

УДК 539.374

© 1997 г. В.М. САДОВСКИЙ

**УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ СИЛЬНОГО РАЗРЫВА
 В ЛИНЕЙНО УПРОЧНЯЮЩИХСЯ СРЕДАХ**

Для модели динамического деформирования упругопластической среды с линейным упрочнением, записанной в виде гиперболического вариационного неравенства, исследуются вопросы построения обобщенных решений, содержащих разрывы скоростей, напряжений и параметров упрочнения (упругопластические ударные волны). Проведена классификация допустимых разрывов в изотропных средах, подчиняющихся условиям пластичности Мизеса и Треска – Сен-Венана. Показано, что при переходе через поверхности диссипативных разрывов в таких средах главные оси тензора активных напряжений не изменяются.

1. Вариационная формулировка модели. При малых деформациях элементов среды модель упругопластического течения с учетом совместного изотропного и трансляционного упрочнения может быть представлена в виде следующего вариационного неравенства [1]:

$$(v_i^* - v_i)(\rho v_{i,t} - \sigma_{ij,j}) + (\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij})(a_{ijkl}\sigma_{kl,t} - v_{i,j}) + (\tau_{ij}^* - \tau_{ij})\xi_{ij,t} + (\theta^* - \theta)\eta_{,t} \geq 0 \quad (1.1)$$

Здесь ρ – плотность, v_i и σ_{ij} – компоненты вектора скорости и симметричного тензора напряжений относительно декартовой системы координат x_1, x_2, x_3 ; a_{ijkl} – тензор модулей упругой податливости материала, обладающий симметрией и свойством положительной определенности. Индексы после запятой служат для обозначения частных производных по времени и пространственным координатам. Принято правило суммирования по повторяющимся индексам. В этом неравенстве вариация вектора скорости произвольна, а вариации тензора напряжений и термодинамических параметров упрочнения: симметричного тензора микронапряжений с компонентами τ_{ij} и предела текучести θ подчиняются условию

$$f(\sigma_{ij}^* - \tau_{ij}^*) \leq \theta^* \quad (1.2)$$

где $f = f(s_{ij})$ ($s_{ij} = \sigma_{ij} - \tau_{ij}$) – выпуклая и положительно однородная функция текучести в естественном состоянии материала. Входящие в (1.1) функции упрочнения ξ_{ij} и η определяются через строго выпуклый пластический потенциал Гиббса $\Phi^p = \Phi^p(\tau_{ij}; \theta)$:

$$\xi_{ij} = \partial\Phi^p / \partial\tau_{ij}, \quad \eta = \partial\Phi^p / \partial\theta$$

В случае нерегулярной поверхности текучести, когда

$$f(s_{ij}) = \max_{l=1,2,\dots,p} f_l(s_{ij})$$

причем функции f_l непрерывно дифференцируемы, в силу теоремы Куна – Таккера вариационное неравенство (1.1) эквивалентно системе уравнений

$$\rho v_{i,t} = \sigma_{ij,j}, \quad \xi_{ij,t} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) - a_{ijkl}\sigma_{kl,t} = \sum_{l=1}^p \gamma_l \frac{\partial f_l}{\partial s_{ij}}, \quad \eta_{,t} = \sum_{l=1}^p \gamma_l \quad (1.3)$$

в которой γ_l – неотрицательные множители Лагранжа, удовлетворяющие условиям $\gamma_l \{f_l(s_{ij}) - \theta\} = 0$ ($l = 1, 2, \dots, p$).

Таким образом, формулировка (1.1) одновременно содержит в себе уравнения движения элемента среды и определяющие соотношения упругопластического деформирования, описывающие процесс разгрузки.

Путем преобразования уравнений эволюции параметров упрочнения, входящих в систему (1.3), с учетом теоремы Эйлера для однородных функций можно установить тождество

$$(\sigma_{ij} - \tau_{ij}) \xi_{ij,t} = \theta \eta_t$$

на основе которого доказывается, что преобразование Лежандра пластического потенциала $A^p = \tau_{ij} \xi_{ij} + \theta \eta - \Phi^p$ (величины ξ_{ij} совпадают с компонентами тензора необратимой деформации элемента) равно работе необратимой деформации на истинных напряжениях. Таким образом, выбранная система параметров упрочнения взаимно однозначно связана с системой параметров ξ_{ij} , A^p , традиционно используемой при формулировке определяющих соотношений моделей упрочняющихся сред (см. [2]–[4]).

Условие (1.2) описывает классические варианты упрочнения: изотропному упрочнению отвечает $\tau_{ij} = 0$, трансляционному – $\theta = \theta_0 = \text{const}$, для модели упругоидеальнопластической среды $\tau_{ij} = 0$, $\theta = \theta_0$, причем фиксированные параметры в неравенстве (1.1) не варьируются.

Рассмотрим случай линейного упрочнения, когда пластический потенциал является квадратичной функцией следующего вида: $\Phi^p = \frac{1}{2} \tau_{ij} \alpha_{ijkl} \tau_{kl} + \beta (\theta - \theta_0)^2$. Здесь α_{ijkl} – симметричный и положительно определенный тензор коэффициентов, характеризующих трансляцию поверхности текучести, $\beta > 0$ – коэффициент изотропного расширения, θ_0 – начальный предел текучести материала. В этом случае

$$\xi_{ij} = \alpha_{ijkl} \tau_{kl}, \quad \eta = 2\beta(\theta - \theta_0), \quad \theta = \sqrt{\theta_0^2 + \beta^{-1} (A^p - \tau_{ij} \alpha_{ijkl} \tau_{kl} / 2)}$$

Если линейно упрочняющаяся среда первоначально изотропна, то функция текучести в (1.2) зависит только от инвариантов тензора активных напряжений s_{ij} , и выполняются соотношения

$$\alpha_{ijkl} = \frac{1}{2\mu} \left(\delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \delta_{ij} \delta_{kl} \right), \quad \alpha_{ijkl} = \alpha \delta_{ik} \delta_{jl}$$

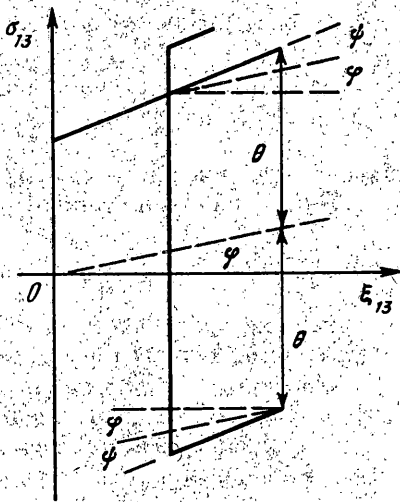
где δ_{ij} – символ Кронеккера, λ и μ – параметры Ламе. Константы α и β могут быть найдены, например, по диаграмме чистого сдвига материала, отвечающей циклическому нагружению, так как в соответствие с рассматриваемой моделью первому циклу нагружения на плоскости касательного напряжения и пластической деформации сдвига отвечает ломаная, изображенная на фиг. 1, с углами наклона $\varphi = \arctg(1/\alpha)$ и $\psi = \arctg(1/\alpha + 1/\beta) - \varphi$.

Для модели линейного упрочнения неравенство (1.1) относится к вариационным неравенствам следующего типа:

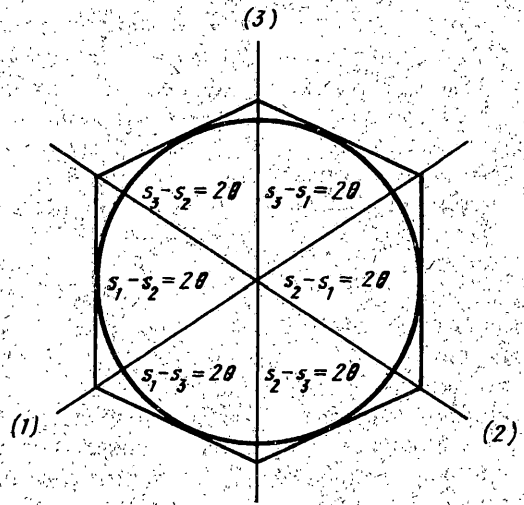
$$(u^* - u)(L\langle u \rangle - g) \geq 0, \quad u, u^* \in K \quad (1.4)$$

$$L\langle u \rangle = Au_t - \sum_{l=1}^n B_l u_{,l} - Qu$$

Здесь $u = u(t, x)$ – неизвестная m -мерная вектор-функция, $K = K(t, x)$ – выпуклое множество допустимых вариаций решения, $g = g(t, x)$ – заданная векторная функция, $A = A(t, x)$ и $B_l = B_l(t, x)$ – симметричные матрицы размерности $m \times m$, причем матрица A положительно определена, $Q = Q(t, x)$ – матрица такой же размерности. Явная



Фиг. 1



Фиг. 2

зависимость заданных функций и матриц от времени и пространственных координат позволяет рассматривать неоднородные материалы. В приведенной выше модели вектор u содержит компоненты вектора скорости, тензора напряжений и параметры упрочнения, матрицы – коэффициенты дифференциального оператора равны

$$A = \partial^2 \Phi / \partial u^2, \quad B_l = \partial^2 \Psi_l / \partial u^2$$

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \rho v_i^2 \delta_{ii} + \frac{1}{2} \sigma_{ij} a_{ijkl} \sigma_{kl} + \Phi^p(\tau_{ij}, \theta), \quad \Psi_l(u) = \sigma_{il} v_l$$

матрица Q и вектор g равны нулю, а множество K определяется ограничением (1.2). Кроме (1.1) к неравенствам типа (1.4) приводят частные модели деформирования, описывающие динамические процессы при наличии симметрии (плоской, осевой, центральной), а также модели тонкостенных упругопластических конструкций (стержней, пластин, оболочек), основанные на гипотезах Тимошенко.

Дифференциальный оператор $L(u)$ является симметрическим t – гиперболическим по Фридрихсу. Это позволяет в общем случае при условии достаточной гладкости коэффициентов оператора методом интегрального обобщения сформулировать понятие обобщенного решения вариационного неравенства (1.4) и выписать соотношения сильного разрыва решения в следующем виде (см. [5]):

$$(u^* - u^0) D[u] \geq 0, \quad u^\pm, u^* \in K \quad (1.5)$$

$$D(t, x, c, v) = cA + \sum_{l=1}^n v_l B_l, \quad u^0 = \frac{1}{2}(u^+ + u^-)$$

Здесь квадратные скобки обозначают скачок функции при переходе через гиперповерхность разрыва, v_l – вектор нормали к фронту разрыва, $c > 0$ – скорость распространения фронта в направлении нормали, u^\pm – односторонние пределы разрывного решения.

Метод априорных оценок для неравенства (1.4) доказывает единственность и непрерывную зависимость от начальных данных решений задачи Коши и краевых задач с диссипативными граничными условиями при наличии конечного числа гиперповерхностей разрыва, а также конечность областей зависимости и влияния решения (ограниченность скорости распространения возмущений в соответствующих моделях). Свойство единственности разрывного решения служит обоснованием полноты

соотношений (1.5). Адекватность рассматриваемого подхода к построению класса обобщенных решений с сильными разрывами обосновывается предельным переходом по коэффициентам вязкости в моделях упруговязкопластических сред [1], [5].

2. Условие пластичности Мизеса. Вытекающее из (1.5) вариационное неравенство на поверхности разрыва (ударной волне) в первоначально изотропной среде с линейной диаграммой упрочнения:

$$\begin{aligned} & (v_i^* - v_i^0)(\rho c[v_i] + [\sigma_{ij}]v_j) + \frac{\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}^0}{2\mu} \left\{ c[\sigma_{ij}] - \frac{3\lambda c[\sigma]}{3\lambda + 2\mu} \delta_{ij} + 2\mu[v_i]v_j \right\} + \\ & + \alpha c(\tau_{ij}^* - \tau_{ij}^0)[\tau_{ij}] + 2\beta c(\theta^* - \theta^0)[\theta] \geq 0, \quad f(s_{ij}^\pm) \leq \theta^\pm, \quad f(s_{ij}^*) \leq \theta^* \end{aligned} \quad (2.1)$$

($\sigma = \frac{1}{3}\sigma_{ij}\delta_{ij}$ – среднее напряжение), определяет два типа разрывов. Это нейтральные (упругие) волны, которые отвечают строгому неравенству $f(s_{ij}^0) < \theta^0$, и диссипативные волны, для которых $f(s_{ij}^0) = \theta^0$. Так как в первом случае вариации параметров упрочнения в неравенстве (2.1) могут быть взяты произвольно, то на нейтральных волнах выполняются условия непрерывности $[\tau_{ij}] = [\theta] = 0$. Система уравнений, получаемая из равенства нулю коэффициентов при остальных независимых вариациях, описывает продольные упругие волны, распространяющиеся в одном из главных направлений тензора $[\sigma_{ij}]$ со скоростью $c_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$, и поперечные волны, ориентация которых относительно системы координат, связанной с главными направлениями, с точностью до перестановки индексов задается направляющими косинусами $v_1^2 = v_2^2 = \frac{1}{2}$, $v_3 = 0$, а скорость равна $c_s = \sqrt{\mu/\rho}$.

На волнах второго типа в силу выпуклости функции текучести справедлива цепочка неравенств с одинаковыми правой и левой частями:

$$\theta^0 = f(s_{ij}^0) \leq \frac{1}{2}\{f(s_{ij}^+) + f(s_{ij}^-)\} \leq \frac{1}{2}(\theta^+ + \theta^-)$$

Таким образом, выполняются условия $f(s_{ij}^\pm) = \theta^\pm$, которые показывают, что по обе стороны от фронтов диссипативных волн реализуется пластическое состояние.

Пусть $s'_{ij} = s_{ij} - s\delta_{ij}$ ($s = \frac{1}{3}s_{ij}\delta_{ij}$) – девиатор тензора активных напряжений. На основе легко проверяемого тождества:

$$\frac{\theta^+\theta^-}{4} \left[\frac{s'_{ij}}{\theta} \right] \left[\frac{s'_{ij}}{\theta} \right] = \frac{\theta^0}{2\theta^+} (s'_{ij})^+ (s'_{ij})^+ + \frac{\theta^0}{2\theta^-} (s'_{ij})^- (s'_{ij})^- - (s'_{ij})^0 (s'_{ij})^0$$

доказывается, что при условии пластичности Мизеса ($f = \sqrt{\frac{1}{2}s'_{ij}s'_{ij}}$) для диссипативных волн $[s'_{ij}/\theta] = 0$.

После совмещения координатных осей с главными направлениями тензора $[\sigma_{ij}]$ получим эквивалентную (2.1) систему уравнений с множителем Лагранжа $\gamma \geq 0$ в виде

$$\rho c[v_k] + [\sigma_k]v_k = 0, \quad \frac{\rho c^2}{2\mu} \left([\sigma_k] - \frac{3\lambda[\sigma]}{3\lambda + 2\mu} \right) - [\sigma_k]v_k^2 = -\rho c \gamma \frac{s'_k}{\theta} \quad (2.2)$$

$$\alpha c[\tau_k] = \gamma s'_k / \theta, \quad \beta c[\theta] = \gamma, \quad ([\sigma_i] + [\sigma_j])v_i v_j = 0 \quad (i \neq j)$$

С учетом непрерывности величин s'_k/θ получим

$$[s'_k] = [\theta]s'_k / \theta, \quad [\sigma'_k] = [\tau_k] + [s'_k] = 2\mu\gamma s'_k / (c\theta) \quad (2.3)$$

где $\kappa = (\alpha^{-1} + \beta^{-1})/(2\mu)$ – относительный модуль упрочнения материала.

Если диссипативная волна распространяется в направлении оси x_1 ($v_1 = 1, v_2 = v_3 =$

= 0), то в силу (2.2), (2.3) на ее фронте дивидор тензора активных напряжений имеет специальный вид: $s'_1 / \theta = \pm 2 / \sqrt{3}$, $s'_2 / \theta = s'_3 / \theta = \mp 1 / \sqrt{3}$. Скорость такой волны вычисляется по формуле

$$c_f = \sqrt{\frac{\lambda + \frac{2}{3}\mu + (\lambda + 2\mu)\kappa}{(1 + \kappa)\rho}} \quad (2.4)$$

Напряженное состояние в окрестности волны однозначно определяется при известном состоянии перед фронтом и одной из величин, например θ^+ ($\theta^+ > \theta^-$), за фронтом, из условий непрерывности компонент дивидора, отнесенных к пределу текучести, и дополнительных уравнений: $\alpha[\tau_1] = -2\alpha[\tau_2] = -2\alpha[\tau_3] = \pm 2\beta[\theta] / \sqrt{3}$, $[\sigma] = \pm(3\lambda + 2\mu)(1 + \kappa)\beta[\theta] / \sqrt{3}$.

Кроме продольных волн, ориентированных по главным направлениям тензора напряжений, возможны диссипативные поперечные волны. Пусть, например $v_1 v_2 \neq 0$, тогда одно из уравнений системы (2.2) дает $[\sigma_2] = -[\sigma_1]$. Из сопоставления выражений для $[\sigma'_k]$, найденных из (2.2), с выражениями (2.3) можно установить условия реализуемости таких волн:

$$s'_1 / \theta = -s'_2 / \theta = \pm 1, \quad s'_3 / \theta = 0$$

определить скорость и направление распространения

$$c_\tau = \sqrt{\frac{\mu\kappa}{(1 + \kappa)\rho}}, \quad v_1^2 = v_2^2 = \frac{1}{2} \quad (2.5)$$

а также получить систему соотношений для скачков

$$\alpha[\tau_1] = -\alpha[\tau_2] = \pm\beta[\theta], \quad [\tau_3] = [\sigma_3] = 0$$

Случай $v_1 v_2 v_3 \neq 0$ можно не рассматривать, так как из системы уравнений (2.2) сразу получаются условия непрерывности всех параметров состояния. Дополнительный анализ показывает, что система запрещает также существование нейтральных разрывов в пластическом состоянии среды при $\gamma = 0$. Таким образом, какие-либо другие типы разрывов, согласованные с неравенством (2.1), при условии пластичности Мизеса невозможны.

3. Условие пластичности Треска – Сен-Венана. Пусть v_i^M и v_i^m главные направления тензора s_{ij}^0 , отвечающие наибольшему и наименьшему из главных напряжений

$$s_M^0 = \max_{|v|=1} s_{ij}^0 v_i v_j, \quad s_m^0 = \max_{|v|=1} s_{ij}^0 v_i v_j = -\max_{|v|=1} (-s_{ij}^0 v_i v_j)$$

При условии пластичности Треска – Сен-Венана ($2f = s_M - s_m$) диссипативные волны в линейно упрочняющейся изотропной среде характеризуются цепочкой неравенств, каждое из которых можно заменить равенством

$$\begin{aligned} 2\theta^0 &= s_{ij}^0 v_i^M v_j^M - s_{ij}^0 v_i^m v_j^m = \max_{|v|=|v'|=1} s_{ij}^0 (v_i v_j - v'_i v'_j) \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \max_{|v|=|v'|=1} s_{ij}^+ (v_i v_j - v'_i v'_j) + \frac{1}{2} \max_{|v|=|v'|=1} s_{ij}^- (v_i v_j - v'_i v'_j) \leq \theta^+ + \theta^- \end{aligned}$$

Отсюда методом от противного доказывается система равенств

$$s_{ij}^+ v_i^M v_j^M = \max_{|v|=1} s_{ij}^+ v_i v_j, \quad s_{ij}^- v_i^m v_j^m = -\max_{|v|=1} (-s_{ij}^- v_i v_j)$$

которые означают, что векторы v_i^M , v_i^m являются одновременно главными направлениями для тензоров s_{ij}^+ и s_{ij}^- , а эти тензоры соосны.

Считая, что координатные оси совпадают с главными осями, рассмотрим все возможные варианты расположения тензоров, описывающих напряженное состояние в окрестности фронтов волн, на поверхности призмы текучести (фиг. 2). В случае продольных волн ($v_1 = 1, v_2 = v_3 = 0$) таких независимых вариантов семь. Все остальные получаются из них путем циклической замены индексов.

Эквивалентная вариационному неравенству (2.1) система уравнений, в которой множители Лагранжа $\gamma_{ij} \geq 0$ удовлетворяют условиям $\gamma_{ij}(s_i^0 - s_j^0 - 2\theta^0) = 0$ ($i \neq j$), записывается в следующем общем виде:

$$\rho c[v_k] + [\sigma_1] \delta_{1k} = 0, \quad (\rho c^2 - 2\mu \delta_{ik})[\sigma_k] - \lambda[\sigma_1] = -2\mu \rho c^2 \alpha[\tau_k] \quad (3.1)$$

$$\alpha[\tau_k] = \gamma_{kj} \delta_{ji} - \gamma_{ik} \delta_{ii}, \quad \beta c[\theta] = \gamma_{ij} \delta_{ii} \delta_{jj}$$

1. Пусть в уравнение грани призмы входит главное напряжение, действующее в направлении распространения волны, и одно из двух оставшихся напряжений. Например $s_1^\pm - s_3^\pm = 2\theta^\pm$, $s_1^\pm \geq s_2^\pm \geq s_3^\pm$. Тогда выполняется равенство $[\sigma_1 - \sigma_3] = 2[\theta] + [\tau_1 - \tau_3]$, добавление которого к системе (3.1) позволяет определить скорость волны

$$c_t = \sqrt{\frac{\lambda + \mu + (\lambda + 2\mu)\kappa}{(1 + \kappa)\rho}} \quad (3.2)$$

и необходимые уравнения, связывающие скачки параметров состояния

$$\alpha[\tau_1] = -\alpha[\tau_3] = \beta[\theta], \quad [\tau_2] = 0, \quad [\sigma_2] = 2\lambda(1 + \kappa)\beta[\theta]$$

$$[\sigma_1 + \sigma_3] = 4(\lambda + \mu)(1 + \kappa)\beta[\theta]$$

2. Уравнение грани призмы отличается от предыдущего варианта знаками напряжений: $s_3^\pm - s_1^\pm = 2\theta^\pm$, $s_3^\pm \geq s_2^\pm \geq s_1^\pm$. В данном случае скорость волны имеет то же значение, а система уравнений сильного разрыва получается переменной знака при параметре β .

3. Главное напряжение, действующее в направлении распространения волны, не входит в уравнение грани: $s_2^\pm - s_3^\pm = 2\theta^\pm$, $s_2^\pm \geq s_1^\pm \geq s_3^\pm$. В этом случае из (3.1) вытекают соотношения, определяющие продольную упругую волну.

4. Ребро призмы является пересечением двух граней, в уравнения которых входит напряжение, действующее в направлении распространения волны: $s_1^\pm - s_3^\pm = 2\theta^\pm$, $s_1^\pm - s_2^\pm = 2\theta^\pm$. Для этого варианта $s_2^\pm = s_3^\pm$, скорость волны равна

$$c_f' = \sqrt{\frac{\lambda + \frac{2}{3}\mu + (\lambda + 2\mu)\kappa'}{(1 + \kappa')\rho}} \quad (3.3)$$

где $\kappa' = (\alpha^{-1} + \frac{1}{3}\beta^{-1}) / (2\mu)$, а система соотношений для определения состояния на фронтом имеет вид

$$\alpha[\tau_1] = -2\alpha[\tau_2] = -2\alpha[\tau_3] = \beta[\theta], \quad [\sigma] = (3\lambda + 2\mu)(1 + \kappa')\beta[\theta] / 2$$

5. Уравнения граней, определяющих ребро, отличаются от предыдущего варианта противоположными знаками напряжений. Соответствующая скорость волны имеет то же значение, а система соотношений получается заменой знака при β .

6. Напряжение, которое действует в направлении распространения волны, входит лишь в одно из уравнений граней, определяющих ребро призмы текучести: $s_1^\pm - s_3^\pm = 2\theta^\pm$, $s_2^\pm - s_3^\pm = 2\theta^\pm$. В данном случае система уравнений (3.1) запрещает разрыв.

7. Ребро является пересечением граней, уравнения которых отличаются от уравнений предыдущего варианта знаками напряжений. Разрыв напряжений и параметров упрочнения также невозможен.

Пусть теперь направление распространения диссипативной волны не совпадает ни с одной из главных осей тензоров напряжений ($v_1 v_2 \neq 0, v_3 = 0$). Тогда первые две группы уравнений системы (3.1) заменяются следующими:

$$\rho c [\bar{v}_k] + [\sigma_k] v_k = 0, \quad (\rho c^2 - 2\mu v_k^2) [\sigma_k] - \lambda [\sigma_1] (v_1^2 - v_2^2) = -2\mu \rho c^2 \alpha [\tau_k]$$

Кроме этого, к системе добавляется уравнение $[\sigma_2] = -[\sigma_1]$, которое ниже принимается в качестве одного из уравнений для определения состояния за фронтом волны.

Имеется четыре независимых варианта расположения тензоров напряжений на призме текучести. Остальные варианты могут быть получены переобозначением главных напряжений.

8. Напряжения, действующие в направлении осей x_1 и x_2 , входят в уравнение грани призмы, например $s_1^\pm - s_2^\pm = 2\theta^\pm, s_1^\pm \geq s_2^\pm \geq s_3^\pm$. Тогда скорость волны и направляющие косинусы задаются формулами (2.5), а состояние за фронтом может быть найдено при помощи следующих соотношений:

$$\alpha[\tau_1] = -\alpha[\tau_2] = \beta[\theta], \quad [\tau_3] = [\sigma_3] = 0$$

9. Только одно из этих напряжений входит в уравнение грани, например $s_1^\pm - s_3^\pm = 2\theta^\pm, s_1^\pm \geq s_2^\pm \geq s_3^\pm$. В этом случае возникает новый тип волны, скорость распространения которой и ориентация определяются по формулам

$$c_q = \sqrt{\frac{(\lambda + \mu)(3 + 4\kappa) - \mu}{4(\lambda + \mu)(1 + \kappa) - \mu} \times \frac{\mu}{\rho}}, \quad v_1^2 = \frac{2(\lambda + \mu)(1 + \kappa)}{4(\lambda + \mu)(1 + \kappa) - \mu} \quad (3.4)$$

$$v_2^2 = 1 - v_1^2$$

На ее фронте выполняются соотношения

$$\alpha[\tau_1] = -\alpha[\tau_3] = \beta[\theta], \quad [\tau_2] = 0, \quad [\sigma_3] = \mu(3\lambda + 2\mu)\beta[\theta] / (\lambda + \mu)$$

Следует заметить, что при обычных ограничениях на параметры Ламе $\mu > 0, \lambda + \frac{2}{3}\mu > 0$, такая волна реализуется не всегда, а только если выполняется условие $2\lambda \geq -(1 + 2\kappa)\mu / (1 + \kappa)$, обеспечивающее действительное значение v_2 , причем в предельном случае, когда $v_2 = 0$, эта волна совпадает с волной первого варианта.

10. Уравнение грани отличается от предыдущего уравнения знаками напряжений. Тогда скорость и направляющие косинусы остаются как в предыдущем варианте, а в системе соотношений следует изменить знак β .

11. Ребро призмы определяется уравнениями $s_1^\pm - s_2^\pm = 2\theta^\pm, s_1^\pm - s_3^\pm = 2\theta^\pm$. В данном случае разрыв параметров состояния невозможен.

Таким образом, класс диссипативных разрывов при условии пластичности Треска – Сен-Венана содержит продольные волны полной пластичности, распространяющиеся со скоростью (3.3), которая отличается от скорости аналогичных волн (2.4) потому, что, как принято, ребра призмы текучести не принадлежат поверхности цилиндра Мизеса; поперечные волны, имеющие одинаковые скорости для обоих условий пластичности, и два типа волн, характерных только для условия Треска – Сен-Венана. К первому типу относятся продольные волны неполной пластичности (3.2), отвечающие грани призмы в пространстве напряжений, ко второму – квазипоперечные волны (3.4), на фронтах которых терпят разрыв одновременно нормальное и касательное напряжения.

Предельные значения приведенных выше выражений для скоростей при стремлении модулей κ и κ' к нулю отвечают случаю упругоидеальнопластической среды. Эти

скорости были впервые получены Г.И. Быковцевым и Л.Д. Кретовой [6] на основе предположения о максимальной пластической диссипации энергии на разрыве. Скорости распространения волн сильного разрыва для модели изотропного упрочнения и модели трансляционного упрочнения определяются при $\alpha \rightarrow \infty$ и $\beta \rightarrow \infty$, соответственно. В результате предельного перехода при $\kappa, \kappa' \rightarrow \infty$ получаются скорости продольных и поперечных упругих волн.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 97-01-00434) и Грантового центра при Новосибирском государственном университете.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Садовский В.М. К теории распространения упругопластических волн в упрочняющихся средах // ПМТФ. 1994. № 5. С. 166–172.
2. Кадашевич Ю.И., Новожилов В.В. Теория пластичности и ползучести металлов, учитывающая микронапряжения // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 5. С. 99–110.
3. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. II. М.: Наука, 1976. 576 с.
4. Коларов Д., Балтов А., Бончева Н. Механика пластических сред. М.: Мир, 1979. 302 с.
5. Садовский В.М. Гиперболические вариационные неравенства в задачах динамики упругопластических тел // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 6. С. 1041–1048.
6. Быковцев Г.И., Кретова Л.Д. О распространении ударных волн в упругопластических средах // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 1. С. 106–116.

Красноярск

Поступила в редакцию
16.IV.1996