T X^2 [(1 - T)(2X - 3) - 1]$$

$$M_3 = \sum_{n=1}^{\infty} -\ddot{Q}_n(T) [A(\cos \alpha_n X - \text{ch } \alpha_n X) - D(\sin \alpha_n X - \text{sh } \alpha_n X)] / \alpha_n^2$$

Интересно и неожиданно, что график зависимости максимального изгибающего момента от параметра R :

$$M_{\max}(R) = \max_{0 \leq X, T \leq 1} |M(X, T)| \quad (3.1)$$

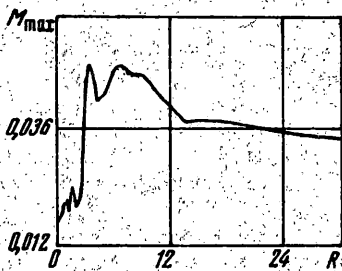
имеет два основных горба при $R_{m_1} \approx 4,3$ и $R_{m_2} \approx 6,6$ с приблизительно равными экстремумами (фиг. 6): $\max M_{\max} \approx 0,055$. Для системы игла – пластилин это скорости $V_0 \approx 122$ и 187 м/с. На фиг. 7 приведена зависимость координаты $X_{\max}(R)$ – точки, где реализовался максимум M . При этом значения $T_{\max}(R) < 1$. В окрестности горбов $X_{\max} \approx 0,5$ и это значит, что излом стержня вероятнее всего произойдет в его центре. Однако на фиг. 8, где приведены распределения $M(X)$ при $R = R_{m_{1,2}}$ в фиксированные моменты времени T_j , видно, что если при $R = R_{m_1}$ доминирует первая форма, то с увеличением R становится заметным влияние второй формы колебаний на величины $\max |M|$. По графику зависимости $X_{\max}(R)$ (фиг. 7), заключаем, что на участке $5 < R < 13,5$ значение X_{\max} подрастает до значения $\approx 0,75$. Кроме того, значение R_{m_2} практически совпало с точкой максимума влияния второй формы на размах R_2 . Все это качественно объясняет экспериментально наблюдаемые факты разрушения игл на две примерно равные части ($X_{\max} \approx 0,5$) или на три части (разрушение по второй форме, смещение точки X_{\max} ближе к краю стержня; несимметричная относительно центра картина распределения момента).

В качестве критерия разрушения при изгибе рассмотрим обычный критерий максимума растягивающих напряжений:

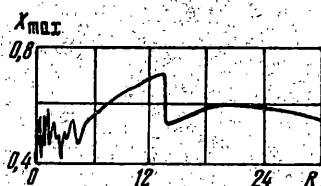
$$\sigma \leq \sigma_* \quad (3.2)$$

где σ – максимальное растягивающее напряжение, σ_* – предел прочности материала при растяжении. Связь σ с M_{\max} дается известной формулой

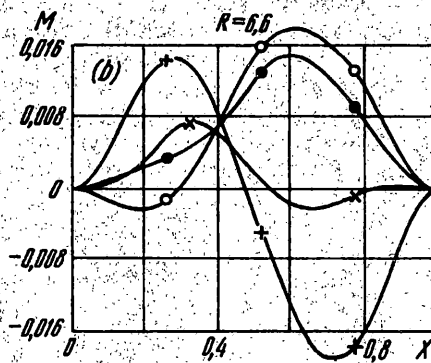
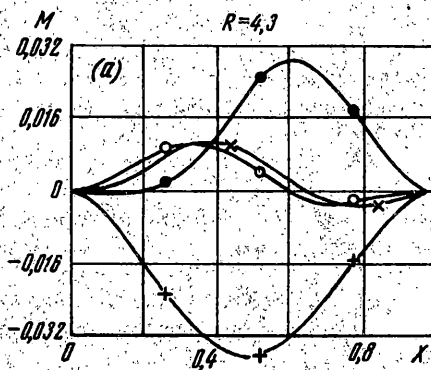
$$\sigma = q_0 l^2 M_{\max} r / I \quad (3.3)$$



Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 8

Исходя из формул (3.1)–(3.3) можно затем оценить риск и возможность разрушения тонкого проникающего.

4. Выводы. Изучен динамический изгиб упругого стержня при высокоскоростном входе под малым углом атаки в упругопластическую среду. Воздействие среды моделировалось бегущей постоянной нагрузкой, ее безразмерная скорость являлась единственным варьируемым параметром. Показано, что вклад первой собственной формы колебаний в кинематику изгибного движения ударника доминирует на всем интервале изменения этого параметра. Только вторая форма накладывает ощутимое возмущение на размах вынужденных колебаний. График максимума размаха в зависимости от безразмерной скорости имеет колоколообразную форму. Для проведенных ранее экспериментов со входом стальной иглы в глинистую среду наибольшее значение эта величина достигает при скорости 89 м/с.

Критерий разрушения стержня требует знания максимального изгибающего момента. Кривая зависимости величины M_{\max} от безразмерной скорости имеет две близко расположенных и примерно равной амплитуды вершины. Изучение формы изгибающего момента при характерных значениях скорости указывает на преобладающее влияние сначала первой, а затем второй формы колебаний на величину M_{\max} и качественно объясняет наблюдаемое разрушение иглы на две или на три примерно одинаковой длины части.

По этим результатам можно оценивать характеристики изгибных движений, необходимость учета влияния изгиба и точность приближения модели жесткого тела, пределы допустимых углов атаки и скоростей при динамическом заглаблении тонких упругих тел в прочные среды и, наконец, прогнозировать вероятность разрушения ударника.

Авторы благодарят Ю.К. Бивина за обсуждения и полезные советы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта № 96-01-00021).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бобровницкий К.Ю., Симонов И.В. Осесимметричное и плоское движения жесткого удлиненного ударника при входе в упругопластическую среду с отрывом потока // Изв. АН СССР. МТТ. 1996. № 5. С. 93–98.
2. Бивин Ю.К., Симонов И.В. Оценки глубин проникания жестких тел в грунтовые среды при сверхзвуковых скоростях входа // Докл. РАН. 1993. Т. 328. № 4. С. 447–450.
3. Богданов А.В., Николаев А.В., Скуридин Г.А., Хаврошкин О.Б., Цыплаков В.В. Об одном методе исследования планет земной группы // Космич. исследования. 1988. Т. 26. Вып. 4. С. 591–603.
4. Симонов И.В., Федотов С.А., Хаврошкин О.Б. Предкатастрофическое состояние геофизических объектов, триггерное воздействие и пенетрация // Докл. РАН. 1996. Т. 347. № 6. С. 811–813.
5. Тез. докл. Междунар. конф. "Проблемы защиты Земли от столкновения с опасными космическими объектами" (г. Снежинск, 1994) РФЯЦ-ВНИИТФ. Ч. I. С. 112. Ч. II. С. 140.
6. Byers R.K., Yarrington P., Chabai A.J. Dynamic penetration of solid media by slender projectiles // Intern. J. Engng. Sci. 1978. V. 16. N 11. P. 835–844.
7. Флитман Л.М. Дозвуковое осесимметричное обтекание тонких заостренных тел вращения упругопластическим потоком // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 4. С. 155–164.
8. Справочник по динамике сооружений // Под ред. Б.Г. Коренева, И.М. Рабиновича. Стройиздат, 1972. С. 511.

Москва

Поступила в редакцию
19.IV.1996