

УДК 531.8

© 1997 г. Н.Н. БОЛОТНИК, С.А. КУМАКШЕВ

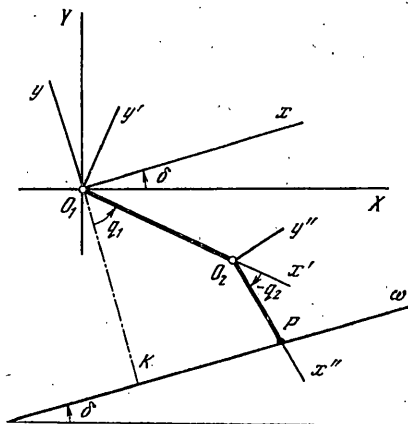
## О МАКСИМИЗАЦИИ СТАТИЧЕСКОЙ СИЛЫ, РАЗВИВАЕМОЙ ДВУЗВЕННОЙ НОГОЙ ШАГАЮЩЕГО АППАРАТА

В статической постановке решается задача о максимизации силы трения между стопой двузвенной ноги шагающего робота и опорной поверхностью в заданном направлении при ограничениях на управляющие моменты в шарнирах. Исследуется зависимость максимальной силы трения от конструктивных параметров ноги, положения стопы на опорной поверхности, направления сгиба ноги в колене и других характеристик.

**1. Описание механической системы. Условие равновесия.** Рассмотрим плоский двузвенник (двойной физический маятник), состоящий из двух абсолютно твердых тел, соединенных между собой при помощи идеального (без трения) цилиндрического шарнира  $O_2$ . Одно из звеньев при помощи идеального цилиндрического шарнира  $O_1$ , ось которого горизонтальна и параллельна оси шарнира  $O_2$ , соединено с неподвижным основанием, а другое звено имеет точечный контакт (в точке  $P$ ) с шероховатой плоскостью  $\Pi$ , которая параллельна осям шарниров  $O_1$  и  $O_2$ , наклонена под углом  $\delta$  к горизонтали и отстоит от шарнира  $O_1$  на расстояние  $h$  (см. фиг. 1). В шарнирах  $O_1$  и  $O_2$  действуют управляющие моменты сил  $M_1$  и  $M_2$  соответственно, причем момент  $M_1$  создается внешними силами (силами взаимодействия первого звена системы с основанием), а момент  $M_2$  – внутренними силами (силами взаимодействия между звеньями). Описанная система может служить моделью двузвенной ноги шагающего аппарата при исследовании ее статических характеристик и расчетах конструктивных параметров.

Проведем через точку  $P$  плоскость  $\Pi_1$ , перпендикулярную осям шарниров двузвенника; точки пересечения плоскости  $\Pi_1$  с осями шарниров  $O_1$  и  $O_2$  обозначим теми же буквами, что и сами шарниры. Введем в плоскости  $\Pi_1$  четыре прямоугольных системы координат:  $O_1XY$ ,  $O_1x_1y_1$ ,  $O_1x'y'$ ,  $O_2x''y''$ . Ось  $X$  системы координат  $O_1XY$  – горизонтальна, а ось  $Y$  направлена вертикально вверх. На фиг. 1 система координат  $O_1XY$  изображена так, что орты осей  $X$  и  $Y$  составляют угол  $90^\circ$ , отсчитываемый от положительного направления оси  $X$  против часовой стрелки.

Для введения системы координат  $O_1x_1y_1$  опустим перпендикуляр из точки  $O_1$  на линию  $\omega$  пересечения плоскостей  $\Pi$  и  $\Pi_1$ . Обозначим основание



Фиг. 1

этого перпендикуляра через  $K$ . Направим ось  $y$  системы координат  $O_1xy$  вдоль прямой  $KO_1$  от точки  $K$  к точке  $O_1$ , а ось  $x$  – вдоль прямой, проходящей через точку  $O_1$  и параллельной прямой  $\omega$ , так, чтобы орты осей  $x$  и  $y$  составляли угол  $90^\circ$ , отсчитываемый от положительного направления оси  $x$  против часовой стрелки.

Ось  $x'$  системы координат  $O_1x'y'$  направим вдоль вектора  $\overrightarrow{O_1O_2}$ , а ось  $y'$  – под углом  $90^\circ$  к оси  $x'$ , отсчитываемым против часовой стрелки.

Ось  $x''$  системы координат  $O_2x''y''$  направим вдоль вектора  $\overrightarrow{O_2P}$ , а ось  $y''$  – под углом  $90^\circ$  к оси  $x''$ , отсчитываемым против часовой стрелки.

Обозначим через  $\delta$  угол между осями  $x$  и  $X$ , через  $q_1$  – угол между отрицательным лучом оси  $y$  и осью  $x'$ , а через  $q_2$  – угол между осями  $x'$  и  $x''$ ; за положительные направления отсчета углов принимается направление против часовой стрелки. Угол  $\delta$  определяет наклон шероховатой плоскости  $\Pi$ , на которую опирается двузвенник, к горизонтали, а углы  $q_1$  и  $q_2$  задают конфигурацию двузвенника.

Примем за положительное направление действия моментов  $M_1$  и  $M_2$  направление вращения против часовой стрелки.

Обозначим:  $l_1 = |O_1O_2|$  – длина первого звена;  $l_2 = |O_2P|$  – длина второго звена;  $a_1$  и  $b_1$  –  $x'$ - и  $y'$ -координаты центра масс  $C_1$  первого звена;  $a_2$  и  $b_2$  –  $x''$ - и  $y''$ -координаты центра масс  $C_2$  второго звена;  $m_1$  и  $m_2$  – массы первого и второго звеньев соответственно;  $g$  – ускорение силы тяжести;  $F$  – сила сухого трения, действующая на второе звено двузвенника в точке контакта с плоскостью  $\Pi$ ,  $N$  – сила нормальной реакции плоскости  $\Pi$  в точке  $P$ .

Выведем уравнения равновесия двузвенника под действием силы тяжести, силы реакции опорной плоскости ( $F$  и  $N$  – компоненты этой силы в системе координат  $O_1xy$ ) и управляющих моментов  $M_1$  и  $M_2$ . Отметим, что на систему действует еще сила реакции подвеса в точке  $O_1$ , однако этот подвес представляет собой идеальную связь (поскольку трение в шарнире  $O_1$  не учитывается), и соответствующая сила реакции исключается согласно принципам аналитической механики. В соответствии с принципами аналитической статики уравнения равновесия рассматриваемой механической системы могут быть представлены в виде

$$-\partial U / \partial q_i + Q_{q_i} = 0 \quad (i=1, 2) \quad (1.1)$$

где  $U$  – потенциальная энергия системы,  $Q_{q_i}$  – непотенциальная обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате  $q_i$ .

Потенциальная энергия механической системы в однородном поле тяжести определяется по формуле

$$U = -m(\mathbf{g}, \mathbf{r}_C) \quad (1.2)$$

где  $m$  – полная масса системы,  $\mathbf{r}_C$  – радиус-вектор ее центра масс,  $\mathbf{g}$  – вектор ускорения силы тяжести. В рассматриваемом случае имеем

$$m\mathbf{r}_C = m_1\mathbf{r}_{C_1} + m_2\mathbf{r}_{C_2} \quad (1.3)$$

где  $\mathbf{r}_{C_1}$  и  $\mathbf{r}_{C_2}$  – радиусы-векторы центров масс первого и второго звеньев, соответственно, относительно точки  $O_1$ . Векторы  $\mathbf{r}_{C_1}$  и  $\mathbf{r}_{C_2}$  представляются следующим образом:

$$\mathbf{r}_{C_1} = \overrightarrow{O_1C_1}, \quad \mathbf{r}_{C_2} = \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2C_2} \quad (1.4)$$

Векторы  $\overrightarrow{O_1C_1}$  и  $\overrightarrow{O_1O_2}$  имеют следующие координатные представления в системе  $O_1x'y'$ :

$$\{\overrightarrow{O_1C_1}\}_{O_1x'y'} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{Bmatrix}, \quad \{\overrightarrow{O_1O_2}\}_{O_1x'y'} = \begin{Bmatrix} l_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.5)$$

а вектор  $\overrightarrow{O_2C_2}$  имеет представление

$$\{\overrightarrow{O_2C_2}\}_{O_2x''y''} = \begin{Bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{Bmatrix} \quad (1.6)$$

в системе координат  $O_2x''y''$ .

Вектор  $\mathbf{g}$  представляется в системе координат  $O_1XY$  следующим образом:

$$\{\mathbf{g}\}_{O_1XY} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} \quad (1.7)$$

Для вычисления скалярного произведения (1.2) приведем векторы (1.4)–(1.7) к одной системе координат, а именно к системе  $O_1xy$ . Матрицы  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  направляющих косинусов осей-систем координат  $O_1XY, O_1x'y'$  и  $O_2x''y''$  соответственно в системе  $O_1xy$  имеют вид

$$\Gamma_1 = \begin{Bmatrix} \cos \delta & \sin \delta \\ -\sin \delta & \cos \delta \end{Bmatrix}, \quad \Gamma_2 = \begin{Bmatrix} \sin q_1 & \cos q_1 \\ -\cos q_1 & \sin q_1 \end{Bmatrix} \quad (1.8)$$

$$\Gamma_3 = \begin{Bmatrix} \sin(q_1 + q_2) & \cos(q_1 + q_2) \\ -\cos(q_1 + q_2) & \sin(q_1 + q_2) \end{Bmatrix}$$

В соответствии с (1.3)–(1.8) представления векторов  $m\mathbf{r}_C$  и  $\mathbf{g}$  в системе координат  $O_1xy$  определяются следующим образом:

$$m\{\mathbf{r}_C\}_{O_1xy} = m_1\Gamma_2 \begin{Bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{Bmatrix} + m_2 \left\{ \Gamma_2 \begin{Bmatrix} l_1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \Gamma_3 \begin{Bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{Bmatrix} \right\}, \quad \{\mathbf{g}\}_{O_1xy} = \Gamma_1 \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} \quad (1.9)$$

Подставив (1.9) в (1.2), окончательно получим

$$U = g\{m_1[-a_1 \cos(q_1 + \delta) + b_1 \sin(q_1 + \delta)] + m_2[-l_1 \cos(q_1 + \delta) - a_2 \cos(q_1 + q_2 + \delta) + b_2 \sin(q_1 + q_2 + \delta)]\} \quad (1.10)$$

Непотенциальная обобщенная сила, отвечающая обобщенной координате  $q_i$  ( $i = 1, 2$ ), складывается из момента  $M_i$  и обобщенной силы  $R_{q_i}$  реакции плоскости опоры  $\Pi$ :

$$Q_{q_i} = M_i + R_{q_i} \quad (i = 1, 2) \quad (1.11)$$

Обобщенная сила  $R_{q_i}$  вычисляется по известному правилу [1]:

$$R_{q_i} = (\mathbf{F}_P, \partial \mathbf{r}_P / \partial q_i) \quad (1.12)$$

где  $\mathbf{F}_P$  – вектор силы, приложенной в точке контакта  $P$  со стороны плоскости  $\Pi$ , а  $\mathbf{r}_P$  – радиус-вектор точки  $P$  относительно точки  $O_1$ . В системе координат  $O_1xy$  векторы  $\mathbf{r}_P$  и  $\mathbf{F}_P$  представляются следующим образом:

$$\mathbf{r}_P = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} l_1 \sin q_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ -l_1 \cos q_1 - l_2 \cos(q_1 + q_2) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{F}_P = \begin{Bmatrix} F \\ N \end{Bmatrix} \quad (1.13)$$

Подставляя (1.13) в (1.12), получим

$$R_{q_1} = F[l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2)] + N[l_1 \sin q_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2)] \quad (1.14)$$

$$R_{q_2} = l_2[F \cos(q_1 + q_2) + N \sin(q_1 + q_2)]$$

После подстановки (1.10), (1.11) и (1.14) в (1.1) будем иметь уравнение равновесия двузвенника в следующем виде:

$$\begin{aligned} F[l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2)] + N[l_1 \sin q_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2)] &= -M_1 + G_1 \\ l_2[F \cos(q_1 + q_2) + N \sin(q_1 + q_2)] &= -M_2 + G_2 \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$G_1 = g\{m_1[a_1 \sin(q_1 + \delta) + b_1 \cos(q_1 + \delta)] + m_2[l_1 \sin(q_1 + \delta) + a_2 \sin(q_1 + q_2 + \delta) + b_2 \cos(q_1 + q_2 + \delta)]\} \quad (1.16)$$

$$G_2 = m_2 g[a_2 \sin(q_1 + q_2 + \delta) + b_2 \cos(q_1 + q_2 + \delta)]$$

С учетом уравнений (1.13) для координат  $x$  и  $y = -h$  точки  $P$  ( $h$  – расстояние от шарнира  $O_1$  до плоскости  $\Pi$ ) уравнения (1.15) можно представить в следующей форме

$$Fh + Nx = -M_1 + G_1 \quad (1.17)$$

$$F(h - l_1 \cos q_1) + N(x - l_1 \sin q_1) = -M_2 + G_2$$

Контакт двузвенника с опорной плоскостью  $\Pi$  налагает на систему одностороннюю связь, и нормальная реакция  $N$  может быть направлена только в сторону двузвенника, т.е.

$$N \geq 0 \quad (1.18)$$

Сила трения  $F$  и сила нормальной реакции  $N$  связаны известным неравенством

$$|F| \leq \mu N \quad (1.19)$$

выражающим закон сухого трения Кулона; здесь  $\mu$  – коэффициент трения между плоскостью  $\Pi$  и вторым звеном в точке контакта.

Система уравнений (1.15), (1.16) (или (1.17)) с неравенствами (1.18) и (1.19) есть полная совокупность условий равновесия двузвенника.

Разрешив систему уравнений (1.15), (1.16) относительно  $F$  и  $N$ , в случае  $\sin q_2 \neq 0$  получим

$$F = f_1 M_1 + f_2 M_2 + f_0$$

$$N = n_1 M_1 + n_2 M_2 + n_0$$

$$f_1 = -\frac{\sin(q_1 + q_2)}{l_1 \sin q_2}, \quad f_2 = \frac{l_1 \sin q_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2)}{l_1 l_2 \sin q_2} \quad (1.20)$$

$$n_1 = \frac{\cos(q_1 + q_2)}{l_1 \sin q_2}, \quad n_2 = -\frac{l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2)}{l_1 l_2 \sin q_2}$$

$$f_0 = \frac{l_2 G_1 \sin(q_1 + q_2) - G_2 [l_1 \sin q_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2)]}{l_1 l_2 \sin q_2}$$

$$n_0 = \frac{-l_2 G_1 \cos(q_1 + q_2) + G_2 [l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2)]}{l_1 l_2 \sin q_2}$$

Геометрически, условие  $\sin q_2 \neq 0$  означает, что двузвенник не распрямлен и не сложен.

Если  $\sin q_2 = 0$ , то уравнение (1.15) разрешимо относительно  $F$  и  $N$  только тогда, когда управляющие моменты связаны соотношением:

$$M_2 - G_2 = \frac{l_2 \cos q_2}{l_1 + l_2 \cos q_2} (M_1 - G_1) \quad (1.21)$$

Заметим, что если  $\sin q_2 = 0$ , то  $\cos q_2 = 1$  при  $q_2 = 0$  и  $\cos q_2 = -1$  при  $q_2 = \pm\pi$ . В дальнейшем случай  $\sin q_2 = 0$  рассматриваться не будет.

Тригонометрические функции, входящие в коэффициенты  $f_i$  и  $n_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ) в (1.20), можно выразить через  $x$  и  $h$ , решая систему уравнений (1.13) с учетом равенства  $y = -h$ . В результате получим [2]:

$$\begin{aligned} \sin q_1 &= \frac{x(x^2 + h^2 + l_1^2 - l_2^2) + \gamma h A}{2l_1(x^2 + h^2)} \\ \cos q_1 &= \frac{h(x^2 + h^2 + l_1^2 - l_2^2) - \gamma x A}{2l_1(x^2 + h^2)} \\ \sin(q_1 + q_2) &= \frac{x(x^2 + h^2 + l_2^2 - l_1^2) - \gamma h A}{2l_2(x^2 + h^2)} \end{aligned} \quad (1.22)$$

$$\cos(q_1 + q_2) = \frac{h(x^2 + h^2 + l_2^2 - l_1^2) + \gamma x A}{2l_2(x^2 + h^2)}$$

$$\sin q_2 = -\frac{\gamma A}{2l_1 l_2}, \quad \cos q_2 = \frac{x^2 + h^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2}$$

$$A = [2(l_1^2 + l_2^2)(x^2 + h^2) - (x^2 + h^2)^2 - (l_1^2 - l_2^2)^2]^{1/2}, \quad \gamma = \pm 1 \quad (1.23)$$

Из (1.22) вытекает, что если  $A \neq 0$ , то каждой паре допустимых значений  $x$  и  $h$  отвечают две конфигурации двузвенника, симметричные относительно прямой  $O_1P$ . Эти конфигурации соответствуют различным  $\gamma$  и отличаются знаком угла  $q_2$ :  $0 < q_1 < \pi$  при  $\gamma = -1$ ;  $-\pi < q_1 < 0$  при  $\gamma = 1$  (см. формулу (1.22) для  $\sin q_2$ ).

Если двузвенник моделирует ногу шагающего робота, то одна из конфигураций (для определенности  $\gamma = 1$ ) отвечает походке, при которой нога согнута в колене в направлении движения, а другая ( $\gamma = -1$ ) – походке с коленным сгибом, направленным против движения.

Подкоренное выражение в формуле (1.23) для  $A$  должно быть неотрицательным. Это подкоренное выражение есть квадратичная функция относительно  $x^2 + h^2$ . Корни этой функции суть  $(l_1 - l_2)^2$  и  $(l_1 + l_2)^2$  и условие неотрицательности выражается неравенствами

$$|l_1 - l_2| \leq (x^2 + h^2)^{1/2} \leq l_1 + l_2 \quad (1.24)$$

которые имеют простой геометрический смысл: расстояние от шарнира  $O_1$  до точки опоры  $P$  не может быть больше суммы или меньше модуля разности длин звеньев.

Подстановка выражений (1.22) в (1.20) позволяет выразить коэффициенты  $f_i$  и  $n_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ) в виде функций положения  $x$  точки контакта  $P$  на опорной плоскости, расстояния  $h$  от шарнира  $O_1$  до опорной плоскости, параметра  $\gamma = \pm 1$ , характеризующего тип конфигурации двузвенника, геометрических характеристик  $l_1, l_2, a_1, b_1, a_2, b_2$

звеньев, их масс  $m_1, m_2$  и угла  $\delta$  наклона опорной плоскости:  $f_i = f_i(x, h, \gamma, l_1, l_2, a_1, a_2, b_1, b_2, m_1, m_2, \delta)$ ,  $n_i = n_i(x, h, \gamma, l_1, l_2, a_1, a_2, b_1, b_2, m_1, m_2, \delta)$ .

**2. Максимизация силы трения в заданном направлении.** Поставим задачу оптимального распределения управляющих моментов, на абсолютные величины которых наложены ограничения, обеспечивающих максимальное значение силы трения  $F$  в заданном направлении при фиксированных положениях точки  $P$  на опорной плоскости и конфигурации двузвенника  $\gamma$ . Решение этой задачи позволит получить важную статическую характеристику ноги шагающего аппарата – максимальную движущую силу, которую может развить нога при определенных статических характеристиках приводов. С учетом (1.18)–(1.20) задача оптимизации формулируется следующим образом.

*Задача 2.1.* Найти моменты  $M_1$  и  $M_2$ , которые удовлетворяют ограничениям

$$|M_1| \leq M_1^0, |M_2| \leq M_2^0 \quad (2.1)$$

и обеспечивают выполнение следующих условий:

$$F = f_1 M_1 + f_2 M_2 + f_0 \geq 0 \quad (2.2)$$

$$F \leq \mu N = \mu(n_1 M_1 + n_2 M_2 + n_0) \quad (2.3)$$

$$F \rightarrow \max \quad (2.4)$$

Условие (2.2) выражает требование, чтобы сила  $F$  была направлена вдоль оси  $O_1x$  (см. фиг. 1). Выбор в качестве направления действия силы направления оси  $O_1x$  не ограничивает общности. Условие (2.3) выражает закон сухого трения Кулона (1.19); знак модуля величины  $F$  здесь опущен, поскольку  $F \geq 0$  в силу (2.2). Отметим, что из (2.2) и (2.3) вытекает неотрицательность нормальной реакции  $N \geq 0$ . Условия (2.1) выражают статические характеристики приводов – максимальные крутящие моменты, которые могут создавать двигатели в статическом режиме.

Условие (2.3) с учетом (2.2) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \mu N - F &= v_1 M_1 + v_2 M_2 + v_0 \geq 0 \\ v_1 &= \mu n_1 - f_1, \quad v_2 = \mu n_2 - f_2, \quad v_0 = \mu n_0 - f_0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Из (2.1)–(2.3) вытекает, что задача 2.1 не имеет решения, если выполняется хотя бы одно из следующих неравенств:

$$|n_1| M_1^0 + |n_2| M_2^0 + n_0 < 0 \quad (2.6)$$

$$|f_1| M_1^0 + |f_2| M_2^0 + f_0 < 0 \quad (2.7)$$

При выполнении неравенства (2.6) имеем  $N < 0$  для любых  $M_1$  и  $M_2$ , удовлетворяющих условиям (2.1). При выполнении неравенства (2.7) условие (2.2) нарушается при всех допустимых  $M_1$  и  $M_2$ .

Очевидно, что решение задачи 2.1 существует, если моменты  $M_1$  и  $M_2$ , одновременно обеспечивающие нулевые значения сил  $N$  и  $F$ , удовлетворяют неравенствам (2.1). Подставляя  $F = 0$  и  $N = 0$  в систему уравнений (1.15) или (1.17), получим

$$M_1 = G_1, \quad M_2 = G_2 \quad (2.8)$$

Таким образом, из (2.8) и (2.1) вытекает достаточное условие разрешимости задачи 2.1:

$$|G_1| \leq M_1^0, |G_2| \leq M_2^0 \quad (2.9)$$

В дальнейшем предполагается, что условия (2.9) выполнены.

С математической точки зрения задача оптимизации линейной функции (2.2) по переменным  $M_1$  и  $M_2$ , удовлетворяющим ограничениям (2.1) и (2.5), есть задача линейного программирования. Известно, что максимум в задаче линейного программирования достигается в одной из вершин многогранника, ограничивающего область допустимых значений варьируемых переменных. В рассматриваемом случае область допустимых значений варьируемых переменных – многоугольник, описываемый неравенствами (2.1) и (2.5).

Предположим сначала, что искомый максимум реализуется в одной из вершин прямоугольника (2.1), т.е. имеет место один из следующих случаев:

$$M_1 = M_1^0, \quad M_2 = M_2^0; \quad M_1 = M_1^0, \quad M_2 = -M_2^0 \quad (2.10)$$

$$M_1 = -M_1^0, \quad M_2 = M_2^0; \quad M_1 = -M_1^0, \quad M_2 = -M_2^0$$

Тогда, как следует из (2.2) и (2.5), должны выполняться группы неравенств, соответствующие четырем случаям из (2.10):

$$\begin{aligned} f_1 \geq 0, \quad f_2 \geq 0, \quad v_1 M_1^0 + v_2 M_2^0 + v_0 \geq 0 \\ f_1 \geq 0, \quad f_2 \leq 0, \quad v_1 M_1^0 - v_2 M_2^0 + v_0 \geq 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$f_1 \leq 0, \quad f_2 \geq 0, \quad -v_1 M_1^0 + v_2 M_2^0 + v_0 \geq 0$$

$$f_1 \leq 0, \quad f_2 \leq 0, \quad -v_1 M_1^0 - v_2 M_2^0 + v_0 \geq 0$$

Во всех указанных случаях имеем

$$F = |f_1| M_1^0 + |f_2| M_2^0 + f_0 \quad (2.12)$$

причем неравенство (2.5) выполняется автоматически. Очевидно, что значение  $F$  из (2.12) – абсолютный максимум линейной функции (2.2) при ограничениях (2.1). Поэтому при выполнении условий (2.11), и только при них, оптимальное распределение управляющих моментов определяется соответственно равенствами (2.10). В остальных случаях искомый максимум достигается в одной из точек пересечения квадрата (2.1) с прямой

$$v_1 M_1 + v_2 M_2 + v_0 = 0 \quad (2.13)$$

ограничивающей полуплоскостью (2.5).

Отметим, что если  $\sin q_2 \neq 0$  (т.е. двузвенник не распрямлен и не сложен), то коэффициенты  $v_1$  и  $v_2$  в (2.13) не могут обращаться в нуль одновременно. Действительно, если  $v_1 = 0$  и  $v_2 = 0$ , то, как следует из (2.5):

$$\mu n_1 - f_1 = 0, \quad \mu n_2 - f_2 = 0 \quad (2.14)$$

Совокупность равенств (2.14) можно рассматривать как систему линейных однородных уравнений:

$$n_1 y + f_1 z = 0, \quad n_2 y + f_2 z = 0 \quad (2.15)$$

имеющих ненулевое решение  $y = \mu, z = -1$ . Следовательно, определитель  $\Delta$  системы (2.15) должен равняться нулю. В соответствии с (2.15), (1.20) имеем

$$\Delta = n_1 f_2 - n_2 f_1 = -\frac{1}{l_1 l_2 \sin q_2} \neq 0$$

Следовательно, хотя бы один из коэффициентов  $v_1, v_2$  в (2.13) отличен от нуля.

Из (2.2) и (2.13) вытекает, что

$$F = \frac{f_2 v_1 - f_1 v_2}{v_1} M_2 + \frac{f_0 v_1 - f_1 v_0}{v_1}, \quad M_1 = -\frac{v_2}{v_1} M_2 - \frac{v_0}{v_1}, \quad \text{если } v_1 \neq 0 \quad (2.16)$$

$$F = \frac{f_1 v_2 - f_2 v_1}{v_2} M_1 + \frac{f_0 v_2 - f_2 v_0}{v_2}, \quad M_2 = -\frac{v_1}{v_2} M_1 - \frac{v_0}{v_2}, \quad \text{если } v_2 \neq 0 \quad (2.17)$$

С учетом (2.5), выражений (1.20) для  $f_1, f_2, n_1, n_2$  и формулы (1.22) для  $\sin q_2$  имеем

$$f_2 v_1 - f_1 v_2 = -\frac{\mu}{l_1 l_2 \sin q_2} = \frac{2\mu}{\gamma A} \quad (2.18)$$

где  $A$  определяется выражением (1.23).

Вычисляя максимум функции  $F$ , определенной соотношениями (2.16) и (2.17), при ограничениях (2.1) с учетом условий (2.9) и равенств (2.18), получим

$$F = \begin{cases} \frac{2\mu}{A|v_1|} M_2^0 + \frac{f_0 v_1 - f_1 v_0}{v_1}, & \text{если } |v_2 \operatorname{sign}(\gamma v_1) M_2^0 + v_0| \leq |v_1| M_1^0 \\ \frac{2\mu}{A|v_2|} M_1^0 + \frac{f_0 v_2 - f_2 v_0}{v_2}, & \text{если } |v_1 \operatorname{sign}(\gamma v_2) M_1^0 + v_0| \leq |v_2| M_2^0 \end{cases} \quad (2.19)$$

Управляющие моменты, реализующие максимум (2.19), определяются следующим образом:

$$M_1 = \begin{cases} -\frac{\gamma v_2}{|v_1|} M_2^0 - \frac{v_0}{v_1}, & \text{если } |v_2 \operatorname{sign}(\gamma v_1) M_2^0 + v_0| \leq |v_1| M_1^0 \\ -M_1^0 \operatorname{sign}(\gamma v_2), & \text{если } |v_1 \operatorname{sign}(\gamma v_2) M_1^0 + v_0| \leq |v_2| M_2^0 \end{cases}$$

$$M_2 = \begin{cases} M_2^0 \operatorname{sign}(\gamma v_1), & \text{если } |v_2 \operatorname{sign}(\gamma v_1) M_2^0 + v_0| \leq |v_1| M_1^0 \\ \frac{\gamma v_1}{|v_2|} M_1^0 - \frac{v_0}{v_2}, & \text{если } |v_1 \operatorname{sign}(\gamma v_2) M_1^0 + v_0| \leq |v_2| M_2^0 \end{cases} \quad (2.20)$$

Объединяя соотношения (2.11), (2.12), (2.19) и (2.20), получим окончательное решение задачи 2.1.

Если выполняется одно из четырех условий (2.11), то максимальная сила трения в точке контакта двузвенника с опорной плоскостью рассчитывается по формуле (2.12); при этом соответствующие управляющие моменты суть

$$M_1 = M_1^0 \operatorname{sign} f_1, \quad M_2 = M_2^0 \operatorname{sign} f_2 \quad (2.21)$$

В противном случае максимальная сила трения в точке контакта двузвенника с опорной плоскостью и соответствующие управляющие моменты определяются формулами (2.19) и (2.20).

Обозначим максимум силы  $F$ , полученный в результате решения задачи 2.1, через  $F_*$ . Величина  $F_*$  зависит от геометрических параметров системы, масс звеньев, типа конфигурации двузвенника и максимально допустимых значений управляющих моментов:

$$F_* = F_*(x, h, \gamma, l_1, l_2, a_1, a_2, b_1, b_2, m_1, m_2, \delta, \mu, M_1^0, M_2^0) \quad (2.22)$$

**3. Предельные соотношения и оценки (случай  $G_1 = G_2 = 0$ ).** Из (1.16) вытекает



ограниченность слагаемых  $G_1$  и  $G_2$  в правых частях уравнений равновесия (1.15) и (1.17). Имеют место оценки

$$\begin{aligned} |G_1| &\leq g[m_1\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + m_2(l_1 + \sqrt{a_2^2 + b_2^2})] = G_1^* \\ |G_2| &\leq gm_2\sqrt{a_2^2 + b_2^2} = G_2^* \end{aligned} \quad (3.1)$$

Величины  $G_1^*$  и  $G_2^*$  суть максимальные моменты силы тяжести, действующие соответственно на весь двузвенник (относительно точки  $O_1$ ) и на его второе звено (относительно точки  $O_2$ ). Из уравнений (1.15), (1.17) и оценок (3.1) вытекает, что если

$$M_1^0 \geq G_1^*, \quad M_2^0 \geq G_2^* \quad (3.2)$$

где  $M_1^0$  и  $M_2^0$  — максимально допустимые значения управляющих моментов, фигурирующие в ограничениях (2.1), то при решении задачи 2.1, рассмотренной в предыдущем разделе, можно положить  $G_1 = 0$  и  $G_2 = 0$ , что эквивалентно невесомому двузвеннику. Решение задачи 2.1 для невесомого двузвенника приведено в [2].

Несмотря на то, что формулы (2.11), (2.12), (2.19)–(2.21) дают полное аналитическое решение задачи максимизации силы трения, полезно иметь простые и наглядные оценки сверху для максимальной силы  $F$  при ограничениях (2.1) и (2.3). Такие оценки легко получить в случае невесомого двузвенника, исходя из первого уравнения (1.17), ограничения (2.1) для момента  $M_1$  и неравенства (2.3):

$$Fh + Nx = -M_1 \quad (3.3)$$

$$|M_1| \leq M_1^0 \quad (3.4)$$

$$F \leq \mu N \quad (3.5)$$

Разрешая уравнение (3.3) относительно  $F$ , получим

$$F = -(M_1 + Nx) / h \quad (3.6)$$

Подстановка (3.6) в (3.5) дает

$$M_1 + N(x + \mu h) \geq 0 \quad (3.7)$$

**Задача 3.1.** При фиксированных  $x$ ,  $h$  и  $\mu$  найти максимум функции  $F$ , определяемой формулой (3.6), по переменным  $M_1$  и  $N$  при ограничениях (3.4), (3.7).

Очевидно, что решение задачи 3.1 дает оценку сверху для решения задачи 2.1, причем эта оценка не зависит ни от длин звеньев, ни от конфигурации двузвенника, ни от максимального момента в шарнире  $O_2$ .

С математической точки зрения задача 3.1 есть задача линейного программирования. Решение этой задачи либо достигается в одной из точек пересечения прямой

$$M_1 + N(x + \mu h) = 0 \quad (3.8)$$

ограничивающей полуплоскостью (3.7) в плоскости  $NM_1$ , с прямыми  $M_1 = \pm M_1^0$ , ограничивающими область (3.4), либо не существует. В последнем случае, выбирая достаточно большие положительные  $N$ , можно получить сколь угодно большое значение  $F$ .

Если  $x \neq -\mu h$ , то прямая (3.8) пересекается с прямой  $M_1 = M_1^0$  в точке с координатами

$$M_1^+ = M_1^0, \quad N^+ = -M_1^0 / (x + \mu h) \quad (3.9)$$

а с прямой  $M_1 = -M_1^0$  – в точке с координатами

$$M_1^- = -M_1^0, \quad N^- = M_1^0 / (x + \mu h) \quad (3.10)$$

Значения максимизируемой функции (3.6) в точках (3.9) и (3.10) соответственно равны

$$F^+ = -M_1^0 \mu / (x + \mu h), \quad F^- = M_1^0 \mu / (x + \mu h) \quad (3.11)$$

Из (3.11) вытекает, что максимум функции (3.6) не может достигаться в точке (3.9), если  $x + \mu h > 0$ , и в точке (3.10), если  $x + \mu h < 0$ .

Из (3.6), (3.7) и (3.11) следует, что  $F = F^-$  при  $x > 0$  и  $F = F^+$  при  $x < -\mu h$ . В обоих этих случаях функция (3.6) монотонно убывает при удалении от точек (3.9) и (3.10) вдоль прямолинейных участков  $M_1 = \pm M_1^0$  границы множества допустимых значений переменных  $M_1$  и  $N$ , определяемого неравенствами (3.4) и (3.7).

Если  $-\mu h < x < 0$ , то решение задачи 3.1 не существует. В этом случае функция (3.6) монотонно возрастает при удалении от точек (3.9) и (3.10) вдоль прямолинейных участков  $M_1 = \pm M_1^0$  границы множества допустимых значений переменных  $M_1$  и  $N$ , и формально  $F \rightarrow \infty$ . Это означает, что информации, содержащейся в уравнениях (3.3)–(3.5), недостаточно для установления (конечной) границы сверху для решения задачи 2.1.

Если  $x = 0$ , то функция (3.6) не зависит от  $N$ , и ее максимум на множестве (3.4), (3.7), очевидно, достигается при  $M_1 = -M_1^0$  и равен  $F = M_1^0 / h$ , что соответствует  $F^-$  из (3.11) при  $x = 0$ .

Если  $x = -\mu h$ , то, как следует из (3.7), любое  $N$  является допустимым, и  $F \rightarrow \infty$  при  $N \rightarrow \infty$  при любом  $M_1$ . Следовательно, в этом случае задача 3.1 решения не имеет.

Таким образом, установлена следующая оценка сверху для силы трения между двузвенником и опорной плоскостью в точке контакта при ограничении (3.4) на управляющий момент в шарнире  $O_1$ :

$$F \leq \frac{M_1^0 \mu}{|x + \mu h|}, \quad \text{если } x \geq 0 \text{ или } x < -\mu h \quad (3.12)$$

При  $-\mu h \leq x < 0$  эффективную оценку сверху для функции  $F$  на основе соотношений (3.3)–(3.5) получить нельзя.

Из оценки (3.12) в частности следует, что если координата  $x$  точки контакта двузвенника с опорной плоскостью неотрицательна (стопа ноги робота выставлена вперед по ходу движения), то величина силы трения, приложенной ко второму звену в точке  $P$  (см. фиг. 1) и действующей в положительном направлении вдоль оси  $x$  (в направлении движения робота), всегда конечна. Если  $-\mu h \leq x < 0$ , то оценки (3.12) не исключают обращения силы трения в бесконечность при конечных управляющих моментах (явление "заклинивания").

Из решения задачи 2.1, построенного в разд. 2 в предположении, что  $\sin q_2 \neq 0$ , вытекает, что при выполнении этого неравенства сила трения  $F$  конечна. Из формулы (1.22) для  $\sin q_2$  вытекает, что  $\sin q_2$  и величина  $A$ , определяемая соотношением (1.23), обращаются в нуль при

$$x = \pm x^* = \pm \sqrt{(l_1 + l_2)^2 - h^2} \quad (3.13)$$

и при

$$x = \pm x_* = \pm \sqrt{(l_1 - l_2)^2 - h^2} \quad (3.14)$$

т.е. в случаях, когда двузвенник либо распрямлен (случай (3.13)), либо сложен (случай (3.14)).

Рассмотрим асимптотику решения задачи 2.1 при  $x \rightarrow \pm x^*$ .

Решение задачи 2.1 в случае  $G_1 = G_2 = 0$  представляется в следующем виде [2]:

$$F_* = \begin{cases} |f_1| M_1^0 + |f_2| M_2^0, & \text{если } f_1 f_2 \geq 0 \text{ и } f_1(M_1^0 v_1 + M_2^0 v_2) \geq 0 \\ & \text{или } f_1 f_2 \leq 0 \text{ и } f_1(M_1^0 v_1 - M_2^0 v_2) \geq 0 \\ \frac{2M_1^0 M_2^0 \mu}{A \max(M_1^0 |v_1|, M_2^0 |v_2|)} & \text{в противном случае} \end{cases} \quad (3.15)$$

Если  $f_1 f_2 \geq 0$  и  $f_1(M_1^0 v_1 + M_2^0 v_2) \geq 0$  или  $f_1 f_2 \leq 0$ , и  $f_1(M_1^0 v_1 - M_2^0 v_2) \geq 0$ , то

$$M_1 = M_1^0 \operatorname{sign} f_1, \quad M_2 = M_2^0 \operatorname{sign} f_2 \quad (3.16)$$

В противном случае

$$M_1 = \begin{cases} -\gamma M_2^0 v_2 / |v_1|, & \text{если } M_1^0 |v_1| \geq M_2^0 |v_2| \\ -M_1^0 \operatorname{sign}(\gamma v_2), & \text{если } M_1^0 |v_1| \leq M_2^0 |v_2| \end{cases} \quad (3.17)$$

$$M_2 = \begin{cases} M_2^0 \operatorname{sign}(\gamma v_1), & \text{если } M_1^0 |v_1| \geq M_2^0 |v_2| \\ \gamma M_1^0 v_1 / |v_2|, & \text{если } M_1^0 |v_1| \leq M_2^0 |v_2| \end{cases}$$

В формулах (3.15)–(3.17) величины  $v_1$  и  $v_2$  определяются согласно (2.5):

$$v_1 = \mu n_1 - f_1, \quad v_2 = \mu n_2 - f_2 \quad (3.18)$$

Формулы (3.15)–(3.17) получаются из (2.11), (2.12), (2.19)–(2.21) при  $f_0 = 0$ ,  $n_0 = 0$ ,  $v_0 = 0$ .

Подставляя (1.22) в (1.20), получим коэффициенты  $f_1, f_2, n_1, n_2$ , выраженные через  $x, h$  и  $\gamma$ :

$$f_1 = -\frac{hA + \gamma x(x^2 + h^2 - l_1^2 + l_2^2)}{(x^2 + h^2)A}, \quad f_2 = -\frac{2\gamma x}{A} \quad (3.19)$$

$$n_1 = -\frac{xA + \gamma h(x^2 + h^2 - l_1^2 + l_2^2)}{(x^2 + h^2)A}, \quad n_2 = \frac{2\gamma h}{A}$$

Величину  $A$ , определенную формулой (1.23), удобно представить в виде

$$A = \sqrt{(x^* - x)(x^* + x)[x^2 + h^2 - (l_1 - l_2)^2]}$$

Асимптотика функции (3.19) при  $x \rightarrow x^* - 0$  и  $x \rightarrow -x^* + 0$  имеет вид

$$f_1 = -\frac{h}{(l_1 + l_2)^2} \pm \frac{\gamma x^* l_2}{(l_1 + l_2) \sqrt{2l_1 l_2 (x^* - |x|) x^*}} + O(\sqrt{x^* - |x|})$$

$$f_2 = \mp \frac{\gamma x^*}{\sqrt{2l_1 l_2 (x^* - |x|) x^*}} + O(\sqrt{x^* - |x|}) \quad (3.20)$$

$$n_1 = \mp \frac{x^*}{(l_1 + l_2)^2} - \frac{\gamma h l_2}{(l_1 + l_2) \sqrt{2l_1 l_2 (x^* - |x|) x^*}} + O(\sqrt{x^* - |x|})$$

$$n_2 = \frac{\gamma h}{\sqrt{2l_1 l_2 x^* (x^* - |x|)}} + O(\sqrt{x^* - |x|})$$

Подставляя (3.20) в (3.15)–(3.17), получаем асимптотику решения задачи 2.1 при  $x \rightarrow x^* - 0$  и  $x \rightarrow -x^* + 0$  в случае  $G_1 = G_2 = 0$ .

Если  $x \rightarrow x^* - 0$  или одновременно выполнены условия  $x \rightarrow -x^* + 0$  и  $\mu h < x^*$ , то

$$F_* = \frac{\mu M_1^0 M_2^0}{(x^* \pm \mu h) \max \left( M_1^0 \frac{l_2}{l_1 + l_2}, M_2^0 \right)} + O(\sqrt{x^* - |x|})$$

$$M_1 = \begin{cases} -M_2^0 \frac{l_1 + l_2}{l_2} + O(\sqrt{x^* - |x|}), & \text{если } M_1^0 \frac{l_2}{l_1 + l_2} \geq M_2^0 \\ -M_1^0 + O(\sqrt{x^* - |x|}), & \text{если } M_1^0 \frac{l_2}{l_1 + l_2} \leq M_2^0 \end{cases}$$

(3.21)

$$M_2 = \begin{cases} -M_2^0 + O(\sqrt{x^* - |x|}), & \text{если } M_1^0 \frac{l_2}{l_1 + l_2} \geq M_2^0 \\ -M_1^0 \frac{l_2}{l_1 + l_2} + O(\sqrt{x^* - |x|}), & \text{если } M_1^0 \frac{l_2}{l_1 + l_2} \leq M_2^0 \end{cases}$$

Если  $x \rightarrow -x^* + 0$  и  $\mu h \geq x^*$ , то

$$F_* = \frac{x^*}{2l_1 l_2 (x^* - |x|)} \left( M_1^0 \frac{l_2}{l_1 + l_2} + M_2^0 \right) + O\left( \frac{1}{\sqrt{x^* - |x|}} \right)$$

(3.22)

$$M_1 = -M_1^0, \quad M_2 = M_2^0$$

Из соотношений (3.12), (3.15), (3.21) и (3.22) вытекает ряд важных следствий, касающихся зависимости максимальной силы трения в точке контакта двузвенника с плоскостью опоры от положения  $x$  точки опоры при оптимальном распределении управляющих моментов:

1°. Для всех  $0 < x \leq x^*$  (стопа ноги робота выставлена вперед по ходу движения) сила  $F_*$  конечна, независимо от коэффициента трения и расстояния  $h$  (клиренса) между шарниром  $O_1$  и опорной плоскостью.

2°. Если  $\mu h < x^*$ , то сила  $F_*$  конечна также и для всех  $-x^* \leq x < 0$ .

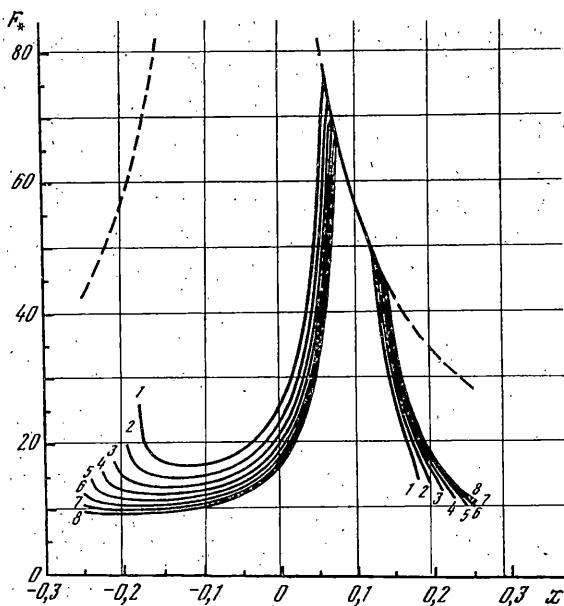
3°. Если  $\mu h \geq x^*$ , то сила  $F_*$  стремится к бесконечности по закону (3.22) при  $x \rightarrow -x^* + 0$  при любых  $M_1^0$  и  $M_2^0$ .

4°. Если  $M_1^0 l_2 \leq M_2^0 (l_1 + l_2)$ , то при  $x = x^*$  и при  $x = -x^*$  в случае  $\mu h < x^*$  сила  $F_*$  достигает верхней границы (3.12).

**4. Зависимость максимальной силы трения от параметров системы. Численное исследование.** Приведем результаты численного анализа максимальной силы (2.22), развиваемой ногой робота, звенья которой суть однородные стержни. В этом случае  $a_1 = l_1/2$ ,  $a_2 = l_2/2$ ,  $b_1 = 0$ ,  $b_2 = 0$ , и, таким образом, число независимых аргументов функции (2.22) уменьшается на четыре. При проведении расчетов полагалось

$$l_1 = 0,15 \text{ м}, \quad M_1^0 = 43 \text{ Н} \cdot \text{м} \quad (4.1)$$

Значения (4.1) отвечают параметрам ноги шагающего робота, предназначенного для перемещения в трубах, который разработан в Мюнхенском техническом университете под руководством проф. Ф. Пфайффера. Описание конструктивной схемы этого робота содержится, например, в [2–4]. Отметим, что фиксация значений (4.1) не ограничивает общности исследования, поскольку величины  $l_1$  и  $M_1^0$  имеют независимые размерности, и выбором соответствующих единиц измерения можно обеспечить



Фиг. 2

любые числовые значения этих параметров, в частности, сделать их равными единице.

На длины звеньев налагались ограничения

$$l_1 + l_2 > h \quad (4.2)$$

$$l_1 < h, \quad l_2 < h \quad (4.3)$$

Условие (4.2) необходимо для того, чтобы стопа ноги достигала плоскости опоры. Условие  $l_1 < h$  необходимо для того, чтобы при всех возможных положениях стопы

$$-x^* \leq x \leq x^*, \quad x^* = \sqrt{(l_1 + l_2)^2 - h^2} \quad (4.4)$$

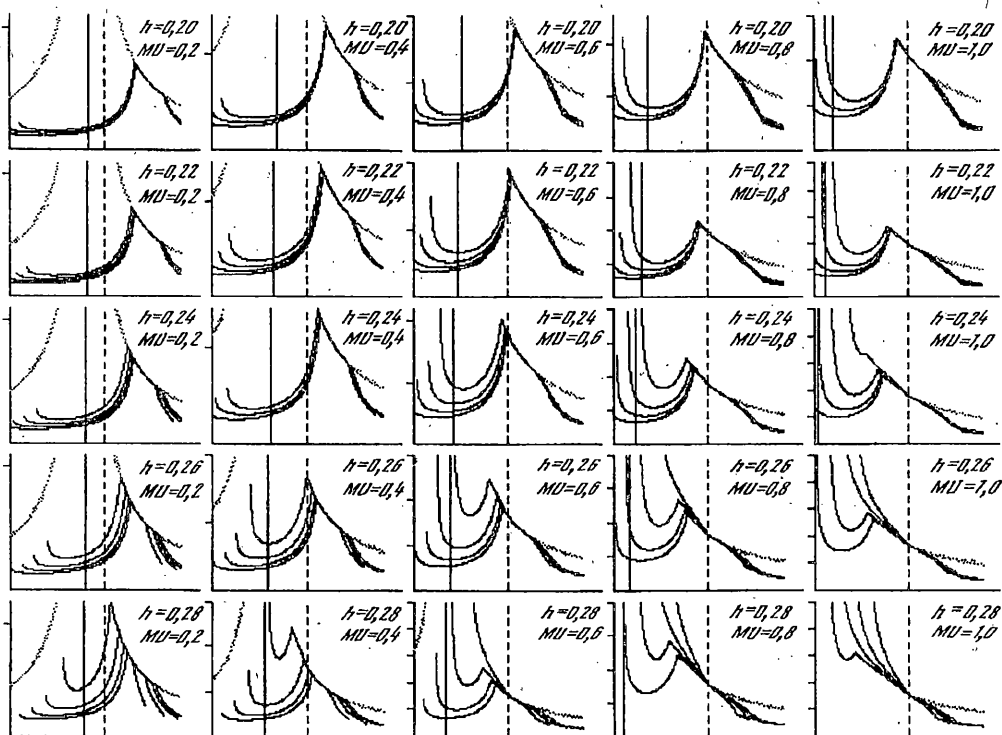
шарнир  $O_2$  находился выше опорной плоскости. В противном случае некоторые положения стопы из интервала (4.4) окажутся физически невозможными. Условие  $l_2 < h$  необходимо для того, чтобы при всех положениях стопы из отрезка (4.4) шарнир  $O_2$  лежал ниже оси  $x$  (см. фиг. 1). Это ограничение связано с тем, что у робота, упомянутого выше, ось  $x$ , построенная в соответствии с разд. 1, проходит по стенке корпуса робота. Таким образом, условия (4.2), (4.3) обеспечивают возможность движения робота с любым шагом  $s < 2x^*$ , при этом звенья ноги не будут соприкасаться ни с опорной поверхностью, ни с корпусом робота.

В ходе вычислительных экспериментов при фиксированных значениях  $M_2^0$ ,  $\delta$ ,  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $\mu$ ,  $\gamma$ ,  $h$  на одной координатной плоскости строились зависимости  $F_* = F_*(x)$  для различных  $l_2$  из интервала

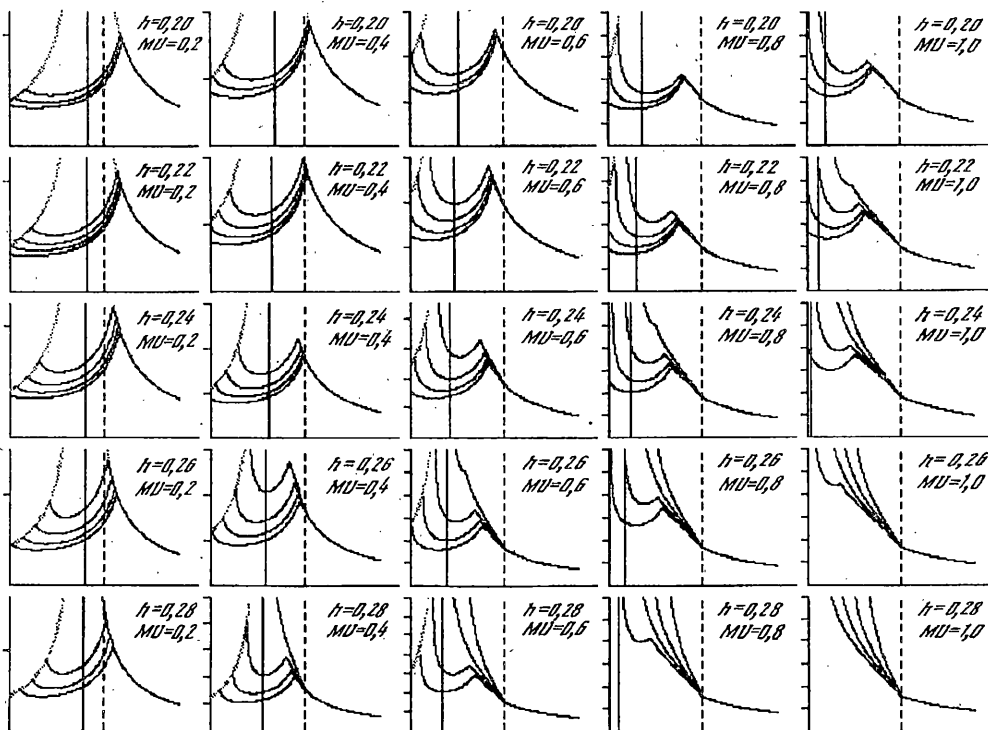
$$\max(l_1, h - l_1) \leq l_2 < h \quad (4.5)$$

В дальнейшем, при ссылке на функцию (2.22) для сокращения записи будут, как правило, опускаться аргументы, значения которых считаются фиксированными.

В результате получалась диаграмма, по которой можно судить о зависимости максимальной силы  $F_*$ , которую может развивать нога, от положения  $x$  стопы и от длины  $l_2$  второго звена. Одна из таких диаграмм приведена на фиг. 2. Она отвечает



Фиг. 3



Фиг. 4

$M_2^0 = 8,6 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ,  $m_1 = 0$ ,  $m_2 = 0$ ,  $\mu = 0,2$ ,  $\gamma = 1$ ,  $h = 0,24$ . Сплошные линии изображают графики функции  $F_*(x)$  при  $l_2 = l_1 + 0,01(i - 1)$ , где  $i = 1, 2, \dots, 8$ ; каждый график помечен соответствующим номером  $i$ . Штриховой линией показана кривая (3.12), ограничивающая сверху кривые  $F_*(x)$  для невесомого двузвенника в области  $\{x : x < -\mu h\} \cup \{x : x \geq 0\}$ .

Варьируя  $M_2^0$ ,  $\delta$ ,  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $\gamma$ ,  $h$ , получим "атлас" диаграмм, аналогичных представленной на фиг. 2. По этому атласу можно исследовать поведение функции (2.22) в зависимости от всех ее аргументов и выбрать подходящие значения параметров системы, в частности длину  $l_2$  второго звена ноги, максимальный момент  $M_2^0$  в коленном шарнире, тип конфигурации ноги  $\gamma$ , длину шага  $s$  и положение стопы в начале опорной фазы.

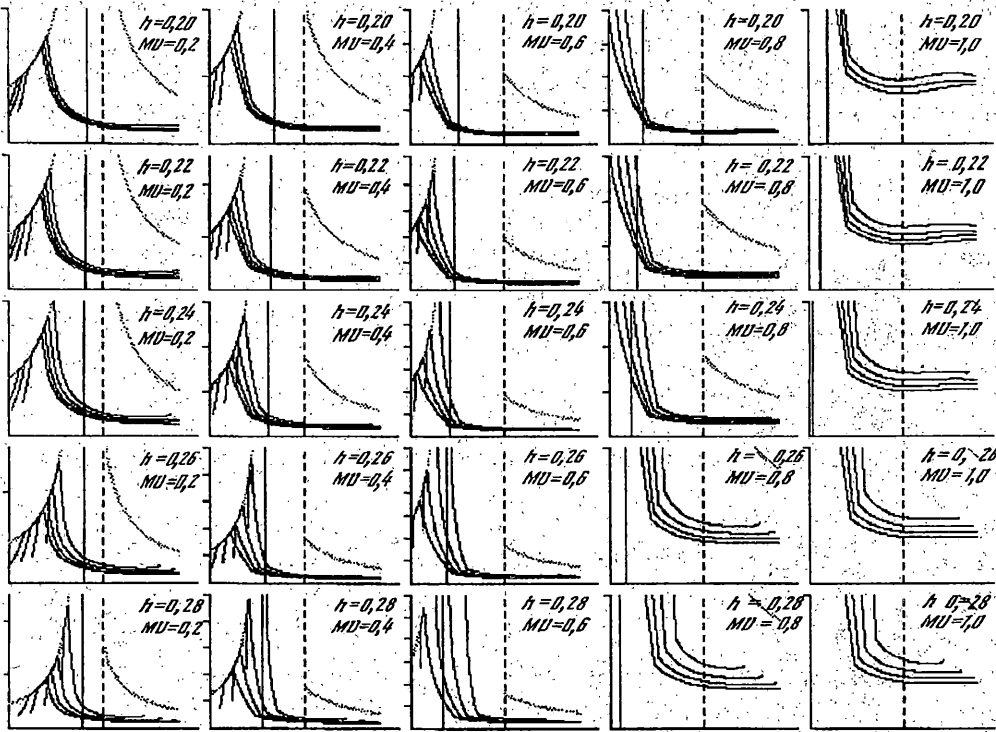
Вычислительные эксперименты позволили обнаружить ряд закономерностей в поведении кривых  $F_* = F_*(x)$  в зависимости от  $l_2$ ,  $M_2^0$ ,  $\delta$ ,  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $\mu$ ,  $\gamma$ ,  $h$ . Ниже приводятся результаты для наиболее простого случая, когда звенья невесомы ( $m_1 = m_2 = 0$ ).

На фиг. 3–6 представлены диаграммы, позволяющие судить о поведении кривых  $F_* = F_*(x)$  в зависимости от  $h$ ,  $\mu$  и  $M_2^0$  при  $\gamma = 1$  (фиг. 3, 4) и  $\gamma = -1$  (фиг. 5, 6). Диаграммы на всех этих фигурах отвечают одному и тому же набору параметров  $h$  и  $\mu$ . Фиг. 3 и 5 соответствуют  $M_2^0 = 10 \text{ Н} \cdot \text{м}$ , а фиг. 4 и 6 соответствуют  $M_2^0 = 30 \text{ Н} \cdot \text{м}$ . На каждой из диаграмм штриховая линия, параллельная оси ординат, отвечает  $x = 0$ , а сплошная линия, параллельная оси абсцисс, — значению  $x = -\mu h$ . Пунктирной линией показана ограничивающая кривая (3.12). Риски на оси ординат задают масштаб этой оси, расстояние между двумя соседними рисками отвечает интервалу в  $100 \text{ Н} \cdot \text{м}$ . Точка пересечения осей абсцисс и ординат на каждой диаграмме отвечает  $x = -0,25 \text{ м}$ ,  $F_* = 0$ . В отличие от фиг. 2, каждая диаграмма на фиг. 3–6 содержит не восемь, а четыре кривых  $F_* = F_*(x, l_2)$ , отвечающих  $l_2 = 0,15; 0,17; 0,19; 0,21 \text{ м}$ . Это сделано для того, чтобы не слишком загромождать рисунок. Обратим внимание, что на диаграммах, отвечающих  $h = 0,2 \text{ м}$ , кривых только три. Это связано с тем, что при  $l_2 = 0,21 \text{ м}$  и  $h = 0,2 \text{ м}$  нарушается ограничение (4.5).

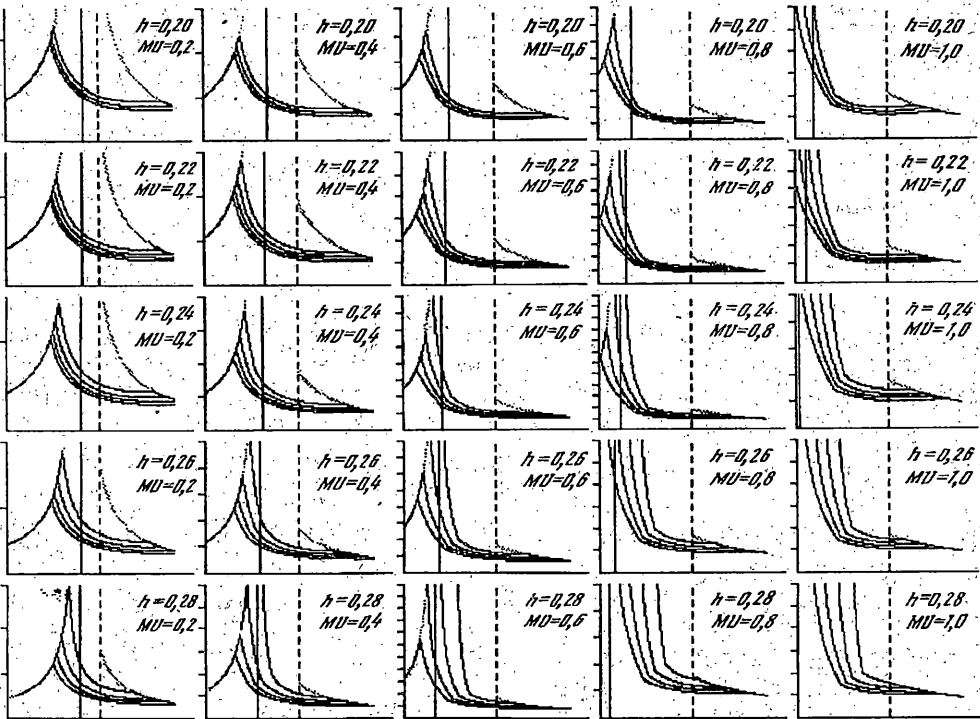
Проанализируем сначала случай  $\gamma = 1$  (колени ноги согнуто в направлении движения робота).

4.1.  $\gamma = 1$ .  $M_2^0 < M_1^0 l_2 / (l_1 + l_2)$ . Этот случай соответствует фиг. 3. Здесь характерным для всех кривых  $F_* = F_*(x)$  является следующее. При  $x = x^*$  имеем  $F_*(x^*) < M_1^0 \mu / (x^* + \mu h)$ , т.е. соответствующая точка графика функции  $F_*(x)$  лежит ниже ограничивающей кривой (3.12) согласно выводам предыдущего раздела. Функция  $F_*(x)$ , начиная от точки  $x^*$ , монотонно возрастает с уменьшением  $x$  и при некотором значении  $x_1 \geq 0$  достигает верхней границы (3.12). Отметим, что число  $x_1$  зависит от  $h$ ,  $\mu$ ,  $l_2$ ,  $M_2^0$ . Если  $x_1 > 0$ , то график функции  $F_*(x)$  на некотором интервале  $0 \leq x_2 \leq x \leq x_1$  совпадает с кривой (3.12). Возможна ситуация, когда  $x_2 > 0$  и, начиная с этой точки, при уменьшении  $x$ , функция  $F_*(x)$  "сходит" с кривой (3.12) и ее график вновь оказывается ниже ограничивающей кривой (3.12). При любых  $h$ ,  $\mu$ ,  $l_2$ , значение  $x_1$  возрастает, а значение  $x_2$  уменьшается с ростом  $M_2^0$ , т.е. интервал, на котором график функции  $F_*(x)$  лежит на кривой (3.12), расширяется. При  $M_2^0 \rightarrow M_1^0 l_2 / (l_1 + l_2)$  имеем  $x_1 \rightarrow x^*$ , в соответствии с выводами п. 3.

Левее точки  $x = \max(0, x_2)$  поведение функции  $F_*(x)$  может быть монотонным или немонотонным, в зависимости от  $h$  и  $\mu$  (см. фиг. 3). При "небольших"  $\mu$  и  $h$  типичное



Фиг. 5



Фиг. 6



поведение функции  $F_*(x)$  таково: при уменьшении  $x$  от значения  $x_1$  функция  $F_*(x)$  сначала возрастает, затем, пройдя (локальный) максимум, убывает, и затем, пройдя (локальный) минимум, вновь возрастает. Если  $\mu h < x^*$ , то, в соответствии с выводами п. 3, кривая  $F_*(x)$  "обрывается" в точке  $(-x^*, F_*(-x^*))$ , лежащей ниже ограничивающей кривой (3.12). Если  $\mu h \geq x^*$ , то кривая имеет вертикальную асимптоту  $x = -x^*$ . Отметим, что при  $M_2^0 < M_1^0 l_2 / (l_1 + l_2)$  кривая  $F_*(x)$  не соприкасается с кривой (3.12) в области  $x < -\mu h$ . Если  $\mu h < x^*$ , то  $F_*(x) \rightarrow M_1^0 \mu / |\mu h - x^*|$  при  $M_2^0 \rightarrow M_1^0 l_2 / (l_1 + l_2)$ , т.е. точка  $(-x^*, F_*(-x^*))$  ложится на кривую (3.12).

По мере увеличения  $h$  и  $\mu$  точка максимума смещается влево, а значение функции  $F_*(x)$  в точке минимума возрастает. При некоторых значениях  $\mu$  и (или)  $h$  минимум и максимум "сливаются", и при  $\mu$  и (или)  $h$ , больших этих критических значений функция  $F_*(x)$  монотонно возрастает с уменьшением  $x$  во всей области своего определения.

Опишем теперь зависимость максимальной силы трения, достижимой между двузвенником и опорной поверхностью в точке контакта, от длины  $l_2$  второго звена. Для этого рассмотрим функцию  $F_*(x, l_2)$ , представляемую семейством кривых  $F_* = F_*(x)$  при различных  $l_2 \in [l_2^-, l_2^+]$ , где  $l_2^-$  и  $l_2^+$  некоторые положительные числа, согласующиеся с ограничениями (4.5). Вычисления показывают, что на пересечении (по параметру  $l_2$ ) интервалов  $[x_1(l_2), x^*(l_2)]$ , где  $x^* = x^*(l_2)$  определяется равенством (4.4), а  $x_1 = x_1(l_2)$  — ближайшая к  $x^*$  точка соприкосновения соответствующей кривой  $F_* = F_*(x)$  с кривой (3.12), поведение функции  $F_*(x, l_2)$  существенно зависит от  $h$  и  $\mu$ . В частности, при некоторых  $h$  и  $\mu$  функция  $F_*(x, l_2)$  монотонно возрастает по  $l_2$  при всех  $x \in \bigcap_{l_2} [x_1, x^*]$  (см., например, фиг. 2). С другой стороны, существуют и такие

значения  $h$  и  $\mu$ , при которых характер функции  $F_*(x, l_2)$  по переменной  $l_2$  зависит от  $x$ . Вычисления также показывают, что имеется точка  $\tilde{x}$  (зависящая от  $h, \mu$  и  $M_2^0$ ), левее которой функция  $F_*(x, l_2)$  монотонно убывает с ростом  $l_2$ . Это означает, что при положениях стопы, отставленной достаточно далеко назад, нога с более коротким вторым звеном позволяет развить большее усилие в направлении движения.

4.2.  $\gamma = 1$ .  $M_2^0 \geq M_1^0 l_2 / (l_1 + l_2)$ . Этот случай соответствует фиг. 4. Качественный характер поведения семейства функций  $F_* = F_*(x, l_2)$  во многих чертах совпадает со случаем 4.1. Однако имеются и существенные особенности. В отличие от случая 4.1, в случае 4.2 имеет место равенство  $F_*(x^*) = M_1^0 \mu / (\mu h + x_*)$ . В терминах случая 4.1 это означает, что  $x_1(l_2) = x^*(l_2)$ , т.е. при выставлении стопы на максимально возможное расстояние вперед максимальная сила трения, отвечающая этому положению стопы, достигает верхней границы, определяемой неравенством (3.12).

Если  $\mu h < x^*$ , то такая же ситуация имеет место и при положении стопы, отставленной на максимальное расстояние назад, т.е.  $F_*(-x^*) = M_1^0 \mu / (x^* - \mu h)$ . При возрастании  $x$  от значения  $-x^*$ , график функции  $F_*(x)$  следует кривой (3.12) до некоторой точки  $x = x_3(l_2) < -\mu h$ , а затем "сходит" с этой кривой. Значение  $x_3(l_2)$  возрастает с уменьшением  $l_2$ .

Существенно, что при увеличении  $M_2^0$  точка  $x_2(l_2)$ , в которой график функции сходит с кривой (3.12) при уменьшении  $x$  от значения  $x^*$ , смещается влево, достигая значения  $x = 0$  при некотором  $M_2^0$ , зависящем, вообще говоря, от  $l_2$ . Аналогично, точка  $x_3(l_2)$  смещается вправо. Отсюда вытекает, что для заданного диапазона воз-

возможных значений  $l_2 \in [l_2^-, l_2^+]$  с возрастанием  $M_2^0$  расширяется область значений  $x$ , при которых функция  $F_*(x)$  достигает верхней границы (3.12) и не зависит ни от  $l_1$ , ни от  $l_2$  (при фиксированных значениях остальных параметров). В частности, при достаточно больших  $M_2^0$  равенство  $F_*(x) = M_1^0 \mu / (\mu h + x)$  имеет место для всех  $x \geq 0$ .

Вычисления показывают, что в случае  $\gamma = 1$  с увеличением  $h$  (при фиксированных  $\mu$  и  $M_2^0$ ) возрастает чувствительность силы  $F_*(x, l_2)$  к изменению длины  $l_2$ .

Рассмотрим теперь случай  $\gamma = -1$ , когда колено ноги согнуто в направлении, противоположном направлению движения.

4.3.  $\gamma = -1$ ,  $M_2^0 < M_1^0 l_2 / (l_1 + l_2)$ . Этот случай соответствует фиг. 5. Здесь поведение графика функции  $F_*(x)$  имеет следующие характерные особенности.

Если  $\mu h > x_*$ , то кривая  $F_* = F_*(x)$  имеет вертикальную асимптоту  $x = -x_*$  ( $F_*(x) \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow -x_*$ ), в соответствии с выводами предыдущего раздела. Кривые  $F_* = F_*(x)$  при  $\mu h > x_*$  всюду лежат ниже ограничивающей кривой (3.12). Вычисления показывают, что функция  $F_*(x)$  довольно слабо зависит от  $x$  при  $x > 0$ . Если  $\mu h > x_*$ , то функция  $F_*(x, l_2)$  монотонно убывает с ростом  $l_2$  при всех допустимых  $x$ , т.е. нога с более коротким вторым звеном позволяет развивать большее усилие.

Если  $\mu h < x_*$ , то в области  $x \geq -\mu h$  поведение кривых  $F_* = F_*(x)$  качественно не отличается от поведения в случае  $\mu h > x_*$ , за исключением того, что нигде не происходит "ухода на бесконечность". В области  $-x^* \leq x < -\mu h$  поведение кривых  $F_* = F_*(x)$  сложнее. Точка  $(-x^*, F_*(-x^*))$ , отвечающая стопе ноги, максимально отставленной назад, лежит ниже ограничивающей кривой (3.12). При увеличении  $x$  функция  $F_*(x)$  монотонно возрастает и при некотором  $x = x^{(1)}$  достигает верхней границы (3.12). На некотором интервале  $x^{(1)} \leq x \leq x^{(2)} < -\mu h$  график функции совпадает с кривой (3.12). В точке  $x = x^{(2)}$  функция  $F_*(x)$  достигает максимума. При  $x^{(2)} < x < -\mu h$  функция  $F_*(x)$  монотонно убывает. Напомним, что характерные точки  $x^{(1)}$  и  $x^{(2)}$  кривой  $F = F_*(x)$  зависят от параметров  $l_2, \mu, h, M_2^0$ . С увеличением  $M_2^0$  точка  $x^{(1)}$  смещается влево, а  $x^{(2)}$  — вправо, т.е. интервал, на котором сила  $F_*$  достигает верхней границы, расширяется. С увеличением  $l_2$  обе точки  $x^{(1)}$  и  $x^{(2)}$  смещаются влево.

4.4.  $\gamma = -1$ ,  $M_2^0 \geq M_1^0 l_2 / (l_1 + l_2)$ . Этот случай соответствует фиг. 6. Основное отличие от случая 4.3 состоит в том, что при выставлении стопы вперед на максимальное расстояние  $x^*$  сила  $F_*(x^*)$  достигает верхней границы, определяемой кривой (3.12). Если  $\mu h < x^*$ , то сила трения достигает верхней границы и при  $x = -x^*$ , т.е. соответствующая точка  $(-x^*, F_*(-x^*))$  лежит на кривой (3.12). Более того, существует точка  $x^{(3)}$ , такая что при всех  $x \in [x^{(3)}, x^*]$  график функции  $F_*(x)$  лежит на кривой (3.12), а если  $x^* > \mu h$ , то график функции  $F_*(x)$  лежит на кривой также при  $x \in [-x^*, x^{(2)}]$ , где  $x^{(2)}$  — точка схода кривой  $F = F_*(x)$  с ограничивающей кривой (3.12) при увеличении  $x$  от значения  $-x^*$ .

С ростом  $M_2^0$  точка  $x^{(3)}$  смещается влево до положения  $x^{(3)} = 0$ , а точка  $x^{(2)}$  смещается вправо при любом наборе параметров  $h, \mu, l_2$ . Таким образом, множество положений стопы, при котором сила трения между стопой и опорной поверхностью достигает верхней границы (3.12), расширяется с ростом  $M_2^0$ . На этом множестве сила  $F_*(x)$  не зависит явно ни от  $l_1$ , ни от  $l_2$ .

**5. Заключение.** Исследования выявили весьма сложную зависимость максимальной силы, развиваемой двузвенной ногой в статическом режиме, от соотношения длин

звеньев и соотношения максимально допустимых моментов в шарнирах. В частности, при некоторых положениях стопы на опорной поверхности максимальная сила может возрастать с увеличением длины второго звена, а на других – уменьшаться.

Характер зависимости максимальной силы, развиваемой двузвенной ногой, от положения стопы, длин звеньев и других параметров системы существенным образом определяется типом конфигурации ноги (параметр  $\gamma$ ) и параметром  $\kappa = M_2^0(l_1 + l_2) / M_1^0 l_2$ .

Если  $\kappa \geq 1$ , то при любых положениях стопы максимальная сила, развиваемая ногой, не возрастает с увеличением длины второго звена.

Максимальное (по всем допустимым положениям стопы при фиксированных значениях конструктивных параметров) значение силы, развиваемой ногой, больше, если нога согнута в колене в направлении, противоположном направлению движения ( $\gamma = -1$ ). Однако интервал значений координаты стопы, на котором сила, развиваемая ногой, больше при  $\gamma = -1$ , чем при  $\gamma = 1$ , меньше интервала, на котором выполняется обратное соотношение. В частности, если стопа выставлена вперед (по отношению к проекции тазобедренного сустава на опорную поверхность), то большее значение силы достигается при  $\gamma = 1$ .

Если нога не распрямлена (т.е. стопа не находится в граничных точках интервала допустимых положений), то развиваемая сила конечна при любых конечных значениях моментов в шарнирах. Если нога распрямлена при максимальном выставлении стопы вперед, то сила также везде конечна. При распрямлении ноги с максимальным выставлением стопы назад сила остается конечной, если выполнено неравенство  $\mu h < \sqrt{(l_1 + l_2)^2 - h^2}$ , где  $\mu$  – коэффициент трения между стопой и опорной поверхностью,  $l_1$  и  $l_2$  – длины звеньев, а  $h$  – расстояние от тазобедренного сустава до опорной поверхности; если  $\mu h \geq \sqrt{(l_1 + l_2)^2 - h^2}$ , то максимальная сила, развиваемая ногой, стремится к бесконечности при любых конечных значениях максимально допустимых управляющих моментов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-01-01142).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. М.: Физматгиз, 1960. 296 с.
2. Болотник Н.Н., Черноусько Ф.Л. Оптимизация параметров шагающего робота для движения в трубах // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 6. С. 27–41.
3. Болотник Н.Н., Костин Г.В., Черноусько Ф.Л. Моделирование и оптимизация шагающего робота в трубе // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 3. С. 176–191.
4. Pfeiffer F., Rossmann T., Chernousko F.L., and Bolotnik N.N. Optimization of structural parameters and gaits of a pipe-crawling robot // IUTAM Symposium on Optimization of Mechanical Systems, Kluwer Academic Publishers: Dordrecht, 1995. P. 231–238.

Москва

Поступила в редакцию  
21.VI.1996