

УДК 531.55:521.2

© 1997 г. А.А. ВОРОНИН

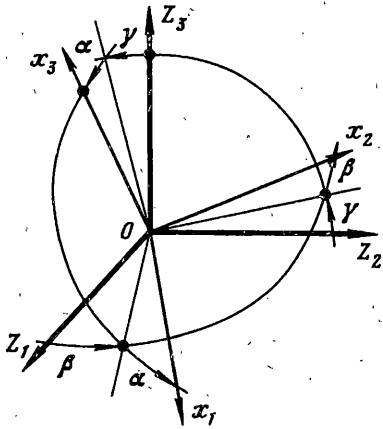
О ВОЗМОЖНОСТИ ТРЕХОСНОЙ МАГНИТОГИРОСКОПИЧЕСКОЙ ОРИЕНТАЦИИ ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ ЗЕМЛИ

Рассматривается движение относительно центра масс спутника-гиростата с постоянным магнитом под действием гравитационного и магнитного моментов на круговой орбите в магнитном поле Земли, описываемое системой обыкновенных дифференциальных уравнений шестого порядка. Предполагается, что собственный кинетический момент гиростата и дипольный момент магнита спутника велики и уравнения движения содержат большой параметр. В рамках упрощенной модели геомагнитного поля в [1] построены периодические решения этих уравнений, которые предложено использовать для описания вращательного движения спутника в режиме трехосной ориентации на околополярных орбитах в течение нескольких орбитальных периодов. Здесь для уточненной модели геомагнитного поля на основе подходов [2, 3] исследуется вращательное движение этого спутника на длительном интервале времени, а также возможность описания этого движения решениями вырожденной системы, порядок которой равен двум.

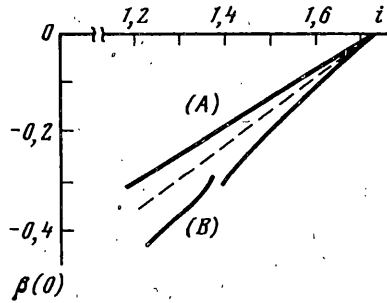
Несмотря на широкое использование в космической технике активных систем управления, пассивные системы ориентации искусственных спутников Земли (ИСЗ) сохранили свое значение при длительном времени их функционирования и не слишком высоких требованиях к точности ориентации. Пассивная ориентация осуществляется действием на спутник внешних моментов естественного происхождения (гравитационный, магнитный, аэродинамический и др.), а также гироскопических моментов со стороны размещенных на нем роторов. Управление движением достигается здесь созданием необходимых динамических характеристик спутника и сообщением ему заданных начальных условий.

Один из подходов к построению систем пассивной ориентации основан на использовании относительно большой величины некоторых внешних моментов. Уравнения вращательного движения таких спутников содержат большой параметр и в ряде случаев допускают интегральные поверхности меньшей размерности, которые можно использовать для описания ориентированных движений. Так, в [4, 5] исследована одноосная ориентация ИСЗ, использующая стабилизирующее действие гироскопического или магнитного моментов. Совмещение их в единую магнитогироскопическую систему позволяет достичь трехосной ориентации спутника.

Упрощенной моделью спутника с магнитогироскопической системой ориентации может служить спутник-гиростат с размещенным внутри постоянным магнитом. Уравнения вращательного движения такого спутника содержат большой параметр, характеризующий действующий на него магнитный механический и собственный кинетический моменты. В рамках упрощенной модели геомагнитного поля эти уравнения допускают π -периодические решения, которые в [1] предложено использовать для описания движений спутника в режиме трехосной ориентации в течение суток. В настоящей работе изучается возможность реализации такого режима на большом отрезке времени при уточнении модели геомагнитного поля.



Фиг. 1



Фиг. 2

1. Уравнения движения и постановка задачи. Рассмотрим искусственный спутник Земли, представляющий собой твердое тело с установленными на нем постоянным магнитом и вращающимся симметричным ротором. Полагаем, что кинетический момент ротора относительно несущего тела постоянен и параллелен одной из главных центральных осей инерции спутника. Дипольный момент магнита параллелен другой главной центральной оси инерции. Орбита круговая и неизменна в абсолютном пространстве. Будем считать, что собственный кинетический момент ротора и дипольный момент магнита велики, и исследуем возможность трехосной ориентации спутника в системе координат, связанной с вектором напряженности магнитного поля Земли и нормально к плоскости орбиты.

Ниже будут использоваться четыре правые декартовы системы координат: система $OZ_1Z_2Z_3$, относительно которой изучается ориентация спутника; система $Ox_1x_2x_3$, образованная главными центральными осями инерции спутника; орбитальная система $OX_1X_2X_3$ и географическая $Oz_1z_2z_3$. Оси Ox_1 и Ox_2 параллельны соответственно вектору дипольного момента магнита и оси вращения ротора, оси OX_3 и OX_1 направлены вдоль радиуса-вектора точки O относительно центра Земли и по касательной к орбите в сторону движения спутника. Ось Oz_1 географической системы координат направлена в сторону Северного полюса по касательной меридиану, проходящему через центр масс спутника, ось Oz_3 направлена противоположно оси OX_1 . Орты e_j осей OZ_j ($j = 1, 2, 3$) имеют вид

$$e_1 = \frac{\mathbf{H}}{|\mathbf{H}|}, \quad e_3 = \frac{e_1 \times \mathbf{n}}{|e_1 \times \mathbf{n}|}, \quad e_2 = e_3 \times e_1$$

где \mathbf{H} – напряженность магнитного поля Земли в точке O , \mathbf{n} – орт оси OX_2 .

Положение системы $Ox_1x_2x_3$ по отношению к системе $OZ_1Z_2Z_3$ определим с помощью углов α , β и γ (фиг. 1) с матрицей перехода $\|a_{jk}\|_{j,k=1}^3$:

$$a_{11} = \cos \alpha \cos \beta, \quad a_{21} = \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma$$

$$a_{12} = -\sin \beta, \quad a_{22} = \cos \beta \cos \gamma$$

$$a_{13} = \sin \alpha \cos \beta, \quad a_{23} = \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \cos \alpha \sin \gamma$$

$$a_{31} = \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma, \quad a_{32} = \cos \beta \sin \gamma$$

$$a_{33} = \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma$$

где a_{jk} – косинус угла между осями OZ_j и Ox_k . Элементы матрицы перехода $\|h_{jk}\|_{j,k=1}^3$

между системами $OX_1X_2X_3$ и $OZ_1Z_2Z_3$ (h_{jk} – косинус угла между осями OX_j и OZ_k) имеют вид [2]:

$$\begin{aligned} h_{11} &= H_1/H, & h_{12} &= -H_1H_2/(HH_0), & h_{13} &= -H_3/H_0 \\ h_{21} &= H_2/H, & h_{22} &= H_0^2/(HH_0), & h_{23} &= 0 \\ h_{31} &= H_3/H, & h_{32} &= -H_2H_3/(HH_0), & h_{33} &= H_1/H_0 \\ H &= |\mathbf{H}|, & H_0 &= \sqrt{H_1^2 + H_3^2}, & \mathbf{H} &= (H_1, H_2, H_3)_X \end{aligned}$$

Проекции вектора \mathbf{H} на оси орбитальной системы координат имеют вид

$$H_1 = H'_1 \cos \delta + H'_2 \sin \delta, \quad H_2 = H'_1 \sin \delta - H'_2 \cos \delta, \quad H_3 = -H'_3$$

где δ – угол между осями OX_1 и Oz_1 , H'_i – проекции вектора \mathbf{H} на оси Oz_i .

Для вычисления величин H'_i необходимо задаться какой-либо моделью геомагнитного поля. За основу такой модели примем модель Гаусса, в которой потенциал магнитного поля Земли задается в виде ряда [6]:

$$U = R_3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R_3}{r} \right)^{n+1} \sum_{m=0}^n (g_n^m \cos m\varphi + h_n^m \sin m\varphi) P_n^m(\cos \vartheta) \quad (1.1)$$

где R_3 – радиус Земли, r, φ, ϑ – сферические координаты точки O_1 (проекции центра масс спутника на поверхность Земли вдоль радиуса-вектора), r – радиус-вектор, φ – долгота, ϑ – угол, дополняющий широту до $\pi/2$, g_n^m, h_n^m – численные коэффициенты, P_n^m – присоединенные функции Лежандра. Справедливы соотношения [6]:

$$\begin{aligned} \cos \vartheta &= \sin i \sin u, & \sin \varphi_1 &= L^{-1} \cos i \sin u, & \cos \varphi_1 &= L^{-1} \cos u \\ \sin \delta &= L^{-1} \cos i, & \cos \delta &= L^{-1} \sin i \cos u, & L &= \sqrt{1 - \sin^2 i \sin^2 u} \\ \varphi &= \varphi_1 + \Omega_0 - \varepsilon u, & \varepsilon &= \Omega_3/\omega_0 \end{aligned}$$

где φ_1 – долгота точки O_1 , отсчитываемая от восходящего узла, Ω_0 – долгота восходящего узла, Ω_3 – угловая скорость вращения Земли.

Уравнения движения спутника относительно центра масс, учитывающие механические моменты, обусловленные действием на спутник гравитационного и магнитного полей Земли, имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= \frac{3\lambda + \nu}{3 + \lambda\nu} (\omega_2\omega_3 - 3l_2l_3) + \frac{h(3 - \nu)}{3 + \lambda\nu} \omega_3 \\ \dot{\omega}_2 &= -\frac{\nu}{3} (\omega_1\omega_3 - 3l_1l_3) - \frac{\chi N(3 - \nu)}{3(1 + \lambda)} a_{13} \\ \dot{\omega}_3 &= -\lambda(\omega_1\omega_2 - 3l_1l_2) + \chi N a_{12} - h\omega_1 \\ \dot{\gamma} &= \sec \beta (\omega_1 \cos \alpha + \omega_3 \sin \alpha) - \Phi_1 - \Psi_2(\gamma) \operatorname{tg} \beta \\ \dot{\alpha} &= \omega_2 + \operatorname{tg} \beta (\omega_1 \cos \alpha + \omega_3 \sin \alpha) - \Psi_2(\gamma) \sec \beta \\ \dot{\beta} &= -\omega_1 \sin \alpha + \omega_3 \cos \alpha - \Psi_3(\gamma) \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\Psi_2(\gamma) = \Phi_2 \cos \gamma + \Phi_3 \sin \gamma, \quad \Psi_3(\gamma) = -\Phi_2 \sin \gamma + \Phi_3 \cos \gamma$$

Здесь точкой обозначено дифференцирование по u ; ω_1, ω_2 и ω_3 – отнесенные к ω_0 компоненты абсолютной угловой скорости спутника в системе координат $Ox_1x_2x_3$; $\lambda = (B - C)/A$, $\nu = 3(A - C)/B$, где A, B, C – главные центральные моменты инерции

спутника; $h = K/C\omega_0$, $\chi = dm_E / C\omega_0^2 r^3$, K и d – абсолютные величины соответственно собственного кинетического момента ротора и дипольного момента магнита спутника, $N = H_0 r^3 / m_E$, m_E – дипольный момент Земли; $l_i = h_{3k} a_{ki}$ – компоненты орта оси OX_3 в системе $Ox_1x_2x_3$; $\Phi_k = h_{2k} - (2\omega_0)^{-1} e_{kmn} h_{sm} h_{sn}$, где ω_0 – угловая скорость орбитального движения, $\omega_0 \Phi_k$ – проекции абсолютной угловой скорости системы $OZ_1Z_2Z_3$ на ее собственные оси; e_{kmn} – символы Леви-Чивита и по повторяющимся индексам производится суммирование.

В колебаниях, совершаемых спутником вокруг центра масс, можно выделить медленные прецессионные составляющие с частотой $\sim \sqrt{\chi}/h$ – по углам γ и β и быстрые: нутационные с частотой $\sim h$ также по углам γ и β и колебания, обусловленные действием восстанавливающего механического момента со стороны геомагнитного поля с частотой $\sim \sqrt{\chi}$ – по углам α и β , причем их амплитуды обратно пропорциональны частотам. Следовательно, основной вклад в относительное движение спутника в режиме трехосной ориентации вносят медленные колебания. Для их поиска при больших h и χ может быть использована вырожденная система, получаемая из (1.2) при $h \rightarrow \infty$, $\chi = ah$ (a – заданное число). Эта система имеет вид

$$\omega_1 = -aN \sin \beta, \quad \omega_2 = [aN \sin^2 \beta + \Psi_2(\gamma)] \sec \beta, \quad \omega_3 = \alpha = 0 \quad (1.3)$$

$$\dot{\gamma} = -\operatorname{tg} \beta [aN + \Psi_2(\gamma)] - \Phi_1, \quad \dot{\beta} = -\Psi_3(\gamma)$$

Для дальнейшего анализа заметим, что правые части уравнений (1.2) с использованием векторных обозначений можно записать в виде $\mathbf{f}(u) = \mathbf{f}_1(u) + \epsilon \mathbf{f}_2(u)$, причем $\mathbf{f}_1(u + \pi) = \mathbf{f}_1(u)$. Если $\omega_0 \gg \Omega_3$, то для анализа движений спутника на интервалах времени порядка нескольких орбитальных периодов можно использовать упрощенную модель геомагнитного поля, учитывающую только первый член разложения (1.1). При этом геомагнитное поле заменяется полем диполя, расположенного в центре Земли и неподвижного в абсолютном пространстве. Достоинством этих уравнений является то, что независимая переменная u входит в них π -периодически. Если период обращения спутника по орбите $2\pi/\omega_0 \approx 100$ мин, то устойчивые π -периодические решения этих уравнений, близкие при больших h к π -периодическим решениям вырожденной системы (1.3), могут служить хорошей аппроксимацией установившихся движений спутника, в том числе и его движений в режиме трехосной ориентации относительно системы координат $OZ_1Z_2Z_3$ на интервале времени порядка орбитального периода. Построив такие решения для различных значений i , можно судить о возможности реализации трехосной ориентации на интервале времени порядка суток. Такие исследования проведены в [1], где существование указанных решений доказано аналитически, и с помощью численных методов они построены в явном виде. (На фиг. 2 для этих решений указана зависимость $\beta(0)$ от i ($\beta^*(i)$) (кривая (B)). В качестве порождающих использовались периодические решения системы (1.3), которым на фиг. 2 отвечает кривая (A).) Там же для погрешности ориентации спутника получена оценка $O(|i - \pi/2| + h^{-1})$ и, тем самым, установлено, что с помощью рассматриваемых движений достаточно точная трехосная ориентация спутника в системе $OZ_1Z_2Z_3$ может быть реализована только на околополярной орбите.

Для исследования возможности реализации трехосной ориентации спутника на большем интервале времени необходимо использовать уточненную модель геомагнитного поля, учитывающую несколько членов в разложении потенциала U . При этом ориентированное движение спутника будем описывать решениями уравнений (1.2), начинающимися в асимптотической (по ϵ) окрестности кривых фиг. 2. Для анализа возмущенного движения спутника исследуем асимптотические (по h) свойства соседних траекторий.

2. Аналитическое исследование возмущенного движения спутника. Рассмотрим вопрос о существовании решений уравнений (1.2), начинающихся в асимптотически малой окрестности некоторого решения системы (1.3) и определенных для значений (u, h) из некоторого неограниченного множества $I_h = [0, \Phi(h^\mu)] \times [H, +\infty)$, где $\mu \in (0, \mu^0)$, μ^0 и H – некоторые положительные постоянные, $\Phi(h^\mu)$ – некоторая непрерывная, неотрицательная, монотонно возрастающая, неограниченная при $h \rightarrow \infty$ функция, а также построим их асимптотическое приближение в виде рядов по степеням h^{-1} .

Возьмем произвольное целое неотрицательное n и введем функции

$$\omega_1^*(Y, h) = \sum_{k=0}^n h^{-k} \Omega_{1k}(Y), \quad \omega_2^*(Y, h) = \sum_{k=0}^n h^{-k} \omega_{2k}(Y) \quad (2.1)$$

$$\omega_3^*(Y, h) = \sum_{k=0}^n h^{-k} \Omega_{3k}(Y), \quad \alpha^*(Y, h) = \sum_{k=0}^n h^{-k} \alpha_k(Y), \quad Y = (u, i, \gamma, \beta)$$

где переменные γ и β удовлетворяют уравнениям

$$\dot{\gamma} = \sum_{k=0}^n h^{-k} P_k(Y), \quad \dot{\beta} = \sum_{k=0}^n h^{-k} Q_k(Y) \quad (2.2)$$

Подставив эти ряды в уравнения (1.2) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях h в левой и правой ее частях, получим цепочку рекуррентных соотношений, единственным образом определяющую коэффициенты этих рядов.

В рамках упрощенной модели геомагнитного поля система (2.1), (2.2) допускает π -периодические решения, с точностью до $O(h^{-n-1})$ совпадающие с найденными в [1] периодическими решениями уравнений (1.2). (Соответствующая кривая для $n = 1$ проведена на фиг. 2 штриховой линией.)

Пусть $\gamma = \gamma^{(n)}(u, i, h)$, $\beta = \beta^{(n)}(u, i, h)$ – некоторое решение системы (2.2). Обозначим $\omega_k^{(n)}(u, i, h) = \omega_k^*(u, i, \gamma^{(n)}, \beta^{(n)}, h)$ ($k = 1, 2, 3$), $\alpha^{(n)}(u, i, h) = \alpha^*(u, i, \gamma^{(n)}, \beta^{(n)}, h)$, $\mu^0 = \min(1/2, (2n+1)/4)$. Введем переменные $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T$, $p = (p_1, p_2)^T$, $x = (x_1, x_2)^T$ при помощи соотношений

$$\omega_1 = p_1 + \omega_1^{(n)}, \quad \omega_2 = x_1 + \omega_2^{(n)}, \quad \omega_3 = p_2 + \omega_3^{(n)}$$

$$\alpha = x_2 + \alpha^{(n)}, \quad \gamma = \xi_1 + \gamma^{(n)}, \quad \beta = \xi_2 + \beta^{(n)}$$

В результате (1.2) перейдет в систему

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= b_{11}\xi_1 + b_{12}\xi_2 + b_{13}p_1 + h^{-n-1}f_1^0 + f_1 \\ \dot{\xi}_2 &= b_{21}\xi_1 + p_2 + b_{26}x_2 + h^{-n-1}f_2^0 + f_2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\dot{p}_1 = (h\rho^2 + b_{34})p_2 + b_{31}\xi_1 + b_{32}\xi_2 + b_{36}x_2 + h^{-n}f_3^0 + f_3$$

$$p_2 = -(h - b_{43})p_1 + b_{41}\xi_1 + b_{42}\xi_2 + b_{45}x_1 + b_{46}x_2 + h^{-n}f_4^0 + f_4$$

$$x_1 = -(h\omega^2 - b_{56})x_2 + b_{51}\xi_1 + b_{52}\xi_2 + b_{53}p_1 + b_{54}p_2 + h^{-n}f_5^0 + f_5$$

$$x_2 = x_1 + b_{63}p_1 + h^{-n-1}f_6^0 + f_6$$

$$b_{11} = -\operatorname{tg} \beta^{(n)} \Psi_3(\gamma^{(n)}), \quad b_{12} = -\sec^2 \beta^{(n)} [aN + \Psi_2(\gamma^{(n)})]$$

$$b_{21} = \Psi_2(\gamma^{(n)}), \quad b_{34} = aN \cos \beta^{(n)} - \frac{(3\lambda + \nu)b_{43}}{\lambda(3 + \lambda\nu)}$$

$$b_{43} = -\lambda[aN \sin^2 \beta^{(n)} + \Psi_2(\gamma^{(n)})] \sec \beta^{(n)}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{(3-\nu)}{3(1+\lambda)} aN \cos \beta^{(n)}}, \quad \rho = \sqrt{\frac{3-\nu}{3+\lambda\nu}}$$

При $\xi, p, x, h^{-1} \rightarrow 0$ справедливы оценки

$$f_i^0 = f_i^0(u, i, h^{-1}) = O(1), \quad f_i = f_i(u, i, \xi, p, x, h^{-1}) = O(h^{-1}R_1 + R_2)$$

$$f_6(u, i, \xi, p, x, h) = O[h^{-1}R_1 + R_2 + h|x_2|(|x_2|^2 + |\xi_2|^2)] \quad (i = 1, \dots, 5)$$

Здесь и далее символами R_1 и R_2 обозначены соответственно линейная и билинейная формы фазовых переменных. (Явный вид функций f_1, \dots, f_6 и невыписанных коэффициентов b_{ij} в дальнейшем не понадобится.)

Следующие преобразования служат для упрощения уравнений (2.3) и выполняются по схеме:

$$\begin{aligned} (\xi_1, \xi_2, p_1, p_2, x_1, x_2) &\xrightarrow{\text{I}} (\xi_1, \xi_2, v_1, v_2, q, x_2) \xrightarrow{\text{II}} (\xi_1, \xi_2, u_1, u_2, z_1, z_2) \rightarrow \\ &\xrightarrow{\text{III}} (\xi_1, \xi_2, w_1, w_2, y_1, y_2) \xrightarrow{\text{IV}} (\eta_1, \eta_2, w_1, w_2, y_1, y_2) \end{aligned}$$

$$v_j = p_j - p_j^0 \quad (j = 1, 2), \quad q = x_2 - x_2^0 \quad (\text{I})$$

где функции p_1^0, p_2^0 и x_2^0 находятся из линейной системы

$$\begin{aligned} (h\rho^2 + b_{34})p_2^0 + b_{36}x_2^0 &= -b_{31}\xi_1 - b_{32}\xi_2 \\ -(h - b_{43})p_1^0 + b_{46}x_2^0 &= -b_{41}\xi_1 - b_{42}\xi_2 \\ b_{53}p_1^0 + b_{54}p_2^0 - (h\omega^2 - b_{56})x_2^0 &= -b_{51}\xi_1 - b_{52}\xi_2 \end{aligned}$$

имеющей при достаточно большом h отличный от нуля определитель;

$$u_1 = v_1 - \frac{b_{46}}{h}q - \frac{b_{45}}{h}x_1, \quad u_2 = v_2 + \frac{1}{h\rho^2}(b_{36} + \omega^2 b_{45})q \quad (\text{II})$$

$$z_1 = x_1 - \frac{1}{h\rho^2}(b_{54} + \omega^2 b_{63})v_1 + \frac{b_{53}}{h}v_2 - h^{-n-1}f_6^0$$

$$z_2 = q + \frac{b_{63}}{h}v_2 - \frac{1}{\omega^2}h^{-n-1}f_5^0$$

$$u_1 = \left(1 + \frac{b_{34}}{2h}\right)w_1 - h^{-n-1}f_4^0, \quad u_2 = \frac{1}{\rho} \left(1 - \frac{b_{43}}{2\rho^2 h}\right)w_2 - \frac{1}{\rho^2}h^{-n-1}f_3^0 \quad (\text{III})$$

$$z_1 = y_1, \quad z_2 = \sqrt{h}\omega y_2 - \frac{\dot{\omega}}{2\omega}y_1$$

$$\xi_1 = \eta_1 - \frac{b_{13}}{\rho h}w_2, \quad \xi_2 = \eta_2 + \frac{w_1}{\rho h} - \frac{b_{26}}{\omega\sqrt{h}}y_2 \quad (\text{IV})$$

В результате этих преобразований система (2.3) перейдет в систему

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= A\eta + h^{-n-1}F_1^0 + F_1 \\ \dot{w} &= [h\rho + \varphi]Jw + h^{-n-1}F_2^0 + F_2 \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\dot{y} = \left[\sqrt{h}\omega J - \frac{\dot{\omega}}{2\omega}E \right] y + h^{-n-3/2}F_3^0 + F_3$$

$$\eta = (\eta_1, \eta_2)^T, \quad w = (w_1, w_2)^T, \quad y = (y_1, y_2)^T, \quad \varphi = \frac{1}{2}(\sqrt{\lambda}b_{34} - b_{43} / \sqrt{\lambda})$$

$$A = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & 0 \end{vmatrix}, \quad J = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad E = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Для F_i и F_i^0 при $\eta, w, y, h^{-1} \rightarrow 0$ справедливы оценки

$$\|F_i^0\| \leq \Phi_0(u) \quad (i=1,2,3), \quad \|F_i\| \leq \Phi_0(u)(h^{-1}R_1 + R_2) \quad (2.5)$$

$$\|F_2\| \leq \Phi_0(u)(h^{-1}R_1 + h^{-1/2}\|y\| + R_2).$$

$$\|F_3\| \leq \Phi_0(u)[h^{-1}R_1 + h^{-1/2}\|y\| + R_2 + h^{1/2}\|y\|(\|y\|^2 + \|\eta\|^2)]$$

где $\Phi_0(u)$ – некоторая функция. Справедлива теорема.

Теорема. Для любых чисел $B_i > 0$ и $\mu \in (0, \mu^0)$ существуют такие положительные постоянные C_i ($i=1, 2, 3$) и H и такая непрерывная, неотрицательная, монотонно возрастающая, неограниченная при $h \rightarrow +\infty$ функция $\Phi(h)$, что при $h \geq H$ всякое решение системы (2.4) $\eta(u, i, h)$, $w(u, i, h)$, $y(u, i, h)$ с начальными условиями, удовлетворяющими неравенствам

$$\|\eta(0, i, h)\| \leq B_1 h^{-n-1}, \quad \|w(0, i, h)\| \leq B_2 h^{-n-1}, \quad \|y(0, i, h)\| \leq B_3 h^{-n-1} \quad (2.6)$$

определено на отрезке $0 \leq u \leq \Phi(h^\mu)$ и удовлетворяет на нем оценкам

$$\|\eta(u, i, h)\| \leq C_1 h^{\mu-n-1}, \quad \|w(u, i, h)\| \leq C_2 h^{\mu-n-1}, \quad \|y(u, i, h)\| \leq C_3 h^{\mu-n-1} \quad (2.7)$$

Доказательство. Опишем построение функции $\Phi(h^\mu)$. Для фундаментальных матриц W_i линейных систем второго порядка в (2.4) при всех $0 \leq s \leq u < +\infty$, $h > 0$ справедливы оценки $\|W_i\| \leq \Phi_1(u)$ ($i=1, 2, 3$), где Φ_1 – некоторая функция. Пусть $\Phi_2(u)$ – некоторая непрерывная, неотрицательная, монотонно возрастающая, неограниченная при $u \rightarrow +\infty$ функция, удовлетворяющая неравенству $\Phi_2(u) \geq u\Phi_0(u)\Phi_1(u)$. Тогда $\Phi = \Phi_2^{-1}$.

Начальная задача $\eta(0) = \eta^*$, $w(0) = w^*$, $y(0) = y^*$ для уравнений (2.4) эквивалентна системе интегральных уравнений

$$\eta(u, h) = W_1(u, 0)\eta^* + \int_0^u W_1(u, s)[h^{-n-1}F_1^0(s) + F_1(s, \eta, w, y, h)]ds \equiv Q_\eta$$

$$w(u, h) = W_2(u, 0, h)w^* + \int_0^u W_2(u, s, h)[h^{-n-1}F_2^0(s) + F_2(s, \eta, w, y, h)]ds \equiv Q_w \quad (2.8)$$

$$y(u, h) = W_3(u, 0, h)y^* + \int_0^u W_3(u, s, h)[h^{-n-3/2}F_3^0(s) + F_3(s, \eta, w, y, h)]ds \equiv Q_y$$

Эту систему будем решать методом последовательных приближений. Построим на отрезке $0 \leq u \leq \Phi(h^\mu)$ последовательности функций $\{\eta_k(u, h)\}$, $\{w_k(u, h)\}$ и $\{y_k(u, h)\}$, положив

$$\eta_0 = \eta^*, \quad w_0 = w^*, \quad y_0 = y^* \quad (2.9)$$

$$\eta_{k+1} = Q_\eta(\eta_k, w_k, y_k), \quad w_{k+1} = Q_w(\eta_k, w_k, y_k), \quad y_{k+1} = Q_y(\eta_k, w_k, y_k)$$

Докажем, что при достаточно большом h эти последовательности сходятся к решению системы (2.8).

Нормой векторной функции $f(u)$, непрерывной на отрезке $[0, \Phi(h^\mu)]$ будем называть число $v(f) = \max\|f(u)\|$ ($u \in [0, \Phi(h^\mu)]$). Сначала докажем, что при достаточно большом h и $0 \leq u \leq \Phi(h^\mu)$ существуют также такие C_1, C_2, C_3 , что

$$v(\eta_k) \leq C_1 h^{\mu-n-1}, \quad v(w_k) \leq C_2 h^{\mu-n-1}, \quad v(y_k) \leq C_3 h^{\mu-n-1} \quad (k=0, 1, \dots) \quad (2.10)$$

Пусть $v(\eta_k) \leq \Delta$, $v(w_k) \leq \Delta$, $v(y_k) \leq \Delta$ ($k=0,1,\dots$), тогда при $h \geq H_1$ в силу неравенства (2.5) отрезке $0 \leq u \leq \Phi(h^\mu)$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} v(\eta_{k+1}) &\leq h^\mu [v(\eta_0) + h^{-n-1} + h^{-1}N_1 + N_2] \\ v(w_{k+1}) &\leq h^\mu [v(w_0) + h^{-n-1} + h^{-1}N_1 + h^{-1/2}v(y_k) + N_2] \\ v(y_{k+1}) &\leq h^\mu [v(y_0) + h^{-n-3/2} + h^{-1}N_1 + h^{-1/2}v(y_k) + N_2 + h^{1/2}v(y_k)(v^2(y_k) + v^2(\eta_k))] \\ N_1 &= v(\eta_k) + v(w_k) + v(y_k), \quad N_2 = v^2(\eta_k) + v(\eta_k)v(w_k) + \dots + v^2(y_k) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Выберем числа C_i так, чтобы выполнялись неравенства $C_i > B_i + 1$ и возьмем

$$h \geq H_2 = \max\{1, H_1, (C_i / \Delta)^{m_i}, (M / (C_i - B_i - 1))^{m_2} \quad (i=1,2,3)\}$$

$$M = 2(C + C^2), \quad C = C_1 + C_2 + C_3, \quad m_1 = 1 / (n + 1 - \mu)$$

$$m_2 = 1 / \mu_1, \quad \mu_1 = \min[1 - 2\mu, n + 1 - 4\mu]$$

Тогда, если для некоторого k неравенства (2.10) выполнены, то в силу (2.11) при $0 < \mu < \mu^0$ справедливы неравенства вида

$$v(\eta_{k+1}) \leq (B_1 + 1)h^{\mu-n-1} + Ch^{3\mu-n-2} + C^2h^{5\mu-2n-2} \leq C_1h^{2\mu-n-1} \leq \Delta$$

Поскольку при $k=0$ эти неравенства выполнены, отсюда следует их справедливость при всех k . Для доказательства сходимости последовательных приближений (2.9) рассмотрим последовательность $a_k = v(\eta_k - \eta_{k-1}) + v(w_k - w_{k+1}) + v(y_k - y_{k+1})$.

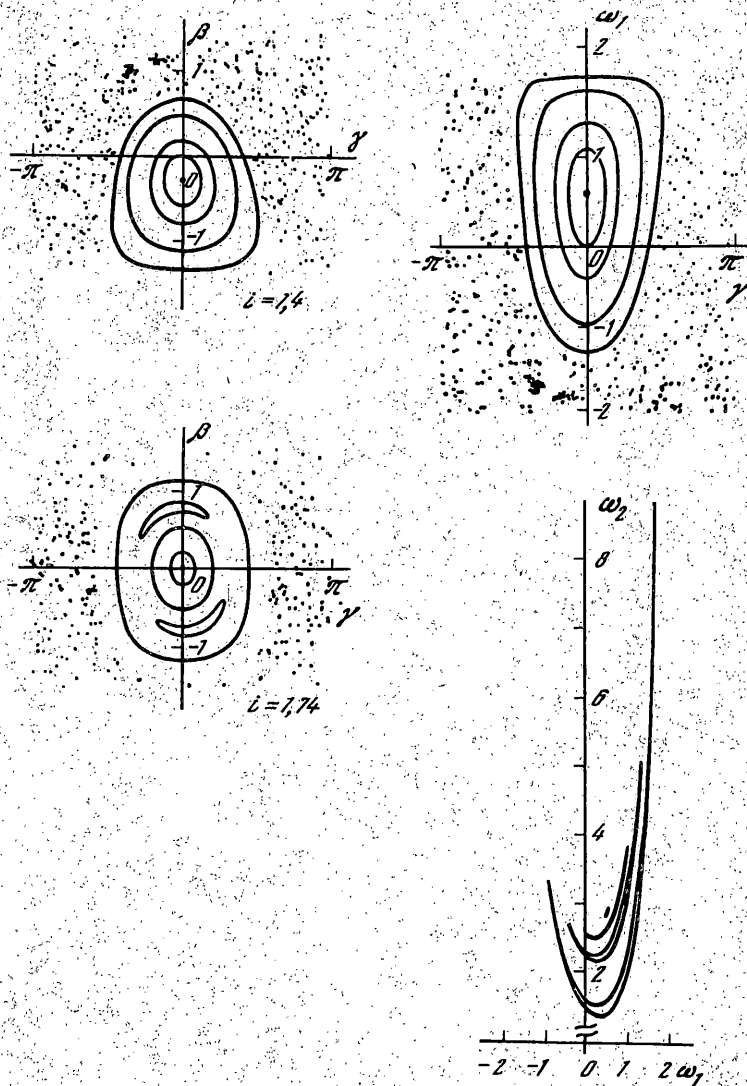
В силу неравенств (2.5) и (2.10) при $0 < \mu < \mu^0$ имеем $a_{k+1} \leq (6 + 12C)h^{-\mu}a_k$. Пусть $H = \max(H_2, (2Q)^{m_2})$. Тогда при $h \geq H$ выполнены неравенства $a_{k+1} \leq a_k / 2$ ($k=0,1,\dots$). Используя эту оценку, можно доказать, что последовательности $\{\eta_k(u, h)\}$, $\{w_k(u, h)\}$, $\{y_k(u, h)\}$ сходятся равномерно на множестве I_h к некоторым непрерывным функциям $\eta(u, h)$, $w(u, h)$, $y(u, h)$, удовлетворяющим неравенствам (2.6), (2.7). Переходя в соотношениях (2.9) к пределу при $k \rightarrow +\infty$, находим, что $\eta(u, h)$, $w(u, h)$, $y(u, h)$ — решение уравнений (2.8). Теорема доказана.

3. Численное исследование вращательного движения спутника. Практическая оценка точности описания возмущенного движения спутника решениями вырожденной системы (1.3) на отрезке $u \in [0, 200\pi]$ проводилась с помощью численных экспериментов.

При высотах орбит до 1000 км выполнено соотношение $\epsilon < 0,1$. Это обстоятельство, а также найденные в [1] периодические решения уравнений (1.2) позволяют использовать для анализа точечные отображения, полученные сечением плоскостями $u = \pi k$ ($k = 1, 2, \dots, 200$) траекторий, начинающихся в окрестности кривых, представленных на фиг. 2. Совокупность таких сечений для большого числа траекторий уравнений (1.2) при различных значениях параметра i дает достаточно полное представление о вращении спутника, а сопоставление их с соответствующими сечениями для системы (1.3) позволяет судить о возможности приближенного описания этого движения ее решениями.

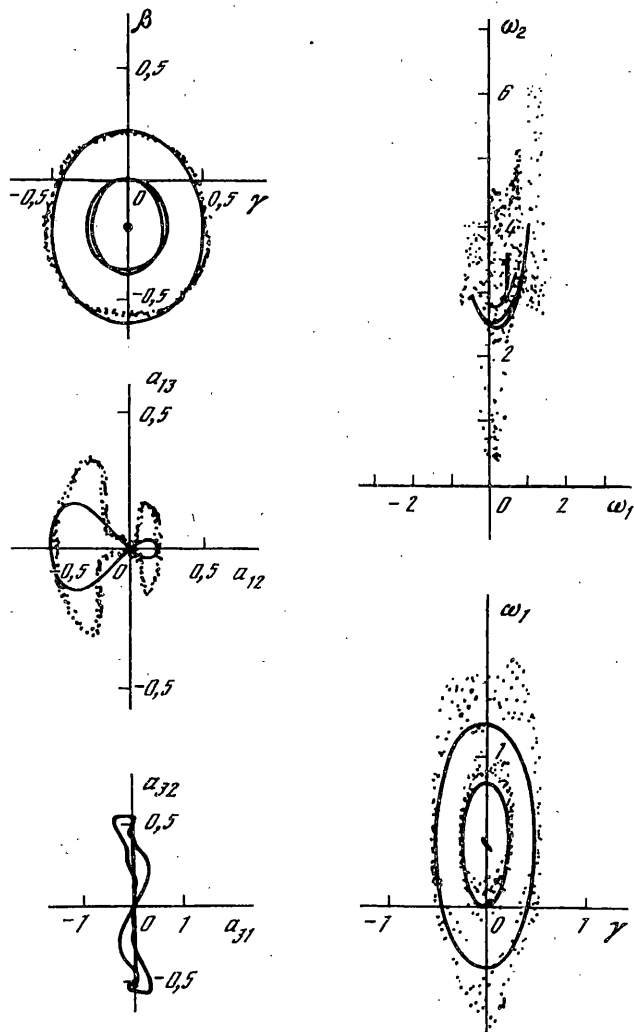
В численных экспериментах оценивалось влияние на вид сечений второго и третьего членов разложения (1.1), а также эволюции долготы восходящего узла орбиты спутника Ω_0 (последнее — согласно уравнению [7] $\dot{\Omega}_0 = -0,001633R_3^2 / r^2$).

Для исследования зависимости сечений Пуанкаре от параметров и начальных условий проводились серии расчетов при значениях $\lambda = 1$, $v = -0,9$, $a = 2$, $i \in [0,7; 1,74]$, $\epsilon \in [0,01; 0,1]$, $\Omega_0 \in [0,1]$, $h \in [10, 50]$, $\Delta\beta = |\beta(0) - \beta^*| \leq 1$, $\omega_1(0) = -a \sin \beta(0)$, $\omega_2(0) = \sec \beta(0)(1 + a \sin^2 \beta(0))$, $\gamma(0) = \alpha(0) = \omega_3(0) = 0$.



Фиг. 3

Совокупность отображений для решений вырожденной системы (1.3) с начальными условиями $\beta(0) = \{-0,2; 0; 0,2; 0,5; 0,7; (\text{колебания}); 1; -1,5 (\text{хаос})\}$ при $i = 1, 4$ представлена на фиг. 3 своими проекциями на плоскости $(\gamma(\text{mod } 2\pi), \beta)$, $(\gamma(\text{mod } 2\pi), \omega_1)$ и (ω_1, ω_2) . (На последней плоскости вследствие быстрого роста величины $\omega_2(0)$ указаны проекции сечений только первых трех траекторий.) Для иллюстрации зависимости сечений от параметра i на этом же рисунке приведена совокупность проекций на плоскость $(\gamma(\text{mod } 2\pi), \beta)$ сечений траекторий системы (1.3) с начальными условиями $\beta(0) = \{0; 0,2; 0,5; 0,7; 1,2 (\text{колебания}); -1,5 (\text{хаос})\}$ при $i = 1,74$. Полученные сечения можно разбить на две группы. К первой группе отнесем сечения, проекции которых с большей точностью аппроксимируются гладкими кривыми. (Проекция сечений первой группы заменены на рисунках этими аппроксимирующими кривыми.) Остальные сечения отнесем ко второй группе. (К ней относятся все сечения системы (1.3) при значениях i и $\beta(0)$, удовлетворяющих неравенствам $i \leq 1,4$, $\beta(0) > 1$ или $\beta(0) < -1,4$.)

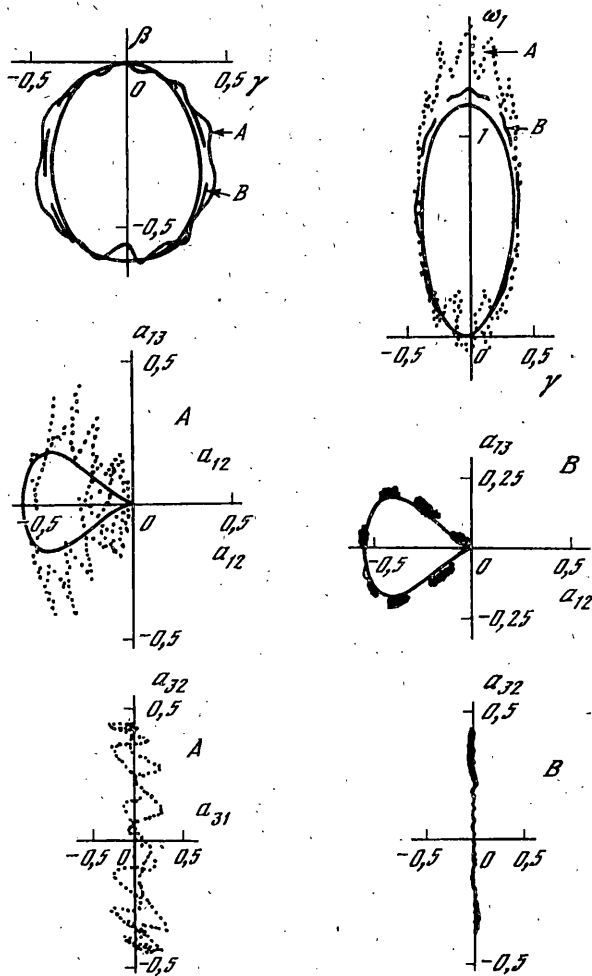


Фиг. 4

На фиг. 4 изображены совокупности тех же проекций сечений для двух траекторий системы (1.2) с начальными условиями $\beta(0) = \{0,0; 0,2\}$ при значениях параметров $\varepsilon = 0,05$; $\Omega_0(0) = 0$; $i = 1,4$; $h = 20$. Кроме того, для наглядного представления о вращениях спутника построенные сечения представлялись своими проекциями также и на плоскости направляющих косинусов осей Ox_1 , Ox_2 и Ox_3 . Для лучшей наглядности на фиг. 4 приведены проекции сечений только одной из указанных траекторий ($\beta(0) = 0,2$) на плоскости (a_{12}, a_{13}) и (a_{31}, a_{32}) . (Проекция на плоскость (a_{21}, a_{23}) практически не отличается от проекции на плоскость $(\gamma \pmod{2\pi}, \beta)$).

На фиг. 5 приведены сечения двух траекторий системы (1.2) при $i = 1, 2$ с общими начальными условиями $\beta(0) = 0, 0$ и значениями $h = \{20(A); 50(B)\}$. Для сравнения на фиг. 4, 5 приведены аппроксимирующие кривые аналогичных сечений вырожденной системы (1.3).

Как показали расчеты, для значений $i \in [1,2; 1,74]$, $\Delta\beta \leq 0,5$ и $h \geq 20$ все проекции построенных сечений на плоскость "медленных" переменных $(\gamma \pmod{2\pi}, \beta)$ можно отнести к первой группе. Хаотизация проекций сечений на плоскости "быстрых" пере-



Фиг. 5

менных (обусловленная наличием быстрых составляющих колебаний спутника) наступает при значительно меньших значениях $\Delta\beta$. Во всех расчетах наблюдалось (усиливающееся с ростом h) сходство между соответствующими сечениями систем (1.2) и (1.3), принадлежащими к первой группе, причем вид сечений практически не зависел от значений ε и $\Omega_0(0)$. Для оценки степени влияния на вид сечений указанных выше уточнений модели геомагнитного поля проводилось сравнение построенных отображений Пуанкаре с аналогичными отображениями в случае $\varepsilon = 0$. (Неподвижным точкам последних отображений отвечают найденные в [1] π -периодические решения уравнений (1.2).) Во всех проведенных расчетах наблюдалось значительное сходство между соответствующими сечениями, принадлежащими к первой группе.

Проведенный анализ позволяет сделать вывод о возможности реализации режима трехосной магнитогироскопической ориентации спутника на околополярных орбитах в течение нескольких суток, причем качественный анализ ориентированного и слабозмущенного движения спутника при больших значениях параметров h и χ может быть проведен в рамках упрощенной "дипольной" модели геомагнитного поля, не учитывающей вращения Земли, на основе исследования вырожденной системы, отвечающей значениям параметров h и χ , равным бесконечности.

Автор благодарит В.В. Сазонова за полезные обсуждения при выполнении работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Воронин А.А., Сазонов В.В.* Периодические колебания относительно центра масс спутника-гиростата под действием магнитного и гравитационного моментов // *Космич. исслед.* 1990. Т. 28. Вып. 1. С. 22–34.
2. *Воронин А.А.* Асимптотические свойства решений уравнений движения гироскопических систем // *ПММ.* 1994. Т. 58. Вып. 6. С. 22–28.
3. *Воронин А.А., Сазонов В.В.* Периодические колебания обобщенно-консервативных механических систем под действием больших гироскопических и потенциальных сил // *Изв. АН. МТТ.* 1992. № 6. С. 17–29.
4. *Сазонов В.В.* Периодические колебания спутника-гиростата относительно центра масс на круговой орбите // *Космич. исслед.* 1983. Т. 21. № 6. С. 838.
5. *Сазонов В.В.* Одноосная магнитная ориентация искусственных спутников // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1987. № 2. С. 27–32.
6. *Боевкин В.И., Гуревич Ю.Г. и др.* Ориентация искусственных спутников в гравитационных и магнитных полях. М.: Наука, 1976. 303 с.
7. *Охоцимский Д.Е., Энеев Т.М., Таратынова Г.П.* Определение времени существования искусственного спутника Земли и исследование вековых возмущений его орбиты // *Успехи физических наук.* 1957. Т. XIII. Вып. 1а. С. 34–50.

Волжский

Поступила в редакцию
17.V.1996