

УДК 531.36

© 1997 г. А.Ю. БЕЛКОВ, В.А. КОНОПЛЕВ

ДВЕ НОВЫХ АГРЕГАТИВНЫХ ФОРМЫ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМ ТЕЛ

В первой форме указанных уравнений формирование квадратичных по обобщенным скоростям инерционных слагаемых выполняется с использованием рекуррентного алгоритма, во второй – с использованием алгоритмов прямой и обратной прогонки для конструирования квазискоростей, квазиускорений и динамических винтов системы.

1. Постановка задачи. В статье продолжается поиск методов формирования рабочего аппарата механики систем тел, ориентированного на эффективное использование методов компьютерной алгебры (в аналитическом варианте) [1] и стандартного алгебраического матобеспечения ЭВМ (в числовом варианте).

В [2–4] приведена агрегативная форма уравнений движения систем тел

$$A(q)q^{\cdot\cdot} + b(q, q^{\cdot}) + Cq = Q, \quad Q = ST + u + n + Q_R, \quad b(q, q^{\cdot}) = B(q, q^{\cdot})q^{\cdot}$$

$$A(q) = SAS^T, \quad B(q, q^{\cdot}) = SAS^T + SBS^T, \quad Q_R = S_R R \quad (1.1)$$

имеющая $O(n^3)$ -оценку вычислительной трудоемкости при прямом использовании перечисленных алгоритмов, где n – число степеней свободы. В [5], на основе $O(n^3)$ -алгоритма $A(q) = SAS^T$, получен $O(n^2)$ -алгоритм конструирования матрицы $A(q)$, а в [6, 7] – $O(n^2)$ -алгоритмы конструирования матриц $A(q)$ и $A^{-1}(q)$ в виде простейших сомножителей (трансвекций), что дает возможность конструировать матрицу $A^{-1}(q)$, и, следовательно, уравнения (1.1) в форме Коши, непосредственно, минуя стадии предварительного конструирования и обращения матрицы $A(q)$.

В [8, 9] приведены алгоритмы конструирования вектора динамических винтов реакций тел внешней среды на тела системы, практически не требующие вычислительных затрат (за счет исключения процесса формирования уравнений связей и вычисления соответствующей матрицы Якоби).

В публикуемой статье ставится задача дальнейшего повышения вычислительной экономичности процесса конструирования уравнений (1.1), в частности, разработки $O(n)$ -алгоритмов конструирования вектора $b(q, q^{\cdot}) = B(q, q^{\cdot})q^{\cdot}$ на основе $O(n^3)$ -алгоритма $B(q, q^{\cdot}) = SAS^T + SBS^T$ и новой формы уравнений движения систем тел на основе алгоритмов прямой и обратной прогонки.

2. Рекуррентная форма вектора $b(q, q^{\cdot})$. Предложение 2.1. Пусть вектор $b(q, q^{\cdot}) = B(q, q^{\cdot})q^{\cdot}$ с учетом (1.1) представлен в форме

$$b(q, q^{\cdot}) = S(AX + BV), \quad X = S^T \cdot q^{\cdot} \quad (2.1)$$

Тогда существует рекуррентный (от корня дерева (11) к почкам) $O(n)$ -алгоритм конструирования вектора X [10]:

$$X_{lk} = L_{lk}^{\mu, k-1, T} X_{\mu, k-1} + L_{lk}^{\mu, k-1, T} V_{\mu, k-1}^{10, \mu, k-1}, \quad X_{11} = M_{11}^{11k} \|f^{11}\| q^{11}. \quad (2.2)$$

где матрицы $L_{lk}^{\mu, k-1, T}$ и M_{11}^{11k} конструируются (в числовой или аналитической форме) с использованием алгоритмов (1.2) и (3.5) [2], а вектор $V_{\mu, k-1}^{10, \mu, k-1}$ – с использованием уравнений кинематики системы (3.3) [2], учитывая, что матрица S уже получена на этапе конструирования матрицы $A(q)$.

Доказательство. Выполнив в правой части равенства $X = S^T \cdot q$ умножение, для $(lk) - (1 \times 6)$ -столбца X_{lk} получим

$$X_{lk} = \sum_{p \in (lk)} s_{lk}^{p-\alpha, T} \cdot q_{\alpha}^p.$$

С учетом рекуррентного равенства $s_{lk}^{p-\alpha} = s_{\mu, k-1}^{p-\alpha} L_{lk}^{\mu, k-1}$ получаем

$$\begin{aligned} X_{lk} &= \sum_{p \in (lk)} (L_{lk}^{\mu, k-1, T} s_{\mu, k-1}^{p-\alpha, T} \cdot q_{\alpha}^p + L_{lk}^{\mu, k-1, T} \cdot s_{\mu, k-1}^{p-\alpha, T} q_{\alpha}^p) = \\ &= L_{lk}^{\mu, k-1, T} \sum_{p \in (\mu, k-1)} s_{\mu, k-1}^{p-\alpha, T} \cdot q_{\alpha}^p + L_{lk}^{\mu, k-1, T} \cdot \sum_{p \in (\mu, k-1)} s_{\mu, k-1}^{p-\alpha, T} q_{\alpha}^p = \\ &= L_{lk}^{\mu, k-1, T} X_{\mu, k-1} + L_{lk}^{\mu, k-1, T} \cdot V_{\mu, k-1}^{10, \mu, k-1}, \text{ так как } s_{\mu, k-1}^{lk-\alpha} = 0 \end{aligned}$$

Пример. Вычисление вектора X для двухзвенного маятника со скользящим подвесом [2, 5]:

$$X_1 = (M_1^{1k} f_2^1) \cdot q_2^1 = 0, \quad M_1^{1k} f_2^1 = f_2^1$$

$$X_2 = L_2^{1, T} X_1 + L_2^{1, T} \cdot V_1^{0,1} = [\langle w_2^1 \rangle^2]^T [c(\theta_5^2)]^T f_2^1 o_2^1 = [\langle w_2^1 \rangle^2]^T f_2^1 o_2^1 = 0$$

$$X_3 = L_3^{2, T} X_2 + L_3^{2, T} \cdot V_2^{0,2} = [\langle w_3^2 \rangle^3]^T [c_3(\theta_6^3)]^T (s_2^{1-2, T} o_2^1 + s_2^{2-5} \theta_5^2) =$$

$$= (c\theta_6^3 o_2^1 \theta_6^3, -s\theta_6^3 o_2^1 \theta_6^3, 0, c\theta_6^3 \theta_5^2 \theta_6^3, -s\theta_6^3 o_5^2 \theta_6^3, 0)^T$$

Предложение 2.2. Пусть: 1. Вектор $b(q, q^*) = B(q, q^*)q^*$, с учетом (1.1), представлен в форме [10]:

$$b(q, q^*) = \|f\| M^T Z, \quad Z = LY, \quad Y = (AX + BV), \quad X = S^T \cdot q^* \quad (2.3)$$

2. Вектор $X = S^T \cdot q^*$ вычисляется с использованием алгоритма (2.2). 3. (cd) – почка дерева. Тогда существует рекуррентный (от почек (cd) к корню дерева – (11)) $O(n)$ -алгоритм конструирования вектора Z :

$$Z_{\mu, k-1} = Y_{\mu, k-1} + \sum_{(\mu, k-1)^+} L_{lk}^{\mu, k-1} Z_{lk}, \quad Z_{cd} = Y_{cd} \quad (2.4)$$

Доказательство. Доказательство утверждения (2.4) проведем в два этапа: на первом из них, с использованием конкретного примера (фигура), выясним идейную сторону доказательства, на втором – дадим формальное доказательство.

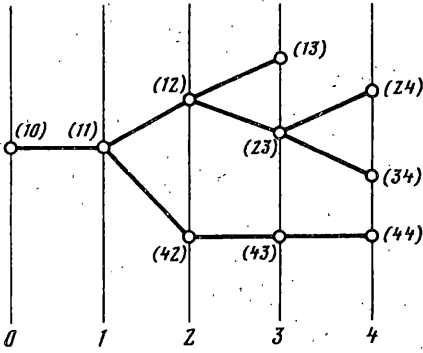
Умножив матрицу L (1.9) [2] на столбец Y , получим 9 матричных равенств

$$Z_{11} = Y_{11} + L_{12}^{11} Y_{12} + L_{13}^{11} Y_{13} + L_{23}^{11} Y_{23} + L_{24}^{11} Y_{24} + L_{34}^{11} Y_{34} + L_{42}^{11} Y_{42} + L_{43}^{11} Y_{43} + L_{44}^{11} Y_{44}$$

$$Z_{12} = Y_{12} + L_{13}^{12} Y_{13} + L_{23}^{12} Y_{13} + L_{24}^{12} Y_{24} + L_{34}^{12} Y_{34}, \quad Z_{13} = Y_{13}, \quad Z_{23} = Y_{23} + L_{24}^{23} Y_{24} + L_{34}^{23} Y_{34}$$

$$Z_{24} = Y_{24}, \quad Z_{34} = Y_{34}, \quad Z_{42} = Y_{42} + L_{43}^{42} Y_{43} + L_{44}^{42} Y_{44}, \quad Z_{43} = Y_{43} + L_{44}^{43} Y_{44}, \quad Z_{44} = Y_{44}$$

Заметим, что для каждого $(\mu, k-1)$ -элемента системы столбец $Z_{\mu, k-1}$ является суммой столбца $Y_{\mu, k-1}$ и столбцов $L_{lp}^{\mu, k-1} Y_p$ по всем (p) -элементам, входящим в мно-



жество $(\mu, k-1)_+$ достижимости $(\mu, k-1)$ -элемента системы. Естественно, $Z_{\mu, k-1} = Y_{\mu, k-1}$, если $(\mu, k-1)$ -элемент системы является почкой, $((\mu, k-1)_+ = \emptyset)$. Преобразуем полученную систему равенств, продвигаясь, в соответствии с доказываемым утверждением, от почек к корню (II).

$$Z_{44} = Y_{44}, \quad Z_{43} = Y_{43} + L_{44}^{42} Y_{44} = Y_{44} + L_{44}^{42} Z_{44}$$

$$Z_{42} = Y_{42} + L_{43}^{42} Y_{43} + L_{44}^{42} Y_{44} = Y_{42} + L_{43}^{42} Z_{43} +$$

$$+ L_{44}^{42} Z_{44} = Y_{42} + \sum_{p \in (42)} + L_p^{42} Z_p$$

где $(42)^+$ – множество правой инцидентности (42) – элемента системы, т.е. множество всех элементов системы, несомых (42) – элементом: элементы (43) и (44) , см. граф системы (фигура):

$$Y_{34} = Y_{34}, \quad Z_{24} = Y_{24}, \quad Z_{23} = Y_{23} + L_{24}^{23} Y_{24} + L_{34}^{23} Y_{34} = Y_{23} + L_{24}^{23} Z_{24} + L_{34}^{23} Z_{34} =$$

$$= Y_{23} + \sum_{(23)^+} L_p^{23} Z_p, \quad Z_{13} = Y_{13}, \quad Z_{12} = Y_{12} + L_{13}^{12} Y_{13} + L_{23}^{12} Y_{23} + L_{24}^{12} Y_{24} + L_{34}^{12} Y_{34} =$$

$$= Y_{12} + L_{13}^{12} Z_{13} + L_{23}^{12} Z_{23} (Y_{23} + L_{24}^{23} Y_{24} + L_{34}^{23} Y_{34}) = Y_{12} + L_{13}^{12} Z_{13} + L_{23}^{12} Z_{23} = Y_{12} + \sum_{(12)^+} L_p^{12} Z_p,$$

$$Z_{11} = Y_{11} + L_{12}^{11} (Y_{12} + L_{13}^{12} Y_{13} + L_{23}^{12} Y_{23} + L_{24}^{12} Y_{24} + L_{34}^{12} Y_{34}) + L_{42}^{11} (Y_{42} + L_{43}^{42} Y_{43} + L_{44}^{42} Y_{44}) +$$

$$+ L_{42}^{11} (Y_{42} + L_{43}^{42} Y_{43} + L_{44}^{42} Y_{44}) = Y_{11} + L_{12}^{11} Z_{12} + L_{42}^{11} Z_{42} = Y_{11} + \sum_{(11)^+} L_p^{11} Z_p$$

Таким образом, действительно, для рассмотренной системы тел при любом индексе элемента имеем

$$Z_{\mu, k-1} = Y_{\mu, k-1} + \sum_{p \in (\mu, k-1)^+} L_p^{\mu, k-1} Z_p, \quad Z_{cd} = Y_{cd}$$

Теперь формальное общее доказательство. Выполнив в равенстве $Z = LY$, $Y = (\dots, Y_{ij}, \dots)$ умножение блочных матриц, для $(\mu, k-1)$ -элемента системы получаем

$$Z_{\mu, k-1} = \sum_{p \in (\mu, k-1)} L_p^{\mu, k-1} Y_p = Y_{\mu, k-1} + \sum_{(lk) \in (\mu, k-1)^+} \sum_{p \in (lk)} L_{lk}^{\mu, k-1} L_p^{lk} Y_p =$$

$$= Y_{\mu, k-1} + \sum_{(lk) \in (\mu, k-1)^+} L_{lk}^{\mu, k-1} \sum_{p \in (lk)_+} L_p^{lk} Z_p = Y_{\mu, k-1} + \sum_{(lk) \in (\mu, k-1)^+} L_{lk}^{\mu, k-1} Z_{lk}$$

Пример. Вычисление вектора $\mathbf{b}(\mathbf{q}, \mathbf{q}')$ для двухзвенного маятника со скользящим подвесом [2, 5].

Заметим, что для вычисления третьей составляющей столбца $\mathbf{b}(\mathbf{q}, \mathbf{q}')$ можно воспользоваться простой формулой (последовательное умножение слева направо), в силу $Z_3 = Y_3$:

$$b_3 = f_6^{3,T} (\theta_3^3 X_3 + \Phi_3^{03} \theta_3^3 V_3^{03}) = f_6^{3,T} \theta_3^3 X_3 + f_6^{3,T} \Phi_3^{03} \theta_3^3 V_3^{03}$$

$$f_6^{3,T} \theta_3^3 X_3 = (0, m_3 r_1^3, 0, 0, 0, I_{66}^3 + m_3 (r_1^3)^2) X_3 = -m_3 r_1^3 s \theta_6^3 o_2^1 \theta_6^3$$

$$f_6^{3,T} \Phi_3^{03} \theta_3^3 V_3^{03} = (-c \theta_6^3 o_2^1, s \theta_6^3 o_2^1, 0, -c \theta_6^3 \theta_5^2, s \theta_6^3 \theta_5^2, 0) \theta_3^3 V_3^{03} =$$

$$= (-m_3 c \theta_6^3 o_2^1, m_3 s \theta_6^3 o_2^1, -m_3 r_1^3 s \theta_6^3 \theta_5^2, -I_{44}^3 c \theta_6^3 \theta_5^2, (I_{55}^3 + m_3 (r_1^3)^2 s \theta_6^3 \theta_5^2 \times \\ \times m_3 r_1^3 s \theta_6^3 o_2^1) V_3^{03} = -\beta o_2^1 \theta_6^3 - \alpha (\theta_5^2)^2 \\ \alpha = [(I_{44}^3 - I_{55}^3) c \theta_6^3 - m_3 (p_1^3 + r_1^3 c \theta_6^3) r_1^3] s \theta_6^3, \quad \beta = -m_3 r_1^3 s \theta_6^3$$

Складывая вычисленные результаты, для b_3 получаем $b_3 = -\alpha (\theta_5^2)^2$. К сожалению, для получения остальных координат необходимо вычисление столбцов Y_2 и Y_3 полностью

$$b_2 = f_5^{2,T} Z_2, \quad Z_2 = Y_2 + L_3^2 Z_3 = Y_2 + L_3^2 Y_3, \quad b_1 = f_1^{2,T} Z_1 = f_2^{1,T} (Y_1 + L_2^1 Z_2)$$

Вычислим столбец $Y_3 = \theta_3^3 X_3 + \Phi_3^{03} \theta_3^3 V_3^{03}$:

$$\theta_3^3 V_3^{03} = \{m_3 s \theta_6^3 o_2^1, m_3 c \theta_6^3 o_2^1 + m_3 r_1^3 \theta_6^3, -m_3 (p_1^3 + r_1^3 c \theta_6^3) \theta_5^2, I_{44}^3 s \theta_6^3 \theta_5^2, \\ [m_3 r_1^3 (p_1^3 + r_1^3 c \theta_6^3) + I_{55}^3 c \theta_6^3] \theta_5^2, m_3 r_1^3 c \theta_6^3 o_2^1 + (I_{66}^3 + m_3 (r_1^3)^2) \theta_6^3\}^T \\ \Phi_3^{03} \theta_3^3 V_3^{03} = \{-m_3 c \theta_6^3 o_2^1 \theta_6^3 - m_3 (p_1^3 + r_1^3 c \theta_6^3) c \theta_6^3 (\theta_5^2)^2 - m_3 r_1^3 (\theta_6^3)^2, m_3 s \theta_6^3 o_2^1 \theta_6^3 + \\ + m_3 (p_1^3 + r_1^3 c \theta_6^3) s \theta_6^3 (\theta_5^2)^2, m_3 r_1^3 s \theta_6^3 \theta_5^2 \theta_6^3, (I_{66}^3 - I_{55}^3) c \theta_6^3 \theta_5^2 \theta_6^3, \\ (I_{44}^3 - I_{66}^3 - m_3 (r_1^3)^2) s \theta_6^3 \theta_5^2 \theta_6^3, -\beta o_2^1 \theta_6^3 - \alpha (\theta_5^2)^2\}^T \\ \theta_3^3 X_3 = \{m_3 c \theta_6^3 o_2^1 \theta_6^3, -m_3 s \theta_6^3 o_2^1 \theta_6^3, m_3 r_1^3 s \theta_6^3 \theta_5^2 \theta_6^3, I_{44}^3 c \theta_6^3 \theta_5^2 \theta_6^3, \\ -(I_{55}^3 + m_3 (r_1^3)^2) s \theta_6^3 \theta_5^2 \theta_6^3, \beta o_2^1 \theta_6^3\}^T$$

Окончательно, для столбца Y_3 получаем

$$Y_3 = \{-m_3 (p_1^3 + r_1^3 c \theta_6^3) c \theta_6^3 (\theta_5^2)^2 - m_3 r_1^3 (\theta_6^3)^2, m_3 (p_1^3 + r_1^3 c \theta_6^3) s \theta_6^3 (\theta_5^2)^2, \\ 2m_3 r_1^3 s \theta_6^3 \theta_5^2 \theta_6^3, (I_{66}^3 - I_{55}^3 + I_{44}^3) c \theta_6^3 \theta_5^2 \theta_6^3, (I_{44}^3 - I_{66}^3 - I_{55}^3 - 2m_3 (r_1^3)^2) s \theta_6^3 \theta_5^2 \theta_6^3, -\alpha (\theta_5^2)^2\}^T$$

Вычислим столбец $Y_2 = \theta_2^2 X_2 + \Phi_2^{02} \theta_2^2 V_2^{02} = (-m_2 r_1^2 (\theta_5^2)^2, 0, 0, 0, 0, 0)^T$:

$$\theta_2^2 V_2^{02} = (0, m_2 o_2^1, -m_2 r_1^2 \theta_5^2, 0, (I_{55}^3 + m_2 (r_1^2)^2) \theta_5^2, m_2 r_1^2 o_2^1)^T \\ \Phi_2^{02} \theta_2^2 V_2^{02} = (-m_2 r_1^2 (\theta_5^2)^2, 0, 0, 0, 0, 0)^T, \quad \theta_2^2 X_2 = 0$$

Вычислим столбец $Y_1 = \theta_1^1 X_1 + \Phi_1^{01} \theta_1^1 V_1^{01}$, $Y_1 = 0$, в силу $\theta_1^1 = 0$.

Вычислим столбцы $Z = (Z_1, Z_2, Z_3)^T$:

$$Z_3 = Y_3, \quad Z_2 = Y_2 + L_3^2 Z_3 = Y_2 + L_3^2 Y_3 = Y_2 + T_3^2 [c(\theta_6^3)] Y_3 = \\ = \{-m_3 r_1^3 c \theta_6^3 (\theta_6^3)^2 - [m_3 (p_1^3 + r_1^3 c \theta_6^3) + \\ + m_2 r_1^2] (\theta_5^2)^2, \beta (\theta_6^3)^2, -\beta \theta_5^2 \theta_6^3, [I_{66}^3 + 2(I_{44}^3 - I_{55}^3) c \theta_6^3 \theta_6^3 + 2m_3 (r_1^3)^2 \times \\ \times s^2 \theta_6^3] \theta_5^2 \theta_6^3, 2\alpha, -m_3 r_1^3 p_1^3 s \theta_6^3 (\theta_6^3)^2 - \alpha (\theta_5^2)^2\}^T \\ Z_1 = Y_1 + L_2^1 Z_2 = 0 + [c(\theta_5^2)] Z_2 = [c(\theta_5^2)] Z_2$$

Вычислим координаты вектора $\mathbf{b}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = (b_1, b_2, b_3)^T$:

$$b_1 = f_2^{1,T} Z_1 = f_2^{1,T} L_2^1 Z_2 = f_2^{1,T} [c(\theta_5^2)] Z_2 = f_2^{1,T} Z_2 = \beta (\theta_6^3)^2 \\ b_2 = f_5^{2,T} Z_2 = 2\alpha \theta_5^2 \theta_6^3, \quad b_3 = f_6^{3,T} Z_3 = -\alpha (\theta_5^2)^2 \quad (2.5)$$

что совпадает с ранее полученными результатами [2, 5].

Асимптотическая оценка вычислительной трудоемкости вышеуказанного алгоритма конструирования вектора $\mathbf{b}(\mathbf{q}, \mathbf{q}^*)$ имеет вид $N_{\times}(n) = 67n - 4$, $N_{\times}(6) = 398$, $N_{+}(n) = 55n - 4$, $N_{+}(6) = 326$.

3. Алгоритм конструирования уравнений движения систем твердых тел на основе алгоритмов прямой и обратной прогонки. Предлагается еще одна форма уравнений движения систем тел. Она вычислительно экономичнее предыдущей, но ограничена в приложениях: справедлива только для систем тел, не имеющих механических связей с телами внешней среды. Это объясняется тем, что построение этих уравнений основано на использовании алгоритмов прямой и обратной прогонки для формирования квазискоростей, квазиускорений и динамических винтов системы, последний из которых справедлив только при вышеуказанных условиях.

Предложение 3.1. Пусть: 1. Тела системы не имеют механических контактов с телами внешней среды:

2. $R_0(\mu, k-1; lk)$, $U_0(\mu, k-1; lk)$, $N_0(\mu, k-1; lk)$ -столбцы динамических винтов воздействия $(\mu, k-1)$ -тел на (lk) -тела соответствующей природы (реакции, управления, трение), вычисляемые при нулевом обобщенном ускорении системы $\mathbf{q}^{**} = 0$

3. Алгоритм прямой прогонки для вычисления квазискоростей и квазиускорений при $\mathbf{q}^{**} = 0$, с учетом (1.3), (1.10) [2], имеет вид

$$V_{lk0}^{10, lk} = L_{lk0}^{\mu, k-1, T} V_{\mu, k-10}^{10, \mu, k-1} + M_{lk0}^{lk} \| f^{lk} \| q_0^{lk} \quad (3.1)$$

$$V_{lk0}^{10, lk} = \Phi_{lk0}^{\mu, k-1, lk, T} L_{l, k0}^{\mu, k-1, T} V_{\mu, k-10}^{10, \mu, k-1} + L_{lk0}^{\mu, k-1, T} V_{\mu, k-10}^{10, \mu, k-1} + M_{lk0}^{lk} \| f^{lk} \| q_0^{lk} \quad (3.2)$$

$$V_{110}^{10, 11} = M_{110}^{11k} \| f^{11} \| q_0^{11} \quad (3.3)$$

4. Алгоритм обратной прогонки для вычисления динамических винтов $R_{lk0}^{lk}(\mu, k-1; lk)$, $U_{lk0}^{lk}(\mu, k-1; lk)$, $N_{lk0}^{lk}(\mu, k-1; lk)$ в столбцах из п. 1 (при $\mathbf{q}^{**} = 0$), с учетом (2.1) [2], имеет вид

$$R_{lk0}^{lk}(\mu, k-1; lk) + N_{lk0}^{lk}(\mu, k-1; lk) + U_{lk0}^{lk}(\mu, k-1; lk) = \\ = A_{lk}^{lk} V_{lk0}^{10, lk} + B_{lk0}^{lk} V_{lk0}^{10, lk} - H_{lk0}^{lk} - T_{lk0}^{lk} + \\ + \sum_1 L_{i, k+10}^{lk} (R_{i, k+10}^{i, k+1}(lk; i, k+1) + U_{i, k+10}^{i, k+1}(lk; i, k+1) + N_{i, k+10}^{i, k+1}(lk; i, k+1))$$

Тогда: 1. Уравнения движения системы твердых тел, не имеющих связей с телами внешней среды, могут быть представлены в форме

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{q}^{**} + \mathbf{d}(\mathbf{q}, \mathbf{q}^*) = \mathbf{u} + \mathbf{n} \quad (3.5)$$

2. Столбец $\mathbf{d}(\mathbf{q}, \mathbf{q}^*)$ вычисляется с использованием алгоритма

$$\mathbf{d}(\mathbf{q}, \mathbf{q}^*) = \| f \| f^T M^T Z(\mu, k-1; lk) \quad (3.6)$$

$$\mathbf{Z}(\mu, k-1; lk) = \mathbf{R}_0(\mu, k-1; lk) + \mathbf{U}_0(\mu, k-1; lk) + \mathbf{N}_0(\mu, k-1; lk)$$

Доказательство. Умножим систему уравнений (2.2) [2], записанную в матричной форме, с учетом (3.3) [2], слева на часть $M^T L$ матрицы $S = \| f \| f^T M^T L$ (1.6):

$$M^T L A L^T M \| f \| \mathbf{q}^{**} + M^T L \mathbf{b}(\mathbf{q}, \mathbf{q}^*) = M^T L (\mathbf{H} + \mathbf{T}) + M^T L (\mathbf{R} + \mathbf{U} + \mathbf{N}) \quad (3.7)$$

При этом на местах ненулевых координат столбцов $M^T L \mathbf{R}$ реакций в кинемати-

ческих парах стоят нули в столбцах управлений $M^T L U$ и трений $M^T L N$ и наоборот. Именно это условие используется для исключения реакций в кинематических парах и выделения усилий управления и трения путем умножения уравнений слева на матрицу осей подвижности $\|f\|^T$ в парах системы.

Формально можно определить такие реакции R_0 , управления U_0 и трения N_0 в кинематических парах, что движение системы будет происходить с нулевым обобщенным ускорением $q'' = 0$. Столбец F_0 таких усилий получается из (3.7)

$$M^T b(q, q') = M^T L(H + T) + F_0 \quad (3.8)$$

$$F_0 = M^T L(R_0 + U_0 + N_0) = M^T(R_0(\mu, k-1; lk) + U_0(\mu, k-1; lk) + N_0(\mu, k-1; lk))$$

где $R_0(\mu, k-1; lk)$, $U_0(\mu, k-1; lk)$, $N_0(\mu, k-1; lk)$ -столбцы динамических винтов воздействия $(\mu, k-1)$ -тел на (lk) -тела соответствующей природы, вычисляемые с использованием алгоритмов прямой и обратной прогонки при $q'' = 0$, (3.4)

Вычитая второе равенство из первого, получаем уравнение

$$M^T L A L^T M \|f\| q'' = M^T L(R + U + N) - F_0 \quad (3.9)$$

Умножая полученное равенство слева на матрицу $\|f\|^T$, как и раньше, "вырезаем" из системы уравнений те, в которых $\|f\|^T M L R = 0$ и $u + n = \|f\|^T M L (U + N)$, что и дает доказываемый результат.

Пример. Двухзвенный маятник со скользящим подвесом. С учетом принятых в (3.6) обозначений и ранее полученных в части этой системы результатов имеем

$$d(q, q') = (d_1, d_2, d_3)^T = \left\| \begin{array}{ccc} f_2^{1,T} & 0 & 0 \\ 0 & f_2^{1,T} & 0 \\ 0 & 0 & f_2^{1,T} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} Z_1^1(0,1) \\ Z_2^2(1,2) \\ Z_3^3(2,3) \end{array} \right\|, \quad \theta_1^1 \equiv 0 \quad (3.10)$$

$$V_1^{01} = (0, o_2^1, 0, 0, 0, 0)^T, \quad V_2^{02} = (0, o_2^1, 0, 0, \theta_5^2, 0)^T$$

$$V_3^{03} = (o_2^1 s \theta_6^3, o_2^1 c \theta_6^3, -p_1^3 \theta_5^2, s \theta_6^3 \theta_5^2, c \theta_6^3 \theta_5^2, \theta_6^3)^T$$

$$V_1^{01} = (0, 0, 0, 0, 0, 0)^T, \quad V_2^{02} = (0, 0, 0, 0, 0, 0)^T, \quad q'' = 0$$

$$V_3^{03} = (c \theta_6^3 o_2^1 c \theta_6^3, -s \theta_6^3 o_2^1 \theta_6^3, 0, c \theta_6^3 \theta_5^2 \theta_6^3, -s \theta_6^3 \theta_5^2 \theta_6^3, 0)^T$$

Согласно (3.4) получаем

$$Z_3^3(2,3) = \theta_3^3 V_3^{03} + \Phi_3^{03} \theta_3^3 V_3^{03} - F_3^3, \quad F_3^3 = H_3^3 + T_3^3$$

$$Z_2^2(1,2) = \theta_2^2 V_2^{02} + \Phi_2^{02} \theta_2^2 V_2^{02} + L_3^2 Z_3^3(2,3) - F_2^2, \quad F_2^2 = H_2^2 + T_2^2$$

$$Z_1^1(0,1) = L_2^1 Z_2^2(1,2) - F_1^1, \quad F_1^1 = P_1^1 + T_1^1, \quad V_1^{01} = V_1^0 = 0$$

Вычислим

$$d_3 = -\alpha(\theta_5^2)^2 - f_6^{3,T} F_3^3 \quad (3.11)$$

$$d_3 = f_6^{3,T} Z_3^3(2,3) = (0, 0, 0, 0, 0, I) \theta_3^3 V_3^{03} + (0, 0, 0, 0, 0, I) \Phi_3^{03} \theta_3^3 V_3^{03} - f_6^{3,T} F_3^3 =$$

$$= (0, m_3 r_1^3, 0, 0, 0, (I_{66}^3 + m_3 (r_1^3)^2)) V_3^{03} +$$

$$+ (-c \theta_6^3 o_2^1, s \theta_6^3 o_2^1, 0, -c \theta_6^3 \theta_5^2, s \theta_6^3 \theta_5^2, 0)^T \theta_3^3 V_3^{03} - f_6^{3,T} F_3^3 =$$

$$= -m_3 r_1^3 s \theta_6^3 o_2^1 \theta_6^3 + (-m_3 c \theta_6^3 o_2^1, m_3 s \theta_6^3 o_2^1, -m_3 r_1^3 s \theta_6^3 \theta_5^2, I_{44}^3 c \theta_6^3 \theta_5^2.$$

$$(I_{55}^3 + m_3 (r_1^3)^2) s \theta_6^3 \theta_5^2, m_3 r_1^3 s \theta_6^3 o_2^1) V_3^{03} - f_6^{3,T} F_3^3 = -\alpha(\theta_5^2)^2 - f_6^{3,T} F_3^3$$

Вычислим

$$d_2 = 2\alpha\theta_5^2\theta_6^3 - f_5^{2,T}F_2^2 - f_5^{2,T}L_3^2F_3^3 \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} d_2 &= f_5^{2,T}Z_2^2(1,2) = f_5^{2,T}\theta_2^2V_2^{02} + f_5^{2,T}\Phi_2^{02}\theta_2^2V_2^{02} + f_5^{2,T}L_3^2Z_3^3(2,3) - f_5^{2,T}F_2^2 = \\ &= f_5^{2,T}L_3^2Z_3^3(2,3) - f_5^{2,T}F_2^2 = f_5^{2,T}T_3^{22}[c_2^3](\theta_3^3V_3^{03} + \Phi_3^{03}\theta_3^3V_3^{03}) - f_5^{2,T}(L_3^2F_3^3 - F_2^2) = \\ &= \alpha\theta_5^2\theta_6^3 + \alpha\theta_5^2\theta_6^3 - f_5^{2,T}F_2^2 - f_5^{2,T}L_3^2F_3^3 \end{aligned}$$

Вычислим

$$d_1 = \beta(\theta_6^3)^2 - f_5^{1,T}F_1^1 - f_5^{1,T}L_2^1F_2^2 - f_2^{1,T}L_2^1L_3^2F_3^3 \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} d_1 &= f_5^{1,T}Z_1^1(0,1) = f_5^{1,T}L_2^1Z_2^2(1,2) - f_5^{1,T}F_1^1 = \\ &= f_5^{1,T}L_2^1(\theta_2^2V_2^{02} + \Phi_2^{02}\theta_2^2V_2^{02} + L_3^2Z_3^3(2,3) - F_2^2) - f_5^{1,T}F_1^1 = \\ &= f_5^{1,T}L_2^1\theta_2^2V_2^{02} + f_5^{1,T}L_2^1\Phi_2^{02}\theta_2^2V_2^{02} + f_5^{1,T}L_2^1L_3^2Z_3^3(2,3) - f_5^{1,T}L_2^1F_2^2 - f_5^{1,T}F_1^1 = \\ &= f_5^{1,T}L_2^1\Phi_2^{02}\theta_2^2V_2^{02} + f_5^{1,T}L_3^1(\theta_3^3V_3^{03} + \Phi_3^{03}\theta_3^3V_3^{03}) - f_5^{1,T}L_3^1F_3^3 - f_5^{1,T}L_2^1F_2^2 - f_5^{1,T}F_1^1 = \\ &= 0 + 0 + f_5^{1,T}L_3^1\Phi_3^{03}\theta_3^3V_3^{03} - f_5^{1,T}L_3^1F_3^3 - f_5^{1,T}L_2^1F_2^2 - f_5^{1,T}F_1^1 = \\ &= -m_3r_1^3\theta_6^3(\theta_6^3)^2 - f_5^{1,T}L_3^1F_3^3 - f_5^{1,T}L_2^1F_2^2 - f_5^{1,T}F_1^1 = \\ &= \beta(\theta_6^3)^2 - f_5^{1,T}L_3^1F_3^3 - f_5^{1,T}L_2^1F_2^2 - f_5^{1,T}F_1^1 \end{aligned}$$

Собирая (3.11)–(3.13), в итоге получаем

$$\mathbf{d}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta(\theta_6^3)^2 \\ 2\alpha\theta_5^2\theta_6^3 \\ -\alpha(\theta_5^2)^2 \end{Bmatrix} - S(\mathbf{H} + \mathbf{T}) = \mathbf{b}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') - S(\mathbf{H} + \mathbf{T}) \quad (3.14)$$

Подставляя (3.14) в уравнение (3.5), приходим к уравнениям движения системы тел в форме

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{q}'' + \mathbf{b}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = S(\mathbf{H} + \mathbf{T}) + \mathbf{u} + \mathbf{p}$$

ранее полученным с использованием других алгоритмов [2, 5], в том числе (2.5).

Оценка вычислительных затрат алгоритма (3.6) имеет вид $N_x(n) = 64n$, $N_x(6) = 384$, $N_+(n) = 44n$, $N_+(6) = 264$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Климов Д.М., Руденко В.М. Методы компьютерной алгебры в задачах механики. М.: Наука, 1989, 215 с.
2. Коноплев В.А. Агрегативные модели механики систем твердых тел со структурой дерева // Изв. АН СССР. МГТ. 1989. № 6. С. 46–53.
3. Коноплев В.А. Агрегативные модели механики систем твердых тел // ДАН. 1990. Т. 314. № 4. С. 809–813.
4. Коноплев В.А., Фишков А.Л. Агрегативные методы конструирования моделей механики систем из упругих элементов // Прикл. механика. 1991. Т. 27. № 1. С. 104–109.
5. Коноплев В.А., Заремба А.Т. Методы компьютерного конструирования агрегативных моделей механики манипуляционных роботов. // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1992. № 1. С. 85–93.
6. Коноплев В.А. Аналитические трансективные формы агрегативных уравнений движения системы тел // ДАН. 1994. Т. 334. № 2. С. 172–174.

7. Коноплев В.А. Аналитические трансективные формы прямой и обратной матриц кинетической энергии системы тел // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 5. С. 3–11.
8. Коноплев В.А. Агрегативная форма дифференциальных уравнений связей системы тел с телами внешней среды // ДАН. 1992. Т. 322. № 6. С. 1047–1051.
9. Коноплев В.А. Новая форма дифференциальных уравнений связей системы тел с телами внешней среды // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 1. С. 3–9.
10. Belkov A.Yu. The recursiv algorithm for the vector of centripetal and coriolis torques design. Preprint IPME "Aggregative methods in multibody systems mechanics". № 78. Sankt-Peterburgh, 1992. PP. 28–34.

С.-Петербург

Поступила в редакцию
14.II.1996