МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1997

УДК 531.36

© 1997 г. А.П. МАРКЕЕВ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПРИ НАЛИЧИИ СОУДАРЕНИЙ С ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТЬЮ

Решается нелинейная задача об орбитальной устойчивости периодического движения твердого тела над неподвижной горизонтальной плоскостью в однородном поле тяжести. Тело ограничено поверхностью вращения, центр тяжести лежит на оси симметрии. Плоскость считается абсолютно гладкой, соударения тела и плоскости – абсолютно упругими. В невозмущенном движении ось симметрии тела вертикальна, а тело движется поступательно, периодически соударяясь с плоскостью.

При фиксированной константе интеграла энергии задача приведена к исследованию устойчивости неподвижной точки сохраняющего площадь отображения плоскости в себя. Получены условия устойчивости и неустойчивости в зависимости от высоты подскока, геометрии поверхности тела и его инерционных параметров.

1. Постановка задачи. Системы координат. Рассмотрим движение твердого тела в однородном поле тяжести над неподвижной горизонтальной плоскостью. Тело однородно, ограничено выпуклой поверхностью вращения. Соударения тела и плоскости считаются абсолютно упругими, трение отсутствует.

Движение тела отнесем к неподвижной системе координат $OXYZ$ с началом в произвольной точке O плоскости, ось OZ направлена вертикально вверх. Пусть $G\xi\eta\zeta$ – система координат, образованная главными центральными осями инерции тела, $G\zeta$ – ось симметрии тела. Положение тела определяется координатами X, Y, Z его центра тяжести G в системе координат $OXYZ$ и тремя углами Эйлера ψ, θ, φ, задающими ориентацию трехгранника $G\xi\eta\zeta$ относительно трехграника $OXYZ$. Углы Эйлера вводятся обычным образом. В частности, θ – угол между осями $G\zeta$ и OZ.

Пусть M_0 – точка пересечения оси симметрии с поверхностью тела в области отрицательных ζ. Расстояние от центра тяжести до точки M_0 обозначим через d. Предположим, что плоскость, касательная к поверхности тела в точке M_0, перпендикулярна оси $G\zeta$ и зададим уравнение поверхности тела в виде

$$\zeta = \chi(\rho) - d, \quad \rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$$

$$\chi(\rho) = a_2\rho^2 + a_3\rho^3 + a_4\rho^4 + \ldots \quad (a_2 > 0)$$

Пусть M – ближайшая к плоскости OXY точка поверхности тела, а f – расстояние от центра тяжести до горизонтальной плоскости, проходящей через точку M. Можно показать, что f – функция угла нутации θ, причем для малых θ имеет место следующее разложение f в степенной ряд:

$$f(\theta) = d + f_2\theta^2 + f_3\theta^3 + f_4\theta^4 + \ldots \tag{1.1}$$

$$f_2 = \frac{1}{4a_2} - \frac{d}{2}, \quad f_3 = -\frac{a_3}{8a_2^3}, \quad f_4 = \frac{d}{24} + \frac{1}{24a_2} + \frac{9a_3^2}{64a_2^5} - \frac{a_4}{16a_2^4}$$

Отметим, что $f_2 = {}^1/_2(R - d)$, где R – радиус кривизны поверхности тела в точке M_0.

Вместо координаты Z введем величину $q = Z - f(\theta)$. Во время движения тела выполняется неравенство $q \geqslant 0$. При $q = 0$ происходит соприкосновение поверхности тела с плоскостью OXY, сопровождающееся абсолютно упругим ударом. Поэтому справедливо равенство $\dot{q}^+ = -\dot{q}^-$. Здесь и далее индексами минус и плюс отмечены значения соответствующих величин до и после удара.

В свободном полете, когда $q > 0$, движению тела отвечает функция Лагранжа

$$L = \tfrac{1}{2}m[\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + (\dot{q} + f'\dot{\theta})^2] + \tfrac{1}{2}A(\dot{\psi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + \tfrac{1}{2}C(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi})^2 - mg(q + f) \quad (1.2)$$

Здесь m – масса тела, A и C – экваториальный и полярный моменты инерции, g – ускорение свободного падения, штрихом обозначено дифференцирование по углу θ.

При ударе неизменны все обобщенные координаты X, Y, q, ψ, θ, φ и все обобщенные импульсы, кроме импульса p, соответствующего обобщенной координате q [1]. Заметим еще, что функция (1.2) не зависит от X, Y, ψ, φ, получим, что во все время движения, включающего промежутки свободного полета тела и моменты его соударений с плоскостью, имеют место следующие четыре интеграла:

$$p_X = m\dot{X} = c_X, \quad p_Y = m\dot{Y} = c_Y$$

$$p_\psi = A\dot{\psi}\sin^2\theta + C(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi})\cos\theta = c_\psi, \quad p_\varphi = C(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}) = c_\varphi$$

где c_X, c_Y, c_ψ, c_φ – константы. Будем считать, что эти константы равны нулю. Это означает, что для рассматриваемых в дальнейшем движений центр тяжести тела движется вдоль фиксированной вертикали, а проекции кинетического момента на вертикаль и на ось симметрии тела равны нулю.

В свободном полете этим движениям соответствует функция Лагранжа $L^* = \tfrac{1}{2}m(\dot{q} + f'\dot{\theta})^2 + \tfrac{1}{2}A\dot{\theta}^2 - mg(q + f)$. Введя импульсы

$$p = \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}} = m(\dot{q} + f'\dot{\theta}) = m\dot{Z}, \quad p_\theta = \frac{\partial L^*}{\partial \dot{\theta}} = m(\dot{q} + f'\dot{\theta})f' + A\dot{\theta} \quad (1.3)$$

стандартным путем получим соответствующий гамильтониан

$$H = \frac{(A + mf'^2)}{2Am}p^2 - \frac{f'}{A}pp_\theta + \frac{p_\theta^2}{2A} + mg(q + f) \quad (1.4)$$

При ударе величины θ, p_θ неизменны; а значения импульса p до и после удара связаны следующим соотношением (получаемым из равенства $\dot{q}^+ = -\dot{q}^-$ или из интеграла $H = \text{const}$):

$$p^+ = -p^- + \frac{2mf'}{A + mf'^2}p_\theta \quad (1.5)$$

Из уравнений свободного движения тела, определяемых гамильтонианом (1.4) при учете равенства (1.1), и граничных условий (1.5) следует, что существует периодическое движение тела, для которого $\theta \equiv 0$. В этом движении ось симметрии тела остается на фиксированной вертикали, а само тело движется поступательно вдоль этой вертикали. При этом в результате соударений тело периодически подскакивает над плоскостью. Если h – наибольшее расстояние точки M_0 от плоскости, то движение имеет период $2(2h/g)^{1/2}$, равный промежутку времени между двумя последовательными соударениями тела и плоскости.

Целью данной работы является получение условий орбитальной устойчивости и неустойчивости упомянутого периодического движения тела. Ранее ряд задач об устойчивости периодических движений тела при наличии соударений с плоскостью исследован в [2–7].

2. О методе исследования. При исследовании используется алгоритм из [8]. В этом алгоритме задача об орбитальной устойчивости периодического движения системы с соударениями приводится, при помощи метода поверхностей сечения Пуанкаре, к задаче об устойчивости неподвижной точки сохраняющего площадь отображения плоскости в себя. При этом возмущенное движение рассматривается на изоэнергетическом уровне $H = \text{const}$, на котором лежит и невозмущенная траектория, а в качестве поверхности сечения принимается плоскость $q = 0$.

На рассматриваемом периодическом движении тела имеем $\theta = 0$, $p_\theta = 0$, а константа интеграла энергии $H = \text{const}$ равна $mg(h + d)$. Зафиксировав этот уровень энергии, получаем, что для возмущенного движения имеет место тождество

$$H(q, \theta, p, p_\theta) = mg(h + d) \tag{2.1}$$

где H задается равенствами (1.4) и (1.1). Будем рассматривать θ, p_θ, q как прямоугольные координаты в трехмерном пространстве, определяемом равенством (2.1). Движение твердого тела изображается кривой в этом пространстве, лежащей в области $q \geqslant 0$. Плоскость $q = 0$ отвечает моментам соударений.

Пусть в возмущенном движении непосредственно перед первым соударением имеем $\theta = x$, $p_\theta = \frac{1}{2}A(g/2h)^{1/2}y$, а перед вторым соударением $\theta = x_1$, $p_\theta = \frac{1}{2}A(g/2h)^{1/2}y_1$. При достаточно малых x, y величины x_1, y_1, будут аналитическими функциями относительно x, y и задают отображение $x, y \to x_1, y_1$ плоскости в себя. Это отображение сохраняет площадь и имеет неподвижную точку $x = y = 0$, которая отвечает исследуемому периодическому движению тела. Задача об орбитальной устойчивости этого движения на изоэнергетическом уровне $H = mg(h + d)$ эквивалентна задаче об устойчивости неподвижной точки $x = y = 0$ отображения.

3. Отображение. Получим явный вид отображения $xy \to x_1, y_1$. Полагая в (2.1) $q = 0$, $\theta = x$, $p_\theta = \frac{1}{2}A(g/2h)^{1/2}y$ и учитывая, что непосредственно перед первым соударением величина $p = p^-$ отрицательна, находим p^- в виде ряда по степеням x, y:

$$p^- = m\sqrt{2gh}[-1 + \tfrac{1}{8}\mu_1\mu_2(1+\mu_2)x^2 + \tfrac{1}{8}\mu_1\mu_2 xy + \tfrac{1}{32}\mu_1 y^2 +$$
$$+ \tfrac{1}{8}\mu_1\mu_3(1+3\mu_2)x^3 + \tfrac{3}{16}\mu_1\mu_3 x^2 y] + O_4$$
$$\mu_1 = \frac{A}{mh^2}, \quad \mu_n = \frac{4mh}{A} f_n \quad (n = 2, 3, 4) \tag{3.1}$$

В (3.1) и далее через O_k обозначается степенной ряд, начинающийся с членов, степень которых не ниже k.

Теперь можно найти кинематическое состояние тела непосредственно после первого соударения. Соответствующие значения кинематических величин будем обозначать при помощи индекса "нуль". Имеем

$$q_0 = 0, \quad \theta_0 = x, \quad p_{\theta_0} = \tfrac{1}{2}A\sqrt{g/2h}\,y \tag{3.2}$$

Учитывая, что $Z = q + f(\theta)$, из (1.1) и (3.2) получаем

$$Z_0 = d + \frac{A}{4mh}(\mu_2 x^2 + \mu_3 x^3) + O_4 \tag{3.3}$$

Величину $p_0 = p^+$ находим из соотношения (1.5) при учете равенств (1.1), (3.1), (3.2). Получаем

$$p_0 = m\sqrt{2gh}[1 - \tfrac{1}{8}\mu_1\mu_2(1+\mu_2)x^2 + \tfrac{1}{8}\mu_1\mu_2 xy - \tfrac{1}{32}\mu_1 y^2 -$$
$$- \tfrac{1}{8}\mu_1\mu_3(1+3\mu_2)x^3 + \tfrac{3}{16}\mu_1\mu_3 x^2 y] + O_4 \tag{3.4}$$

Ряды для величин $\dot{\theta}_0, \dot{Z}_0$ теперь можно найти из равенств (1.3), (3.2), (3.4) при учете соотношения (1.1). Имеем

$$\dot{\theta}_0 = \sqrt{g/2h}\{-\mu_2 x + \tfrac{1}{2}y - \tfrac{3}{2}\mu_3 x^2 + [\tfrac{1}{8}\mu_1\mu_2^2(1+\mu_2) - 2\mu_4]x^3 - \\ - \tfrac{1}{8}\mu_1\mu_2^2 x^2 y + \tfrac{1}{32}\mu_1\mu_2 x y^2\} + O_4 \tag{3.5}$$

$$\dot{Z}_0 = \sqrt{2gh}[1 - \tfrac{1}{8}\mu_1\mu_2(1+\mu_2)x^2 + \tfrac{1}{8}\mu_1\mu_2 xy - \tfrac{1}{32}\mu_1 y^2 - \\ - \tfrac{1}{8}\mu_1\mu_3(1+3\mu_2)x^3 + \tfrac{3}{16}\mu_1\mu_3 x^2 y] + O_4 \tag{3.6}$$

Пусть $t = 0$ – момент окончания первого соударения, а t_1 – момент второго соударения тела и плоскости. При $0 < t < t_1$ тело совершает свободный полет, который описывается дифференциальными уравнениями $\ddot{Z} = -g$, $\ddot{\theta} = 0$. Во время свободного полета имеем

$$\theta(t) = \dot{\theta}_0 t + \theta_0, \quad \dot{\theta}(t) = \dot{\theta}_0 \tag{3.7}$$

$$Z(t) = -\tfrac{1}{2}gt^2 + \dot{Z}_0 t + Z_0, \quad \dot{Z}(t) = -gt + \dot{Z}_0 \tag{3.8}$$

где величины $\theta_0, Z_0, \dot{\theta}_0, \dot{Z}_0$ определены равенствами (3.2), (3.3), (3.5), (3.6).

Момент t_1 второго соударения является наименьшим положительным корнем уравнения $Z(t_1) = f(\theta(t_1))$, где f – функция (1.1). Из этого уравнения величина t_1 может быть получена в виде ряда по степеням x, y:

$$t_1 = 2\sqrt{2h/g}[1 - \tfrac{1}{8}\mu_1\mu_2(1-\mu_2+2\mu_2^2)x^2 + \tfrac{1}{4}\mu_1\mu_2^2 xy - \tfrac{1}{32}\mu_1(1+2\mu_2)y^2] + O_3 \tag{3.9}$$

Подставив теперь t_1 из (3.9) в соотношения (3.7), (3.8) и (1.3), найдем значения $\theta = x_1$ и $p_\theta = \tfrac{1}{2}A(g/2h)^{1/2}y_1$ непосредственно перед вторым соударением тела и плоскости. Вычисления показывают, что справедливы следующие разложения функций x_1, y_1, в ряды по степеням x, y:

$$x_1 = (1-2\mu_2)x + y + \sum_{m+n=2}^{3} k_{mn}x^m y^n + O_4 \\ y_1 = -4\mu_2(1-\mu_2)x + (1-2\mu_2)y + \sum_{m+n=2}^{3} l_{mn}x^m y^n + O_4 \tag{3.10}$$

$$k_{20} = -3\mu_3, \quad k_{11} = 0, \quad k_{02} = 0 \\ l_{20} = -6\mu_3(2\mu_2^2 - 3\mu_2 + 1), \quad l_{11} = -6\mu_3(1-2\mu_2), \quad l_{02} = -3\mu_3 \\ k_{30} = \tfrac{1}{2}\mu_1\mu_2^2 + \tfrac{1}{2}\mu_1\mu_2^4 - 4\mu_4, \quad k_{21} = -\tfrac{1}{8}\mu_1\mu_2(1+\mu_2+6\mu_2^2) \\ k_{12} = \tfrac{1}{8}\mu_1\mu_2(1+3\mu_2), \quad k_{03} = -\tfrac{1}{32}\mu_1(1+2\mu_2) \\ l_{30} = \tfrac{1}{2}\mu_1\mu_2^2(1-4\mu_2+5\mu_2^2-6\mu_2^3) - 8\mu_4(1-4\mu_2+6\mu_2^2-4\mu_2^3) + 18\mu_3^2(1-2\mu_2) \\ l_{21} = \tfrac{1}{2}\mu_1\mu_2^2(1-4\mu_2+9\mu_2^2) - 12\mu_4(1-2\mu_2)^2 + 18\mu_3^2 \\ l_{12} = \tfrac{1}{8}\mu_1\mu_2(1+\mu_2-18\mu_2^2) - 12\mu_4(1-2\mu_2) \\ l_{03} = \tfrac{1}{8}\mu_1\mu_2(1+3\mu_2) - 4\mu_4 \tag{3.11}$$

4. Линейный анализ. Характеристическое уравнение линеаризованного отображения имеет вид

$$\rho^2 - 2(1-2\mu_2)\rho + 1 = 0 \tag{4.1}$$

При решении задачи об устойчивости неподвижной точки $x = y = 0$ отображения (3.10) возможны следующие четыре случая.

1. Если $\mu_2 < 0$ или $\mu_2 > 1$, то корни уравнения (4.1) вещественны, причем один из корней имеет модуль, больший единицы. В этом случае неподвижная точка отображения (3.10) неустойчива не только в линейном приближении, но и при учете всех нелинейностей в правых частях равенств (3.10).

Учитывая, что $\mu_2 = 2mh(R - d)/A$, получаем отсюда, что для орбитальной неустойчивости рассматриваемого периодического движения тела над плоскостью достаточно, чтобы выполнялось неравенство $R < d$, то есть чтобы радиус кривизны поверхности тела в точке M_0 был меньше расстояния от центра тяжести до этой точки. Если же $R > d$, то для неустойчивости достаточно, чтобы в невозмущенном движении высота подскока h тела над плоскостью была больше величины h_*, вычисляемой по формуле

$$h_* = \frac{A}{2m(R-d)} \tag{4.2}$$

2. Пусть выполняется неравенство

$$0 < \mu_2 < 1 \tag{4.3}$$

Тогда корни характеристического уравнения комплексно сопряженные с модулями, равными единице

$$\rho_1 = \cos 2\pi\lambda + i \sin 2\pi\lambda, \qquad \rho_2 = \overline{\rho}_1$$

$$\lambda = \frac{1}{2\pi}\arccos(1 - 2\mu_2)$$

При условии (4.3) неподвижная точка $x = y = 0$ отображения (3.10) устойчива в линейном приближении.

3. При $\mu_2 = 0$ корни уравнения (4.1) кратны: $\rho_1 = \rho_2 = 1$, а линеаризованное отображение имеет вид $x_1 = x + y$, $y_1 = y$. В линейном приближении неподвижная точка $x = y = 0$ отображения (3.10) неустойчива.

4. Если $\mu_2 = 1$, то корни характеристического уравнения кратны: $\rho_1 = \rho_2 = -1$, а линеаризованное отображение имеет вид $x_1 = -x + y$, $y_1 = -y$. Неподвижная точка неустойчива в линейном приближении.

Для строгого решения задачи об устойчивости неподвижной точки $x = y = 0$ в случаях 2, 3, 4 необходим учет нелинейных членов в правых частях равенств (3.10).

5. Нелинейный анализ в области устойчивости линейной задачи. Пусть параметр μ_2 лежит в области (4.3). Каноническая замена переменных

$$x = \gamma Q, \qquad y = \gamma^{-1}P(\gamma = (\sin 2\pi\lambda)^{-1/2}) \tag{5.1}$$

приводит линейную часть отображения (3.10) к нормальной форме – повороту на угол $2\pi\lambda$. После замены (5.1) отображение принимает такой вид:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \cos 2\pi\lambda Q + \sin 2\pi\lambda P + \sum_{m+n=2}^{3} a_{mn}Q^m P^n + O_4 \\ P_1 &= -\sin 2\pi\lambda Q + \cos 2\pi\lambda P + \sum_{m+n=2}^{3} b_{mn}Q^m P^n + O_4 \end{aligned} \tag{5.2}$$

$$a_{20} = \gamma k_{20}, \quad a_{11} = 0, \quad a_{02} = 0$$

$$b_{20} = \gamma^3 l_{20}, \quad b_{11} = \gamma l_{11}, \quad b_{02} = \gamma^{-1} l_{02}$$

$$a_{30} = \gamma^2 k_{30}, \quad a_{21} = k_{21}, \quad a_{12} = \gamma^{-2} k_{12}, \quad a_{03} = \gamma^{-4} k_{03}$$

$$b_{30} = \gamma^4 l_{30}, \quad b_{21} = \gamma^2 l_{21}, \quad b_{12} = l_{12}, \quad b_{03} = \gamma^{-2} l_{03}$$

Для строгого решения задачи об устойчивости неподвижной точки $Q = P = 0$ отображения (5.2) необходимо получить его нелинейную нормальную форму. Она будет различной в зависимости от того, есть резонансы третьего и четвертого порядков или нет. При резонансе третьего порядка выполняется равенство $3\lambda = 1$, при этом $\mu_2 = 3/4$. При резонансе четвертого порядка имеем $4\lambda = 1$, для этого резонанса $\mu_2 = 1/2$.

Рассмотрим сначала случай, когда резонансы третьего и четвертого порядка отсутствуют, т.е. μ_2 лежит в области (4.3) и $\mu_2 \neq 1/2, 3/4$. В этом случае вещественной канонической аналитической заменой переменных $Q, P \to \xi, \eta$ отображение (5.2) можно привести к такой форме [8]:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \cos 2\pi\lambda\,\xi + \sin 2\pi\lambda\,\eta + (\mu_{21}^*\xi + \nu_{21}^*\eta)(\xi^2+\eta^2) + O_4 \\ \eta_1 &= -\sin 2\pi\lambda\,\xi + \cos 2\pi\lambda\,\eta - (\nu_{21}^*\xi - \mu_{21}^*\eta)(\xi^2+\eta^2) + O_4 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Выражения для коэффициентов μ_{21}^*, ν_{21}^* нормальной формы (5.3) через коэффициенты отображения (5.2) приведены в [8].

Если величина $\mu_{21}^{*2} + \nu_{21}^{*2}$ отлична от нуля, то неподвижная точка отображения устойчива [8, 9].

Вычисления по формулам из [8] показывают, что в изучаемой задаче

$$\mu_{21}^* = \frac{1}{4\sin 2\pi\lambda}\left[\mu_1\mu_2^2(2+\mu_2) - 12\mu_4 + \frac{9\mu_3^2(5-8\mu_2)}{\mu_2(3-4\mu_2)}\right], \quad \nu_{21}^* = -\operatorname{ctg} 2\pi\lambda\,\mu_{21}^*$$

Следовательно, для μ_2 из области (4.3) и $\mu_2 \neq 1/2, 3/4$ достаточным условием устойчивости неподвижной точки отображения является выполнение неравенства

$$\mu_4 \neq \frac{1}{12}\mu_1\mu_2^2(2+\mu_2) + \frac{3\mu_3^2(5-8\mu_2)}{4\mu_2(3-4\mu_2)} \tag{5.4}$$

Рассмотрим случай резонанса третьего порядка, когда $\mu_2 = 3/4$. В этом случае отображение (5.2), нормализованное до членов третьей степени включительно, имеет вид [8]:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -\tfrac{1}{2}\xi + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\eta + \mu_{02}(\xi^2 - \eta^2) - 2\nu_{02}\xi\eta + O_3 \\ \eta_1 &= -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\xi - \tfrac{1}{2}\eta - \nu_{02}(\xi^2 - \eta^2) - 2\mu_{02}\xi\eta + O_3 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Коэффициенты μ_{02}, ν_{02} выражаются через коэффициенты отображения (5.2) по формулам, приведенным в [8].

Если хотя бы одна из величин μ_{02} или ν_{02} отлична от нуля, то неподвижная точка $Q = P = 0$ отображения (5.2) неустойчива [8].

Вычисления показывают, что $\mu_{02} = -(\sqrt[4]{108}/2)\mu_3$, $\nu_{02} = -(\sqrt[4]{12}/2)\mu_3$. Следовательно, если $\mu_3 \neq 0$, то имеет место неустойчивость. Если же $\mu_3 = 0$, то вместо нормальной формы (5.5) будем иметь нормальную форму (5.3), в которой коэффициенты μ_{21}^*, ν_{21}^* должны вычисляться при $\mu_2 = 3/4$, $\mu_3 = 0$. Из (5.4) получаем тогда достаточное условие устойчивости в виде неравенства

$$\mu_4 \neq \tfrac{33}{256}\mu_1 \tag{5.6}$$

Пусть теперь $\mu_2 = 1/2$, когда имеет место резонанс четвертого порядка. В этом случае нормализованное до членов третьей степени включительно отображение (5.2) будет таким [8]:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \eta + \mu_{21}^*\xi(\xi^2+\eta^2) + \mu_{03}^*\xi(\xi^2 - 3\eta^2) + \nu_{03}^*\eta(\eta^2 - 3\xi^2) + O_4 \\ \eta_1 &= -\xi + \mu_{21}^*\eta(\xi^2+\eta^2) - \nu_{03}^*\xi(\xi^2 - 3\eta^2) + \mu_{03}^*\eta(\eta^2 - 3\xi^2) + O_4 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Выражения коэффициентов μ_{21}^*, μ_{03}^*, ν_{03}^* через коэффициенты отображения (5.2) имеются в [8].

При выполнении неравенства $\mu_{21}^{*2} > \mu_{03}^{*2} + \nu_{03}^{*2}$ неподвижная точка $Q = P = 0$ отображения (5.2) устойчива; если же $\mu_{21}^{*2} < \mu_{03}^{*2} + \nu_{03}^{*2}$, то имеет место неустойчивость [8].

Вычисления показывают, что при $\mu_2 = 1/2$ имеем $\mu_{21}^* = \frac{5}{32}\mu_1 + \frac{9}{2}\mu_3^2 - 3\mu_4$, $\mu_{03}^* = -\frac{9}{2}\mu_3^2 - \mu_4$, $\nu_{03}^* = 0$.

Следовательно, условие устойчивости записывается в виде неравенства $|\mu_{21}^*| > |\mu_{03}^*|$. Это неравенство выполняется, когда

$$\mu_4 < \frac{5}{128}\mu_1 \tag{5.8}$$

или когда

$$\mu_4 > \frac{9}{2}\mu_3^2 + \frac{5}{64}\mu_1 \tag{5.9}$$

При выполнении же неравенств

$$\frac{5}{128}\mu_1 < \mu_4 < \frac{9}{2}\mu_3^2 + \frac{5}{64}\mu_1 \tag{5.10}$$

имеет место неустойчивость.

6. Нелинейный анализ на границе области устойчивости линейной задачи. Рассмотрим значения параметра μ_2, являющиеся границами области (4.3) устойчивости в линейном приближении. Пусть $\mu_2 = 0$.

Так как $h > 0$, то это возможно лишь в случае $R = d$. При $\mu_2 = 0$ отображение (3.10) записывается в виде

$$x_1 = x + y + \sum_{m+n=2}^{3} a_{mn}x^m y^n + O_4, \quad y_1 = y + \sum_{m+n=2}^{3} b_{mn}x^m y^n + O_4 \tag{6.1}$$

где a_{mn} и b_{mn} – это соответственно величины k_{mn} и l_{mn}, задающиеся формулами (3.11), в которых надо положить $\mu_2 = 0$.

Если в (6.1) имеем $b_{20} \neq 0$, то, согласно [8], неподвижная точка $x = y = 0$ отображения неустойчива; если же $b_{20} = 0$, то при выполнении неравенства $2b_{30} + b_{11}^2 < 0$ имеет место устойчивость, а при $2b_{30} + b_{11}^2 > 0$ – неустойчивость.

Учитывая формулы (3.11), получаем отсюда, что при $\mu_3 \neq 0$ имеет место неустойчивость. Если же $\mu_3 = 0$, то при $\mu_4 < 0$ неподвижная точка неустойчива, а при $\mu_4 > 0$ устойчива.

Пусть теперь $\mu_2 = 1$. Отображение (3.10) имеет в этом случае следующий вид:

$$x_1 = -x + y + \sum_{m+n=2}^{3} a_{mn}x^m y^n + O_4, \quad y_1 = -y + \sum_{m+n=2}^{3} b_{mn}x^m y^n + O_4 \tag{6.2}$$

где a_{mn} и b_{mn} – это соответственно величины k_{mn} и l_{mn} из формул (3.11), в которых $\mu_2 = 1$.

Если коэффициенты отображения (6.2) удовлетворяют неравенству $2b_{30} - b_{20}^2 < 0$, то, согласно [8], неподвижная точка $x = y = 0$ устойчива. Если же $2b_{30} - b_{20}^2 > 0$, то имеет место неустойчивость.

Вычислив коэффициенты b_{30}, b_{20}, получаем отсюда, что при выполнении неравенства

$$\mu_4 < \frac{1}{4}\mu_1 + \frac{9}{4}\mu_3^2 \tag{6.3}$$

неподвижная точка отображения (6.2) устойчива; при противоположном знаке в неравенстве (6.3) имеет место неустойчивость.

7. Выводы. Суммируем полученные результаты исследования изоэнергетической орбитальной устойчивости периодического движения тела над плоскостью. Сводку результатов дадим в виде неравенств содержащих размерные величины d, R, h, m, A, f_i, смысл которых пояснён в п. 1.

(a) если $R < d$, то имеет место неустойчивость;

(b) если $R = d$, то при $f_3 \neq 0$ движение неустойчиво; если же $f_3 = 0$, то при $f_4 > 0$ имеет место устойчивость, а при $f_4 < 0$ – неустойчивость;

(c) если $R > d$ и $h = h_4 = \frac{1}{4}A[m(R-d)]^{-1}$, то при выполнении одного из неравенств

$$f_4 < \frac{5m(R-d)^3}{8A} \quad \text{или} \quad f_4 > \frac{9f_3^2}{2(R-d)} + \frac{5m(R-d)^3}{4A}$$

периодическое движение тела орбитально устойчиво, а если выполняются нервенства

$$\frac{5m(R-d)^3}{8A} < f_4 < \frac{9f_3^2}{2(R-d)} + \frac{5m(R-d)^3}{4A}$$

то движение неустойчиво;

(d) если $R > d$ и $h = h_3 = \frac{3}{8}A[m(R-d)]^{-1}$, то при $f_3 \neq 0$, имеет место неустойчивость; если же $f_3 = 0$, но при этом $f_4 \neq \frac{11}{18}m(R-d)^3 A^{-1}$, то движение орбитально устойчиво;

(e) если $R > d$, $0 < h < h_* = \frac{1}{2}A[m(R-d)]^{-1}$, $h \neq h_3$, $h \neq h_4$ и $f_4 \neq$ $\neq \dfrac{[A+mh(R-d)](R-d)^2}{6Ah} + \dfrac{3[5A-16mh(R-d)]f_3^2}{2[3A-8mh(R-d)](R-d)}$, то периодическое движение тела орбитально устойчиво;

(f) если $R > d$, $h = h_*$ и выполняется неравенство

$$f_4 < \frac{m(R-d)^3}{2A} + \frac{9f_3^2}{2(R-d)}$$

то имеет место орбитальная устойчивость. Если же последнее неравенство выполняется с противоположным знаком, то движение неустойчиво;

(g) если $R > d$ и $h > h_*$, то движение неустойчиво.

8. Пример. Пусть тело представляет собой эллипсоид вращения, поверхность которого в системе координат $G\xi\eta\zeta$ задается уравнением

$$\xi^2 a^{-2} + \eta^2 a^{-2} + \zeta^2 c^{-2} = 1$$

В невозмущенном движении эллипсоид имеет нулевую угловую скорость и периодически соударяется с плоскостью концом оси симметрии $G\zeta$.

Имеем

$$d = c, \quad R = a^2 c^{-1}, \quad A = \tfrac{1}{5}m(a^2 + c^2), \quad f = (a^2 \sin^2\theta + c^2\cos^2\theta)^{1/2}$$

$$f_2 = \tfrac{1}{2}(a^2 - c^2)c^{-1}, \quad f_3 = 0, \quad f_4 = -\tfrac{1}{24}(a^2 - c^2)(3a^2 + c^2)c^{-3}$$

Очевидно, что при $a = c$ имеет место неустойчивость, так как в этом случае эллипсоид вырождается в шар, ударный импульс не создает момента относительно центра шара и в возмущенном движении угол между осью $G\zeta$ и вертикалью может монотонно возрастать.

Если эллипсоид вытянут вдоль оси симметрии ($a < c$), то, как следует из п. 7, периодическое движение неустойчиво.

Если же эллипсоид сплюснут ($a > c$), то при условии

$$h > \frac{c(a^2 + c^2)}{10(a^2 - c^2)}$$

имеет место неустойчивость, а при выполнении неравенств

$$0 < h \leqslant \frac{c(a^2 + c^2)}{10(a^2 - c^2)}$$

рассматриваемое периодическое движение эллипсоида орбитально устойчиво.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00220).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 2. М.: Физматгиз, 1960. 487 с.
2. *Маркеев А.П.* Об устойчивости вращения твердого тела вокруг вертикали при наличии соударений с горизонтальной плоскостью // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 3. С. 363–369.
3. *Маркеев А.П., Холостова О.В.* Об устойчивости движения твердого тела при наличии соударений с вибрирующей горизонтальной плоскостью // Некоторые задачи и методы исследования динамики механических систем. М.: МАИ, 1985. С. 34–40.
4. *Иванов А.П.* Об устойчивости в системах с неудерживающими связями // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 5. С. 725–732.
5. *Иванов А.П.* О периодических движениях тяжелого симметричного твердого тела с ударами о горизонтальную плоскость // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 2. С. 30–35.
6. *Маркеев А.А.* Об устойчивости перманентного вращения тела с неудерживающей связью // Вестн. МГУ. Математика, механика. 1992. № 3. С. 48–54.
7. *Маркеев А.П.* Исследование устойчивости периодического движения твердого тела при наличии соударений с горизонтальной плоскостью // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 3. С. 71–81.
8. *Маркеев А.П.* О сохраняющих площадь отображениях и их применении в динамике систем с соударениями // Изв. АН. МТТ. 1996. № 2. С. 37–54.
9. *Мозер Ю.* Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973. 167 с.

Москва

Поступила в редакцию
6. I. 1996