МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1997

УДК 531.391.5

© 1997 г. Л.Б. РАПОПОРТ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

В работе рассматриваются линейные механические системы с диссипацией и параметрическим возмущением. Множество параметрических возмущений зависит от одного параметра. Изучаются свойства системы при том значении параметра, при котором система теряет свойство асимптотической устойчивости.

1. Введение и постановка задачи. Рассмотрим механическую систему с обобщенными координатами $q=(q_1, \ldots, q_n)' \in R^n$, функцией Лагранжа $L = T - U$ и диссипативными силами Q, причем

$$T = \tfrac{1}{2}\dot{q}'A\dot{q}, \quad U = \tfrac{1}{2}q'Bq, \quad Q = C\dot{q}$$

Матрица **B** квадратичной формы U линейно зависит от m функций времени $\lambda_i(t)$, имеющих смысл параметрических возмущений, $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \ldots, \lambda_m(t))' \in R^m$, причем

$$B = B_\lambda(t) = B_0 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(t) B_i \tag{1.1}$$

Предположим, что **A**, **C** и все **B**(t) – положительно определенные симметрические матрицы размера $n \times n$, штрих означает транспонирование, а векторы считаются столбцами. Таким образом, уравнения движения имеют вид

$$A\ddot{q} + C\dot{q} + B_\lambda(t)q = 0 \tag{1.2}$$

Предположим также, что каждая из функций $\lambda_i(t)$ измерима. Множество измеримых вектор-функций $\lambda(t)$, удовлетворяющих условиям $0 \leqslant \lambda_i(t) \leqslant 1$ обозначим через Λ_1. Под решением системы уравнений (1.2) понимается вектор-функция $q(t)$, обладающая абсолютно-непрерывной производной $\dot{q}(t)$, удовлетворяющая начальным условиям $q(t_0) = q_0$, $\dot{q}(t_0) = \dot{q}_0$ и уравнениям (1.2) для почти всех t (для тех t, для которых существует вторая производная $\ddot{q}(t)$). Под устойчивостью системы (1.2) далее будем понимать устойчивость нулевого решения $q(t) \equiv 0$, $\dot{q}(t) \equiv 0$.

Простейший одномерный случай уравнений Матье – Хилла [3] при наличии трения ($\ddot{q} = -\alpha\dot{q} - \omega^2(1+\varepsilon a(t))q$) сводится к (1.1), (1.2) при $n = 1$, $m = 2$, $A = 1$, $C = \alpha$, $B_0 = \omega^2$, $B_1 = -\varepsilon\omega^2 \inf a(t)$, $B_2 = \varepsilon\omega^2 \sup a(t)$.

Заметим, что в отличие от задачи о параметрическом резонансе здесь не предполагается периодичность вектора параметрических возмущений $\lambda(t)$. В то же время, при $n = 1$ возмущение, при котором система теряет свойство устойчивости, действительно оказывается периодическим. Ранее это свойство для двумерных систем автоматического управления было установлено в [4] и для механических систем в [2].

Будем называть систему (1.1), (1.2) абсолютно устойчивой в классе Λ_1, если она асимптотически устойчива при любых $\lambda(\cdot)\in\Lambda_1$. В [5] показано, что абсолютно устойчивая система экспоненциально асимптотически устойчива равномерно по t_0. Из (1.1) и конструкции множества Λ_1 видно, что, не ограничивая общности, можно считать $t_0 = 0$.

Для $\alpha_0 \in [0,1]$ обозначим через Λ_α множество измеримых вектор-функций, компоненты которых удовлетворяют условиям $0 \leqslant \lambda_i(t) \leqslant \alpha$. Очевидно, что $\Lambda_0 = \{0\}$.

Поскольку диссипативные силы $Q = C\dot q$ имеют полную диссипацию и все матрицы $B(t)$ положительно определены, то система (1.2) асимптотически устойчива при постоянных возмущениях, т.е. при $\lambda_i(t)\equiv\lambda_i^{(0)}$, и, в частности, при $\lambda_i(t) \equiv 0$. Очевидно, что при достаточно малом $\alpha > 0$ система (1.1), (1.2) абсолютно устойчива в классе Λ_α. Предположим, что система (1.1), (1.2) не является абсолютно устойчивой в классе $\Lambda_1 = \Lambda$. Другими словами, существует такая вектор-функция $\overline{\lambda}(\cdot)\in\Lambda$, что нулевое решение системы (1.2) не устойчиво.

Итак, при $\alpha = 0$ система (1.1), (1.2) абсолютно устойчива в классе Λ_α, а при $\alpha = 1$ абсолютно устойчивой не является. Обозначим $\alpha^* = \sup\{\alpha\}$, причем супремум берется по тем α, для которых система (1.1), (1.2) абсолютно устойчива в классе Λ_{α^*}. Очевидно, что $\alpha^* \in (0,1]$. Цель данной работы состоит в исследовании свойств системы (1.1), (1.2) при возмущениях из Λ_α при $\alpha = \alpha^*$, а также свойства возмущений, "наихудших" в смысле устойчивости. В следующем пункте показано, что хотя полная энергия $E = T + U$ не сохраняется на экстремальных траекториях (1.1), (1.2), отвечающих наихудшим возмущениям, тем не менее существует функция, сохраняющая постоянное значение на таких траекториях.

2. Существование инвариантной функции при $\alpha = \alpha^*$. Через $\|\cdot\|$ будем обозначать евклидову норму вектора. Предположим, что выполнено следующее

Предположение 1. Не существует линейного преобразования координат, приводящего одновременно все матрицы $\mathbf{A}, \mathbf{B}_1, \cdots \mathbf{B}_m$, $\mathbf{C}$ к блочному виду.

Обозначим через $q_\lambda(t,\ q_0,\ \dot q_0)$, $\dot q_\lambda(t,\ q_0,\ \dot q_0)$ решение системы (1.1), (1.2), отвечающее возмущениям $\lambda(t)$ и начальным условиям $q_\lambda(0,\ q_0,\ \dot q_0) = q_0$, $\dot q_\lambda(0,\ q_0,\ \dot q_0) = \dot q_0$. Рассмотрим следующее выражение

$$v(q_0,\ \dot q_0,\ \alpha) = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\max_{\lambda(\cdot)\in\Lambda_\alpha}\int_0^t\left[\frac{1}{2}\dot q_\lambda(\tau,\ q_0,\ \dot q_0)'A\dot q_\lambda(\tau,\ q_0,\ \dot q_0)+\right.\tag{2.1}$$

$$\left.+\frac{1}{2}q_\lambda(\tau,\ q_0,\ \dot q_0)'B_\lambda(\tau)q_\lambda(\tau,\ q_0,\ \dot q_0)\right]d\tau$$

зависящее от начальных условий и параметра α. Применение максимума в выражении (2.1) корректно в силу компактности множества решений $q_\lambda(\tau,\ q_0,\ \dot q_0)$, $\dot q_\lambda(\tau,\ q_0,\ \dot q_0)$ на конечном сегменте $[0, t]$ [8]. Очевидно, что при $\alpha < \alpha^*$ $v(q_0,\ \dot q_0,\ \alpha)\equiv 0$, при $\alpha > \alpha^*$ $v(q_0,\ \dot q_0,\ \alpha)\equiv +\infty$. Нас интересует случай $\alpha = \alpha^*$ и свойства величины $v(q_0,\ \dot q_0,\ \alpha^*)$ как функции от начальных условий q_0, $\dot q_0$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть выполняется предположение 1. Тогда

а) Величина $v(q_0, \dot q_0, \alpha^*)$ конечна и положительна при любых $q_0, \dot q_0, \|q_0\|+\|\dot q_0\|\neq 0$, $v(0, 0, \alpha^*) = 0$;

b) $v(q_0, \dot q_0, \alpha^*)$ есть выпуклая и однородная степени 2 функция аргументов $q_0, \dot q_0$;

c) Для любых начальных условий $q_0, \dot q_0$ найдется такая функция $\bar\lambda(\cdot) \in \Lambda_{\alpha^*}$, что для любых $t \geqslant 0$ выполняется условие

$$v(q_{\bar\lambda}(t,\ q_0,\ \dot q_0),\ \dot q_{\bar\lambda}(t,\ q_0,\ \dot q_0),\ \alpha^*) = \tag{2.2}$$

$$= \max_{\lambda(\cdot)\in\Lambda_{\alpha^*}} v(q_\lambda(t,\ q_0,\ \dot q_0),\ \dot q_\lambda(t,\ q_0,\ \dot q_0),\ \alpha^*) = v(q_0,\ \dot q_0,\ \alpha^*)$$

Доказательство. Доказательство утверждения a) использует предположение 1 и не отличается от доказательства аналогичного утверждения теоремы 1 [6].

Докажем утверждение (*b*). Для удобства обозначим

$$z = \begin{pmatrix} q \\ \dot q \end{pmatrix}$$

Пусть $\Phi_\lambda(t)$ – фундаментальная матрица системы (1.2), отвечающая функции $\lambda(t)$, $E_\lambda(t) = \frac{1}{2}\mathrm{diag}(A,\ B_\lambda(t))$. Тогда $z_\lambda(t,\ z_0) = \Phi_\lambda(t) z_0$. Для любых двух векторов z_1 и z_2 и числа $\gamma \in [0, 1]$ имеем в силу (2.1) и положительной определенности матрицы $E(t)$, что

$$v(\gamma z_1 + (1-\gamma) z_2,\ \alpha^*) =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \max_{\lambda(\cdot)\in\Lambda_{\alpha^*}} \int_0^t [z_\lambda(\tau,\ \gamma z_1 + (1-\gamma)z_2)' E_\lambda(\tau) z_\lambda(\tau,\ \gamma z_1 + (1-\gamma) z_2)] d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \max_{\lambda(\cdot)\in\Lambda_{\alpha^*}} \int_0^t [\gamma z_\lambda(\tau,\ z_1)' E_\lambda(\tau) z_\lambda(\tau,\ z_1) + (1-\gamma) z_\lambda(\tau,\ z_2)' E_\lambda(\tau) z_\lambda(\tau,\ z_2)] d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \left\{ \gamma \max_{\lambda(\cdot)\in\Lambda_{\alpha^*}} \int_0^t z_\lambda(\tau,\ z_1)' E_\lambda(\tau) z_\lambda(\tau,\ z_1) d\tau + (1-\gamma) \times \right.$$

$$\left. \times \max_{\lambda(\cdot)\in\Lambda_{\alpha^*}} \int_0^t z_\lambda(\tau,\ z_2)' E_\lambda(\tau) z_\lambda(\tau,\ z_2) d\tau \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \gamma v(z_1,\ \alpha^*) + (1-\gamma) v(z_2,\ \alpha^*)$$

Однородность степени 2 следует из (2.1).

Докажем утверждение (*c*). Обозначим через $Z(\theta, z_0)$ множество векторов вида $z_\lambda(\theta,\ z_0,\ \alpha^*)$ при всевозможных функциях $\lambda(\cdot) \in \Lambda_{\alpha^*}$, определенных на отрезке $[0, \theta]$. Это множество замкнуто и ограничено. С учетом того, что для $\theta > 0$ и достаточно больших t выполняется условие

$$\frac{1}{t} \int_0^\theta [z_\lambda(\tau,\ z_0)' E_\lambda(\tau) z_\lambda(\tau,\ z_0) d\tau = O\left(\frac{1}{t}\right)$$

будем иметь

$$v(z_0,\ \alpha^*) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \max_{z\in Z(\theta, z_0, \alpha^*)} \max_{\lambda(\cdot)\in\Lambda_{\alpha^*}} \int_\theta^t [z_\lambda(\tau,\ z)' E_\lambda(\tau) z_\lambda(\tau,\ z)] d\tau$$

Пусть первый максимум в последнем выражении достигается в точке

$y(t) \in Z(\theta, z_0, \alpha^*)$. Тогда найдется такая неограниченно возрастающая последовательность $\{t_j\}$, что $y(t_j) \to \bar{y} \in Z(\theta, z_0, \alpha^*)$ и

$$v(z_0, \alpha^*) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \max_{\lambda(\cdot)\in\Lambda_{\alpha^*}} \int_\theta^t [z_\lambda(\tau, \bar{y})' E_\lambda(\tau) z_\lambda(\tau, \bar{y})] d\tau = \tag{2.3}$$

$$= v(\bar{y}, \alpha^*) \leqslant \max_{y\in Z(\theta, z_0, \alpha^*)} v(y, \alpha^*)$$

С другой стороны, для любого $y \in Z(\theta, z_0, \alpha^*)$ имеем

$$\max_{\lambda(\cdot)\in\Lambda_{\alpha^*}} \int_\theta^t [z_\lambda(\tau, z_0)' E_\lambda(\tau) z_\lambda(\tau, z_0)] d\tau \geqslant \max_{\lambda(\cdot)\in\Lambda_{\alpha^*}} \int_\theta^t [z_\lambda(\tau, y)' E_\lambda(\tau) z_\lambda(\tau, y)] d\tau$$

и, следовательно, $v(z_0, \alpha^*) \geqslant v(y, \alpha^*)$. Из последнего неравенства следует

$$v(z_0, \alpha^*) \geqslant \max_{y\in Z(\theta, z_0, \alpha^*)} v(y, \alpha^*)$$

что в совокупности с (2.3) означает выполнение условия (2.2). Теорема доказана.

Через $[\cdot]_\infty$ обозначим среднее на бесконечном интервале. Пусть $q_{\bar{\lambda}}(t, q_0, \dot{q}_0)$ это решение системы (1.2) удовлетворяющее утверждению c) теоремы 1 (т.е. $\bar{\lambda}(\cdot) \in \Lambda_{\alpha^*}$) а $\bar{T}$ и $\bar{U}$ это кинетическая и потенциальная энергия на траектории $q_{\bar{\lambda}}(t, q_0, \dot{q}_0)$, $\dot{q}_{\bar{\lambda}}(t, q_0, \dot{q}_0)$.

Следствие 1. Имеет место равенство

$$[q_{\bar{\lambda}}(\cdot, q_0, \dot{q}_0)' C \dot{q}_{\bar{\lambda}}(\cdot, q_0, \dot{q}_0)]_\infty = 4[T]_\infty - 2v(q_0, \dot{q}_0, \alpha^*)$$

Доказательство. По теореме о вириале [2]:

$$2[\bar{T}]_\infty - 2[\bar{U}]_\infty - [q_{\bar{\lambda}}(\cdot, q_0, \dot{q}_0)' C \dot{q}_{\bar{\lambda}}(\cdot, q_0, \dot{q}_0)]_\infty = 0$$

С другой стороны, по теореме 1:

$$[\bar{T}]_\infty + [\bar{U}]_\infty = v(q_0, \dot{q}_0, \alpha^*)$$

Последние два равенства дают утверждение следствия.

Следствие 2. Пусть $D_{\bar{\lambda}}(t) = B_{\bar{\lambda}}(t) - [B_{\bar{\lambda}}(\cdot)]_\infty$. Имеет место равенство

$$[q_{\bar{\lambda}}(\cdot, q_0, \dot{q}_0)' C \dot{q}_{\bar{\lambda}}(\cdot, q_0, \dot{q}_0)]_\infty = [\dot{q}_{\bar{\lambda}}(\cdot, q_0, \dot{q}_0)' D_{\bar{\lambda}}(\cdot) q_{\bar{\lambda}}(\cdot, q_0, \dot{q}_0)]_\infty$$

Доказательство непосредственно следует из (1.2) и ограниченности кинетической энергии в силу теоремы 1.

Рассмотрим частный случай $n = 1$. В силу выпуклости функции $v(q, \dot{q}, \alpha^*)$ траектория решения $q_{\bar{\lambda}}(t, q_0, \dot{q}_0)$, существующего в силу утверждения c) теоремы 1, есть граница выпуклой области $v(q, \dot{q}, \alpha^*) \leqslant v(q_0, \dot{q}_0, \alpha^*)$ фазовой плоскости. Таким образом, решение $q_{\bar{\lambda}}(t, q_0, \dot{q}_0)$, удовлетворяющее условию (2.2), оказывается периодическим, что ранее было установлено в [2]. В данной работе это утверждение есть простое следствие более общей теоремы 1. Периодичность соответствующего возмущения $\bar{\lambda}(t)$ следует из однородности фазового портрета системы (1.2) на плоскости, причем период возмущения оказывается в два раза меньше, чем период решения $q_{\bar{\lambda}}(t, q_0, \dot{q}_0)$. Более подробный анализ возмущения $\bar{\lambda}(t)$ показывает, что оно кусочно-постоянно и имеет 2 точки переключения за период. Последнее утверждение доказывается аналогично [7]. Итак, имеет место

Следствие 3. Пусть $n = 1$. Тогда найдется такое T, что для любого q_0, $\dot{q}_0$ решение $q_{\bar{\lambda}}(t, q_0, \dot{q}_0)$ оказывается T-периодическим, а соответствующее возмущение $\bar{\lambda}(t) - T/2$-периодическим, кусочно-постоянным и имеющим 2 переключения за период.

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда и Правительства России (грант JER100).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Айзерман М.А.* Классическая механика. М.: Наука, 1980. 367 с.
2. *Александров В.В., Жермоленко В.Н.* Об абсолютной устойчивости систем второго порядка // Вестн. МГУ, Сер. Математика и механика. 1972. № 5. С. 102–109.
3. *Меркин Д.Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1971. 312 с.
4. *Пятницкий Е.С.* Критерий абсолютной устойчивости нелинейных регулируемых систем второго порядка с одним нелинейным нестационарным элементом // Автоматика и телемеханика. 1971. № 1. С. 5–16.
5. *Пятницкий Е.С.* О равномерной устойчивости при параметрических возмущениях // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9. № 7. С. 1262–1274.
6. *Рапопорт Л.Б.* Граница абсолютной устойчивости нелинейных нестационарных систем и ее связь с построением инвариантных функций // Автоматика и телемеханика. 1990. № 10. С. 78–86.
7. *Рапопорт Л.Б.* Антипериодические движения и алгебраический критерий асимптотической устойчивости селекторно-линейных дифференциальных включений в двумерном случае // Автоматика и телемеханика. 1995. № 1. С. 56–63.
8. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 С.

Москва

Поступила в редакцию
9.I.1996