

УДК 531.8

© 1997 г. В.Г. ВЕРБИЦКИЙ, Л.Г. ЛОБАС

**БИФУРКАЦИИ СТАЦИОНАРНЫХ СОСТОЯНИЙ  
МНОГОЗВЕННЫХ СИСТЕМ С КАЧЕНИЕМ**

Рассматривается цепная система, состоящая из ведущего и произвольного количества ведомых звеньев, соединенных последовательно и движущихся плоскопараллельно с постоянной скоростью. Показано, что при удержании лишь главных частей нелинейностей задача о стационарных состояниях может быть сведена в общем случае к анализу двух конечных уравнений. Исследованы бифуркационные множества стационарных состояний двухзвенных систем. Принадлежность последних к подклассу динамических систем с симметрией объясняется возможностью реализации особенности типа "бабочка" в трехпараметрическом семействе стационарных состояний.

**1. Постановка задачи.** Пусть система состоит из двухосного ведущего и  $n$  одноосных ведомых звеньев (на фиг. 1,  $n = 3$ ). Взаимодействие катящихся колес с опорной плоскостью будем описывать в рамках аксиоматики [1] с учетом нелинейной зависимости боковых реакций  $Y_j$  от углов увода  $\delta_j$ . Абсолютная ориентация звеньев определяется курсовыми углами  $\vartheta, \vartheta_1, \dots, \vartheta_n$ , относительная ориентация ведомых звеньев – углами складывания  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ . Обозначим через  $C, C_k, m, m_k, I = I_{CZ_0}, I_k = I_{C_k Z_k}, \omega = \dot{\vartheta}, \omega_k = \dot{\vartheta}_k$  центры масс, массы, центральные моменты инерции относительно соответствующих вертикальных осей и абсолютные угловые скорости ведущего и ведомых звеньев;  $l = a + b = BA$  – база ведущего звена;  $L_k = b_k + d_k = B_k O_k$  – база  $k$ -ведомого звена ( $k = 1, \dots, n$ );  $c = O_1 C$ ;  $c_s = O_{s+1} C_s, l_s = c_s + d_s = O_{s+1} O_s (s = 1, \dots, n-1)$ ;  $i_0, j_0$  – орты осей  $x_0, y_0$ ;  $i_k, j_k$  – орты осей  $x_k, y_k$ ;  $x, y$  – абсцисса и ордината точки  $C$  в инерциальной системе координат  $Oxyz$ . Зададим абсолютные скорости точек  $C$  и  $C_k$  разложениями по ортам соответствующих базисов

$$\begin{aligned} v_C &= i_0 v + j_0 u, \quad v = \dot{x} \cos \vartheta + y \sin \vartheta, \quad u = -x \sin \vartheta + \dot{y} \cos \vartheta \\ v_{C_k} &= i_k v_k + j_k u_k, \quad v_k = v \cos \alpha_k + (u - \omega c) \sin \alpha_k + \\ &+ \omega \sum_{s=1}^{k-1} l_s \sin \beta_{sk} - \sum_{j=1}^{k-1} \dot{\varphi}_j \sum_{s=j}^{k-1} l_s \sin \beta_{sk} \\ u_k &= v \sin \alpha_k + (u - \omega c) \cos \alpha_k - \omega \sum_{s=1}^{k-1} l_s \cos \beta_{sk} + \sum_{j=1}^{k-1} \dot{\varphi}_j \sum_{s=j}^{k-1} l_s \cos \beta_{sk} - d_k \omega_k \\ \alpha_k &= \varphi_1 + \dots + \varphi_k, \quad \beta_{sk} = \varphi_{s+1} + \dots + \varphi_k, \quad \omega_k = \omega - \dot{\alpha}_k. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Суммировать здесь необходимо лишь по неубывающим последовательностям индексов, в двойных суммах сначала раскрывается сумма, встречающаяся первой по



звеньев относительно вертикальных осей, проходящих через точки сцепок впереди идущих звеньев

$$\begin{aligned} Y'_{n+2} &= J'_n, \quad Y'_{n+1} = J'_{n-1} - Y'_{n-1} l_{n-1} / d_{n-1}, \dots, \quad Y_3 = J'_1 - Y'_1 l_1 / d_1 \\ Y'_{n-1} &\equiv J_n \sin \varphi_n, \quad Y'_{n-2} \equiv -Y'_{n-1} C_{n-1} d_{n-1}^{-1} \cos \varphi_{n-1} + (J_n \cos \varphi_n + J_{n-1}) \sin \varphi_{n-1}, \\ Y'_{n-3} &\equiv -Y'_{n-2} C_{n-2} d_{n-2}^{-1} \cos \varphi_{n-2} + [(J_n \cos \varphi_n + J_{n-1}) \cos \varphi_{n-1} + J_{n-2}] \sin \varphi_{n-2}, \dots \end{aligned} \quad (2.1)$$

получим для поперечной составляющей  $Y' = \mathbf{j}_0 Y'$  силы, приложенной в точке  $O_1$ , следующее выражение:

$$\begin{aligned} Y' &= \omega \sum_{k=1}^n (-1)^k U_k \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \dots \cos \varphi_{k-1} \sin \varphi_k \\ U_k &= \frac{c_1 c_2 \dots c_{k-1}}{d_1 d_2 \dots d_{k-1}} (m_k u_k + m_{k+1} u_{k+1} \cos \varphi_{k+1} + \dots + m_n u_n \cos \varphi_{k+1} \cos \varphi_{k+2} \dots \cos \varphi_n) \end{aligned}$$

Найдем главную часть разложения нелинейной функции  $Y'(\omega, u, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $(0, 0, \dots, 0) \in R^{n+2}$ . Имеем

$$Y' = \omega \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{c_1 c_2 \dots c_{k-1}}{d_1 d_2 \dots d_{k-1}} (m_k u_k + m_{k+1} u_{k+1} + \dots + m_n u_n) \varphi_k + O(|\mathbf{x}|^5) \quad (2.2)$$

Из (1.1) получаем

$$v_k = v + O(|\mathbf{x}|^2), \quad u_k = v (\varphi_1 + \dots + \varphi_k) + u - \omega (c + d_k + l_1 + l_2 + \dots + l_{k-1}) + O(|\mathbf{x}|^3) \quad (2.3)$$

Согласно (1.2)  $\delta_{k+2} = -u_k v^{-1} + O(|\mathbf{x}|^3)$ . Из (2.1) следует, что в стационарном движении

$$u_s = -m_s k_{s+2}^{-1} v^2 \omega + O(|\mathbf{x}|^3) \quad (s = 1, \dots, n) \quad (2.4)$$

причем  $k_j = dY_j(0) / d\delta_j$  – приведенные коэффициенты сопротивления боковому выводу колесных осей. Выражение (2.2) принимает вид

$$Y' = v^2 \omega^2 \sum_{s=1}^n (-1)^{s+1} \frac{c_1 c_2 \dots c_{s-1}}{d_1 d_2 \dots d_{s-1}} \left( \frac{m_s^2}{k_{s+2}} + \frac{m_{s+1}^2}{k_{s+3}} + \dots + \frac{m_n^2}{k_{n+2}} \right) \varphi_s + O(|\mathbf{x}|^5) \quad (2.5)$$

Учитывая (2.4), из (2.3) находим

$$\varphi_1 = -u v^{-1} + [(c - d_1) v^{-1} - m_1 v k_3] \omega + O(|\mathbf{x}|^3) \quad (2.6)$$

$$\varphi_i = [(c_{i-1} + d_i) v^{-1} + v (m_{i-1} k_{i+1}^{-1} - m_i k_{i+2}^{-1})] \omega + O(|\mathbf{x}|^3) \quad (i = 2, \dots, n)$$

Подставив (2.6) в (2.5), получим

$$Y' = Y'(u, \omega) + \dots \quad (2.7)$$

Здесь многоточием обозначены члены выше третьего порядка.

Наличие выражения (2.7) позволяет утверждать, что при сохранении лишь членов не выше третьего порядка задачу о стационарных движениях  $(n + 1)$ -звенной системы можно привести к задаче о стационарных состояниях одного ведущего звена, на которое в точке  $O_1$  действует сила  $Y' = \mathbf{j}_0 Y'$ , причем  $Y'$  имеет вид (2.7). Эти уравнения суть

$$\begin{aligned} -m v \omega + Y_1(\delta_1) + Y_2(\delta_2) + Y' &= 0 \\ a Y_1(\delta_1) - b Y_2(\delta_2) - c Y' &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Так как  $\delta_i = \delta_i(u, \omega)$ , то при отбрасывании в  $Y'$  членов выше третьего порядка уравнения (2.8) образуют независимую подсистему для определения стационарных значений переменных  $u$  и  $\omega$ .

**3. Бифуркационные множества стационарных состояний двухзвенных систем.** Для  $n = 1$  имеем

$$Y' = m_1^2 k_3^{-1} v [-u + (c + d_1 - m_1 v^2 k_3^{-1}) \omega] \omega^2 + \dots$$

При стационарном движении двухзвенника  $u = (b - mav^2 k_2^{-1} l^{-1}) \omega^4 + \dots$ , поэтому

$$Y' = hv m_1^2 k_3^{-1} \omega^3 + O(\omega^5), \quad h = c + d_1 - b + (mak_2^{-1} l^{-1} - m_1 k_3^{-1}) v^2$$

Переходя от переменных  $\omega, u$  к переменным  $\delta_1, \delta_2$  и обозначая

$$Y_i = k_i \delta_i - k_i' \delta_i^3 + \dots, \quad k_i' = k_i^3 (2G_i^2 \varphi_i^2)^{-1}, \quad G_1 = mgb_0, \quad G_2 = mga_0$$

$$a_0 = al^{-1}, \quad b_0 = bl^{-1}, \quad \kappa_i = k_i G_i^{-1}, \quad \kappa_i' = k_i' G_i^{-1}, \quad G_3 = m_1 g, \quad Y_*' = Y'(mg)^{-1}$$

запишем уравнения (2.8) в виде

$$-v g^{-1} \omega + \kappa_1 b_0 \delta_1 + \kappa_2 a_0 \delta_2 - \kappa_1' b_0 \delta_1^3 - \kappa_2' a_0 \delta_2^3 + Y_*' + O(|x|^5) = 0 \quad (3.1)$$

$$\kappa_1 \delta_1 - \kappa_2 \delta_2 - \kappa_1' \delta_1^3 + \kappa_2' \delta_2^3 - ca_0^{-1} b^{-1} Y_*' + O(|x|^5) = 0$$

$$Y_*' = \alpha l^3 v^{-3} \omega^3 + O(\omega^5), \quad \alpha = m_1 v^4 (m \kappa_3 g^2 l^3)^{-1} \times$$

$$\times [v^2 (\kappa_2 \kappa_3 g)^{-1} (\kappa_3 - \kappa_2) + c + d_1 - b], \quad (3.2)$$

$$\omega = vl^{-1} [\theta - \delta_1 + \frac{1}{3} (\theta - \delta_1)^3 + \delta_2 + \frac{1}{3} \delta_2^3 + O(|x|^5)]$$

где  $\Psi_i$  — коэффициенты сцепления.

Стационарным состояниям двухзвенника отвечают на опорной плоскости прямолинейные и круговые траектории. Критическая скорость прямолинейного движения ( $\theta = 0$ ) определяется выражением [4, (1.15)], которое в рассматриваемом случае ( $b_1 = 0$ ) принимает вид  $v_+^2 = \kappa_1 \kappa_2 g l (\kappa_1 - \kappa_2)^{-1}$ . Значение  $v_+$  можно получить также, приравняв нулю якобиан системы (3.1) в точке  $\delta_1 = 0, \delta_2 = 0$ . При  $v > v_+$  движение неустойчиво, так как собственное значение  $\lambda_1$  матрицы линеаризованных уравнений возмущенного движения положительно. Если  $v = v_+$ , то  $\lambda_1 = 0$ , т.е. вопрос устойчивости решается членами третьего порядка.

Согласно [5] потеря устойчивости прямолинейного движения может быть вызвана либо бифуркацией рождения кратной особой точки в начале координат фазовой плоскости  $\delta_1 \delta_2$ , либо бифуркацией слияния особых точек. Диаграмма стационарных состояний в этом случае имеет форму трезубца, поэтому соответствующая бифуркация носит различные названия: типа узел-седло [3], бифуркация типа вилки [6] и др.

Поскольку при  $v = v_+$  многообразие стационарных состояний имеет трехкратную особую точку, то в соответствии с геометрической теорией особенностей [7] оно описывается структурно устойчивыми особенностями типа обобщенной сборки Уитни [7, 8]. Смена характера устойчивости особой точки (и характера опасности границы области устойчивости [9]) происходит с изменением ее кратности, что сопряжено с реализацией особенности более высокого порядка. В динамических системах с простейшей симметрией (1.3) изменение характера устойчивости решения  $x = 0$  связано с особенностями сборки, бабочки и т.д. (нечетная кратность особой точки). При этом сокращается размерность пространства параметров, в которых они реализуются: бабочка, например, может устойчивым образом реализоваться (как показано ниже) в трехмерном пространстве параметров  $v, \theta, d_1$ .

Бифуркационное множество в малой окрестности точки возврата  $\theta = 0$ ,  $\nu = \nu_+$  плоскости  $\theta\nu$  описывается полукубической параболой. Покажем, что ее аналитическое представление может быть получено путем сведения системы двух уравнений стационарных состояний (3.1) к уравнению третьей степени от одной переменной и определением его дискриминанта. Заметим, что в [2, с. 103] и [10, с. 254] изображена (без аналитического описания) бифуркационная кривая, имеющая точку возврата и такую же конфигурацию, как и полукубическая парабола.

Устойчивость движения со скоростью  $\nu = \nu_+$  определяется первым ненулевым ляпуновским коэффициентом [11], знак которого противоположен знаку разности  $d_1 - d_1^*$ , где

$$d_1^* = b - c + m\kappa_+^4 (2m_1\kappa_1\kappa_2g^2l)^{-1} (\kappa_1\psi_2^{-2} - \kappa_2\psi_1^{-2}) [1 + c(\kappa_1b + \kappa_2a)(\kappa_1 - \kappa_2)^{-1}(ab)^{-1}]^{-1} - \\ - \nu_+^2 (\kappa_3 - \kappa_2)(\kappa_2\kappa_3g)^{-1} + m\kappa_+^2 (\kappa_1^2 + \kappa_+\kappa_2 + \kappa_2^2) \times \\ \times \{3m_1g\kappa_1^2\kappa_2^2 [1 + c(\kappa_1b + \kappa_2a) \times (\kappa_1 - \kappa_2)^{-1}(ab)^{-1}]\}^{-1} \quad (3.3)$$

Последнее слагаемое в (3.3) порождено кубическими членами в выражении (3.2) для  $\omega$  и значительно меньше предыдущих слагаемых, поэтому количественные поправки в условия устойчивости, вносимые им, можно не учитывать. Если  $d_1 < d_1^*$ , то начало координат фазового пространства является неустойчивой особой точкой уравнений возмущенного движения, в нем происходит бифуркация слияния, а граница  $\nu = \nu_+$  области устойчивости в пространстве параметров опасная. При  $d_1 > d_1^*$  движение устойчиво, в начале координат происходит бифуркация рождения, граница  $\nu = \nu_+$  безопасная.

Найдем бифуркационное множество стационарных состояний двухзвенника при  $\theta \neq 0$ . Обозначив  $Y_i^* = Y_i G_i^{-1}$ , запишем уравнения (2.8) или (3.1) так

$$-\nu^2 (gl)^{-1} (\theta - \delta_1 + \delta_2) + Y_1^* b_0 + Y_2^* a_0 + \alpha (\theta - \delta_1 + \delta_2)^3 + \dots = 0 \\ Y_1^* - Y_2^* - ca_0^{-1} b^{-1} \alpha (\theta - \delta_1 + \delta_2)^3 + \dots = 0 \quad (3.4)$$

Приведем второе уравнение системы (3.4) к уравнению с разделенными переменными, заменив его следующей комбинацией:

$$-\nu^2 c_1 (bg)^{-1} (\theta - \delta_1 + \delta_2) + c_2 Y_1^* - c_3 Y_2^* + \dots = 0 \\ (c_1 = ca^{-1}, \quad c_2 = 1 + c_1, \quad c_3 = 1 - cb^{-1})$$

Введем новую переменную

$$Y = \nu^2 c_1 (bg)^{-1} \delta_1 + c_2 Y_1^* (\delta_1) = \nu^2 c_1 (bg)^{-1} (\theta + \delta_2) + c_3 Y_2^* (\delta_2)$$

Выражая  $\delta_1$  и  $\delta_2$  через  $Y$  и удерживая члены до третьего порядка включительно, получим

$$[\beta_2' c_3^{-1} - \beta_1' c_2^{-1} - \alpha gl \nu^{-2} (\beta_2 - \beta_1)^3] Y^3 + (\beta_2 c_3^{-1} - \beta_1 c_2^{-1} - gl \nu^{-2} c_2^{-1} c_3^{-1}) Y + \\ + (1 - \nu^2 \beta_2 c_1 b^{-1} g^{-1}) c_3^{-1} \theta + \dots = 0 \quad (3.5)$$

$$\beta_1 = (\nu^2 c_1 b^{-1} g^{-1} + \kappa_1 c_2)^{-1}, \quad \beta_2 = (\nu^2 c_1 b^{-1} g^{-1} + \kappa_2 c_3)^{-1}$$

$$\beta_1' = \frac{1}{2} \kappa_1^3 c_2 \beta_1^4 \psi_1^{-2}, \quad \beta_2' = \frac{1}{2} \kappa_2^3 c_3 \beta_2^4 \psi_2^{-2}$$

Условие, при котором из трех действительных корней уравнения (3.5) два совпадают, имеет вид

$$\theta^2 = \gamma w^3 + o(w^3) \quad (3.6)$$

$$w = v_+^2 v_0^{-2} - 1, \quad \gamma = \frac{4}{27} c_3^2 (1 - c_1 v_+^2 \beta_3 g^{-1} b^{-1})^{-2} \times \alpha_1^{-3} \beta^{-1}$$

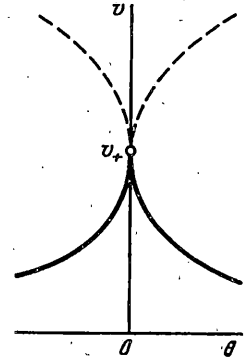
$$\beta_3 = (v_+^2 c_1 b^{-1} g^{-1} + \kappa_2 c_3)^{-1}, \quad \alpha_1 = v_+^4 c_1^2 (bg)^{-2} +$$

$$+ v_+^2 c_1 (bg)^{-1} (\kappa_1 c_2 + \kappa_2 c_3) + \kappa_1 \kappa_2 c_2 c_3,$$

$$\beta = (\kappa_1 - \kappa_2) (ab)^4 (\kappa_1 \kappa_2)^{-1} [\kappa_1 b(a+c) - \kappa_2 a(b-c)]^{-4} \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{2} (\kappa_1 \Psi_2^{-2} - \kappa_2 \Psi_1^{-2}) - \alpha (\kappa_1 - \kappa_2)^4 (\kappa_1 \kappa_2)^{-3} \times \right.$$

$$\left. \times [1 + c_1 b^{-1} (\kappa_1 b + \kappa_2 a) (\kappa_1 - \kappa_2)^{-1}] \right\}$$



Фиг. 2

Здесь через  $v_0$  обозначено критическое значение скорости кругового движения двухзвенника для заданного  $\theta$ . Знак  $\gamma$  зависит от величины  $d_1$ : если  $d_1 \leq d_1^*$ , то  $\gamma \geq 0$ . Кривая (3.6) в окрестности точки  $(0, v_+)$  показана на фиг. 2 сплошной линией

при  $d_1 < d_1^*$  и штриховой при  $d_1 > d_1^*$ . При увеличении  $d_1$  и прохождении через значение  $d_1^*$ , определяемое формулой (3.3), происходит перестройка сборки в двойственную ей (переход к безопасности участка границы области устойчивости).

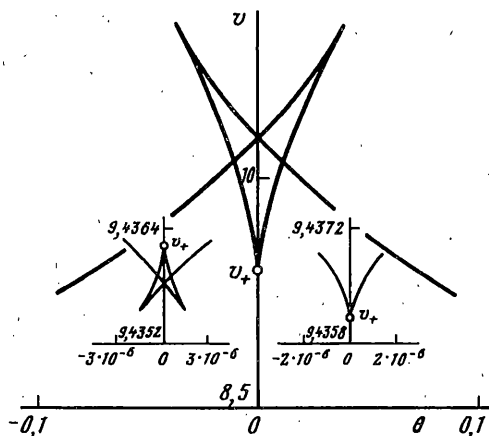
Рассмотрим вопрос ориентирования ведомого звена относительно ведущего при круговом движении. Для угла складывания имеем выражение  $\phi_1 = hv^{-1}\omega + O(\omega^3)$ . Пусть, например,  $c + d_1 - b > 0$ ,  $\kappa_2 - \kappa_3 > 0$ . Обозначим  $v_*^2 = \kappa_2 \kappa_3 g (\kappa_2 - \kappa_3)^{-1} (c + d_1 - b)$ . Если  $v \leq v_*$ , то  $\phi_1 \geq 0$ . Можно показать, что необходимой предпосылкой выполнения условия устойчивости  $d_1 > d_1^*$  есть  $v_+ < v_*$ . Следовательно  $\phi_1 > 0$  при  $v = v_+$ . Это соответствует результату [4] о том, что для расширения области устойчивости на плоскости  $\theta v$  в окрестности точки  $(0, v_+)$  необходимо ориентировать ведомое звено во внутреннюю сторону.

Для численного нахождения множества параметров двухзвенника, при переходе через которое меняется количество особых точек, дополним три исходных уравнения стационарных состояний четвертым, приравняв нулю якобиан системы. Искомыми являются значения переменных состояния  $\omega, u, \phi_1$  и параметров  $\theta, v$ . Многообразия стационарных состояний найдем методом продолжения [12] по двум параметрам  $\theta$  и  $v$ , взяв в качестве стартовой точку  $\omega = 0, u = 0, \phi_1 = 0, \theta = 0, v = v_+$ .

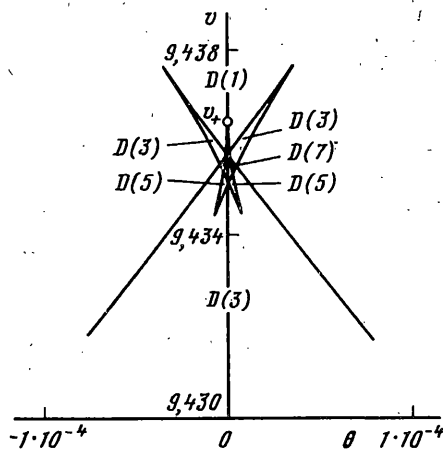
Примем  $m = 5310$  кг,  $m_1 = 6481$  кг,  $a = 1,92$  м,  $b = 0,82$  м,  $c = b, d_1 = 14$  м,  $k_1 = 305090$  Н,  $k_2 = 103500$  Н,  $k_3 = 154080$  Н,  $\psi_1 = \psi_2 = 0,8$ . Тогда  $v_+ = 9,436$  м/с,  $d_1^* = 9,509$  м.

Кривая в верхней части фиг. 3 представляет собой сечение бифуркационной поверхности плоскостью  $d_1 = \text{const}$ , причем  $d_1 = 9,3$  м. Внизу слева показан фрагмент бифуркационного множества в малой окрестности точки  $\theta = 0, v = v_+$ , который подтверждает опасность границы области устойчивости  $v = v_+$  при  $d_1 < d_1^*$ . Внизу справа — то же для  $d_1 = 9,7$  м, т.е. для  $d > d_1^*$ ; в этом случае граница безопасная. Сечения бифуркационной поверхности при  $d_1 = 9,3$  м и  $d_2 = 9,7$  м в выбранном масштабе практически совпадают. При  $d_1 = d_1^*$  в точке  $(0, v_+)$  реализуется особенность бабочка.

При построении фиг. 4 принято  $k_3 = 254080$  Н,  $d_1 = 13,56$  м; это значение  $d_1$  меньше  $d_1^*$ . Видно, что в малой окрестности точки  $(0, v_+)$  существуют четыре другие точки возврата. Символом  $D(s)$  обозначены области с  $s$  стационарными состояниями. Качественная структура бифуркационных кривых совпадает с таковой при  $k_3 = 154080$  Н,  $d_1 = 9,3$  м. Отличие в том, что на фиг. 3 верхние точки возврата значительно



Фиг. 3



Фиг. 4

удалены. Область на фиг. 4 образуется пересечением сборки и двух симметрично расположенных ласточкиных хвостов. Эволюция этих хвостов (рождение и исчезновение) при изменении параметра  $d_1$  приводит к тому, что при  $d_1 = d_1^*$  граница  $v = v_+$  области устойчивости меняет характер опасности.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рокар И. Неустойчивость в механике. Автомобили. Самолеты. Висячие мосты. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 287 с.
2. Лобас Л.Г., Вербицкий В.Г. Качественные и аналитические методы в динамике колесных машин. Киев: Наук. думка, 1990. 229 с.
3. Холоднюк М., Клич А., Кубичек М., Марек М. Методы анализа нелинейных динамических моделей. М.: Мир, 1991. 365 с.
4. Вербицкий В.Г., Лобас Л.Г. Бифуркация стационарных состояний связки абсолютно твердых и катящихся упругих тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 3. С. 30–37.
5. Вербицкий В.Г., Лобас Л.Г. Метод определения особых точек и их характера в задаче о плоском движении колесного экипажа // ПММ. 1981. Т. 45. Вып.5. С. 944–948.
6. Арнольд В.И., Афраймович В.С., Ильяшенко Ю.С., Шильников Л.П. Теория бифуркаций // Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики. Фунд. напр. М.: ВИНТИ, 1986. Т. 5. С. 5–218.
7. Брус Дж., Джиблин П. Кривые и особенности: Геометрическое введение в теорию особенностей. М.: Мир, 1988. 262 с.
8. Арнольд В.И. Теория катастроф. М.: Наука, 1990. 127 с.
9. Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. М.: Наука, 1984. 176 с.
10. Troger H., Steindl A. Nonlinear stability and bifurcation theory. Wien; New York; Springer-Verlag, 1991. 407 p.
11. Ляпунов А.М. Собр. соч. В 6 тт. М.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 2. 473 с.
12. Shinohara Y. A geometric method for the numerical solution on non-linear equations and its application to non-linear oscillations // Publ. Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ. 1972. V. 8. № 1. P. 13–42.

Киев

Поступила в редакцию  
5.VIII.1994