

УДК 539.3:534.1

© 1997 г. Л.Д. АКУЛЕНКО

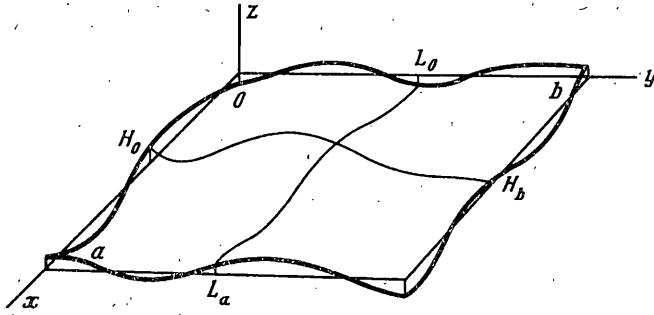
УПРАВЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЯМИ МЕМБРАНЫ ПОСРЕДСТВОМ ГРАНИЧНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ КИНЕМАТИЧЕСКОГО ТИПА

Рассматривается задача управления движениями прямоугольной мембраны с помощью кинематических граничных воздействий. В качестве критерия оптимальности принят традиционный среднеквадратический функционал. Предлагается приближенный подход к решению задачи, основанный на асимптотическом разделении мод колебаний. Метод позволяет строить физически реализуемые режимы управления для произвольных начальных и требуемых конечных распределений смещений и скоростей. Исследованы конкретные способы управления, когда в качестве регулируемых воздействий берутся смещения или скорости перемещения точек границы. Специально рассмотрен квазистационарный способ изменения состояния движения мембраны как целого. Установлено, что применение плавного режима управления приводит к отсутствию колебаний мембраны в конце процесса, поскольку деформации имеют квазистатический характер.

Исследование задач динамики, управления движениями и оптимизации колебательных систем с распределенными параметрами (струн, стержней, мембран и др.) представляет значительный интерес в теоретическом и прикладном аспектах. Колебательные системы, содержащие мембраны, являются объектами исследований в биомеханике, химической технологии, прикладной космонавтике и других областях естествознания и техники. Динамике таких систем уделяется большое внимание в фундаментальных учебных пособиях и трудах по теории колебаний, в курсах по уравнениям математической физики и по теоретической физике, см. например [1–7].

Значительно меньше изучены возникающие на практике многочисленные проблемы управления и оптимизации движений систем, содержащих мембраны [8–11]. Имеется ряд формальных математических результатов типа теорем существования, конструктивное содержание которых недостаточно для целей анализа, синтеза и проектирования систем управления. Недостаточным представляется также многообразие решенных конкретных задач. Такое состояние исследований обусловлено рядом трудностей, связанных с более сложным поведением спектра собственных частот по сравнению со свойствами спектра для одномерных систем, таких как струна, распределенная пружина, упругий вал, стержень, сосуд со стратифицированной жидкостью и т. п. Ниже предлагается применить конструктивные асимптотические методы теории управления и колебаний для эффективного построения относительно простых квазиоптимальных управляющих функций, сосредоточенных на границе прямоугольной мембраны, и дать оценки точности приближенных решений.

1. Постановка задачи. Рассмотрим поперечные движения прямоугольной в плане равномерно натянутой однородной мембраны (фигура). Смещения, ортогональные недеформированному состоянию, будем описывать функцией $z = z(t, x, y)$, где t — время,



x, y – эйлеровы координаты. Уравнение колебаний (уравнение состояния) имеет вид [1, 2]:

$$\rho \ddot{z} = \sigma \Delta z, \quad \Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2, \quad (x, y) \in D \setminus g$$

$$D = \{x, y: 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}, \quad 0 \leq t \leq T < \infty \quad (1.1)$$

Здесь точками сверху обозначены производные по аргументу t , Δ – оператор Лапласа, D – прямоугольная область, g – граница прямоугольника (негладкая). Положительные постоянные ρ и σ суть поверхностная плотность и натяжение мембраны соответственно [1, 4].

Для описания движения точек мембраны необходимо определить граничные условия. Обычно на границе g задаются условия первого рода (Дирихле), второго рода (Неймана) и третьего рода (смешанные) [2–6]. Рассмотрим далее краевые (граничные) условия типа Дирихле (в общем и развернутом виде)

$$z|_{(x,y) \in g} = z_g(t, s), \quad 0 \leq s \leq 2(a+b) \quad (1.2)$$

$$z|_{x=0,a} = L_{0,a}(t, y), \quad 0 \leq y \leq b; \quad z|_{y=0,b} = H_{0,b}(t, x), \quad 0 \leq x \leq a$$

Здесь s – координата точки границы. Достаточно гладкие по Стеклову [7] функции $L_{0,a}, H_{0,b}$ должны быть определены непрерывным или гладким образом в угловых точках $(0, 0), (a, 0), (a, b), (0, b)$, т. е. должны выполняться тождества $L_0(t, 0) \equiv H_0(t, 0), \dots, L_0(t, b) \equiv H_a(t, 0)$. С целью улучшения сходимости рядов и увеличения степени гладкости решения может потребоваться также непрерывность производных.

При известном изменении переменной z_g (или $L_{0,a}, H_{0,b}$) для краевой задачи (1.1), (1.2) обычно ставится задача Коши по переменной t [2–6]. Требуется определить функцию $z(t, x, y)$ при условии, что в начальный момент времени $t = 0$ известны достаточно гладкие распределения смещений и скоростей, согласованные с граничными условиями (1.2):

$$z(0, x, y) = z^0(x, y), \quad \dot{z}(0, x, y) = \dot{z}^0(x, y), \quad (x, y) \in D \quad (1.3)$$

$$z^0|_{(x,y) \in g} = z_g(0, s), \quad \dot{z}^0|_{(x,y) \in g} = \dot{z}_g(0, s)$$

Решение начально-краевой задачи (1.1)–(1.3) в определенном классе гладкости (слабое, сильное, классическое и т. п. [4–7]) существует, единственно и может быть построено в виде рядов Фурье методами разделения переменных, функций Грина и др. Выделение особенностей и доказательство сходимости решения $z \rightarrow z_g$ при $(x, y) \rightarrow g$, см. (1.2), требует дополнительных рассуждений. Оно может быть проведено переходом к решению двух задач: соответствующей краевой задачи для эллиптического уравнения с ненулевыми граничными условиями (1.2) (задачи Дирихле, t – параметр) и

начально-краевой задачи Коши для неоднократного гиперболического уравнения с нулевыми граничными условиями [2, 5], см. п. 5.

Однако граничные условия (1.2), т. е. функции z_g или $L_{0,a}, H_{0,b}$, неизвестны. Рассматривается задача управления движениями мембраны посредством соответствующего выбора граничных воздействий $L_{0,a}(t, y), H_{0,b}(t, x)$ исходя из целей движения z, \dot{z} и дополнительных требований (гладкости, оптимальности и др. [8–11]). Представляет прикладной интерес задача приведения распределений z, \dot{z} к некоторому конечному моменту времени $t = T < \infty$ в фиксированное требуемое состояние, например следующего общего вида:

$$\begin{aligned} z(T, x, y) &= z^T(x, y), \quad \dot{z}(T, x, y) = \dot{z}^T(x, y), \quad (x, y) \in D \\ z^T(x, y)|_g &= z_g(T, s), \quad \dot{z}^T(x, y)|_g = \dot{z}_g(T, s) \end{aligned} \quad (1.4)$$

При этом должны выполняться условия согласования управлений и конечных (финальных) распределений, см. (1.4), аналогичные (1.3). Таким образом, по времени t также ставится краевая задача.

На управляющие функции $L_{0,a}, H_{0,b}$ наложим дополнительные ограничения, имеющие форму интегральных среднеквадратических функционалов качества

$$J[L, H] = \frac{1}{2} \int_0^T dt \left[c_L^2 \int_0^b L^2(t, y) dy + c_H^2 \int_0^a H^2(t, x) dx \right] \quad (1.5)$$

$$L^2 = L_0^2 + L_a^2, \quad H^2 = H_0^2 + H_b^2, \quad c_{L,H}^2 = \text{const} > 0, \quad J < \infty$$

Здесь и далее по мере надобности для сокращения записи пары функций (L_0, L_a) и (H_0, H_b) обозначаются как арифметические векторы L и H соответственно. На управления L, H могут быть также наложены ограничения в виде неравенств по функциональным нормам для каждого значения t [8–11].

Проблеме точной управляемости на конечном интервале времени систем, описываемых гиперболическими уравнениями, т. е. счетных систем "осцилляторов", посвящен ряд исследований, см. [8–11] и др. Полученные формальные результаты приводят к обобщенным, физически нереализуемым, как правило, режимам управления и движения. Однако в прикладных задачах часто требуется построить достаточно простые приближенные режимы управления с требуемой точностью и разработать способы оценки точности процесса и последовательные алгоритмы ее увеличения, если это окажется необходимым. Следует также использовать идеологию конечномодовой аппроксимации, которая обычно оправдывается на практике вследствие отсутствия или относительно быстрого затухания высоких частот колебаний, вызванного внутренней и внешней диссипацией. Значительные трудности представляет выработка идеальных управляющих воздействий. Заметим, кстати, что из-за запаздывания вычислений и инерционности приводов модель управляемой системы может потребовать расширения и обобщения. Оставаясь в рамках кинематического способа управления, т. е. без учета обратных силовых воздействий со стороны мембраны на управление, более общая модель граничного управления может быть представлена в форме

$$W(p, s)z_g = F(t, s), \quad p = \partial / \partial t, \quad s \in g \quad (1.6)$$

Здесь W – дифференциальный по t линейный оператор с коэффициентами, возможно, зависящими от координаты s границы. В частности, рассмотрим случай полинома второго порядка: $W = k_0 + k_1 p + k_2 p^2$. Коэффициенты $k_i \geq 0$ ($i = 0, 1, 2$) и могут зависеть от точки границы, причем корни полинома должны иметь неположительные вещественные части. Рассмотренный выше случай (1.2) отвечает ситуации $k_{1,2} = 0$.

Функция $F(t, s)$ в (1.6) есть управляющее воздействие, подлежащее выбору, исходя из целей управляемого процесса. Задача переформулируется с учетом начальных и конечных условий для $z_g(t, s)$ и ее низших производных, а функционал качества J типа (1.5) вычисляется по отношению к искомому управлению $F(t, s)$: $J = J[F]$. Кроме того, методом штрафов можно ввести коррекцию управления с целью требуемого качества переходных процессов, аналогично применяемой в теории автоматического регулирования [12]. Наряду с приведенной выше, в исследованиях широко применяются также другие постановки задачи управления, основанные на использовании метода штрафов и квадратического интегрального функционала качества, см. далее п. 3, формулы (3.8).

2. Построение решения краевой задачи. Количество параметров в системе (1.1)–(1.6) может быть уменьшено введением единиц длины d и времени $\theta = d(\rho/\sigma)^{1/2}$. В результате получим уравнение (1.1), в котором $\rho = \sigma = 1$. Соотношения (1.2)–(1.6) также должны быть преобразованы с нужными переобозначениями. Заметим, что в выборе масштабов есть произвол, которым можно воспользоваться, исходя из соображений простоты и удобства. В частности, при $d = a$ или $d = b$ получим $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq b/a$ или $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq x \leq a/b$. Удобным может оказаться выбор одного из следующих значений d : $d = \max(a, b)$, $d = (a^2 + b^2)^{1/2}$, $d = 1/2(a + b)$, $d = (ab)^{1/2}$ и др.

Предположим пока, что функции $L(t, y)$, $H(t, x)$ известны и принадлежат требуемому классу гладкости по Стеклову [7]. Согласно [1–7] можно построить решение начально-краевой задачи (1.1)–(1.3) в виде двойного ряда по полной ортонормированной системе собственных функций $\{Z_{nm}\}$:

$$z(t, x, y) = \sum_{n, m \geq 1} \Theta_{nm}(t) Z_{nm}(x, y), \quad (x, y) \in D \setminus g, \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.1)$$

Функции Z_{nm} и соответствующие им числа λ_{nm}^2 определяются как решение задачи на собственные значения и функции [2–6]:

$$\Delta Z + \lambda^2 Z = 0, \quad (x, y) \in D \setminus g, \quad Z|_g = 0 \quad (2.2)$$

$$Z_{nm}(x, y) = X_n(x) Y_m(y), \quad \lambda_{nm} = (\nu_n^2 + \mu_m^2)^{1/2}$$

$$X_n(x) = (a/2)^{-1/2} \sin \nu_n x, \quad \nu_n = \pi n / a, \quad n \geq 1$$

$$Y_m(y) = (b/2)^{-1/2} \sin \mu_m y, \quad \mu_m = \pi m / b, \quad m \geq 1$$

Заметим, что в исходной краевой задаче разделяются все переменные t, x, y .

На основе базисов Z_{nm} , X_n , Y_m (2.2) для коэффициентов Фурье – обобщенных координат – Θ_{nm} получается "диагональная" система, которая интегрируется элементарно

$$\ddot{\Theta}_{nm} + \lambda_{nm}^2 \Theta_{nm} = U_{nm}(t), \quad \Theta_{nm}(0) = \Theta_{nm}^0, \quad \dot{\Theta}_{nm}(0) = \dot{\Theta}_{nm}^0$$

$$\Theta_{nm}(t) = \Theta_{nm}^0 \cos \lambda_{nm} t + \frac{\dot{\Theta}_{nm}^0}{\lambda_{nm}} \sin \lambda_{nm} t + \frac{1}{\lambda_{nm}} \int_0^t \sin \lambda_{nm} (t - \tau) U_{nm}(\tau) d\tau$$

$$U_{nm} = (\alpha_n, L_m) + (\beta_m, H_n), \quad \Theta_{nm}^0 = \langle z^0, Z_{nm} \rangle, \quad \dot{\Theta}_{nm}^0 = \langle \dot{z}^0, Z_{nm} \rangle \quad (2.3)$$

$$\alpha_n = (\alpha_n^0, \alpha_n^a), \quad \alpha_n^{0,a} = X_n'|_{0,a}, \quad \beta_m = (\beta_m^0, \beta_m^b), \quad \beta_m^{0,b} = Y_m'|_{0,b}$$

$$L_m = L_m(t) = \langle L, Y_m \rangle, \quad H_n = H_n(t) = \langle H, X_n \rangle, \quad n, m \geq 1$$

Здесь $\alpha_n, \beta_m, L_m, H_n$ – двумерные арифметические векторы; круглыми скобками в (2.3) обозначены скалярные произведения. Функции $L_m(t), H_n(t)$ – коэффициенты Фурье $L(t, y), H(t, x)$ по базисам Y_m, X_n , а угловыми скобками обозначены скалярные произведения в соответствующих гильбертовых пространствах.

Таким образом, для известных функций $L(t, y)$, $H(t, x)$ построено в виде (2.1)–(2.3) формальное решение начально-краевой задачи (1.1)–(1.3). Согласно (2.3) его можно представить в виде суммы решений двух задач. Одно решение отвечает ненулевым начальным распределениям z^0, z^0 (1.3) при условии закрепления границы $z_g(t, s) \equiv 0$ (нулевые граничные условия). Другое решение соответствует нулевым начальным условиям и заданным перемещениям $z_g(t, s)$ границы g . Сходимость ряда (2.1) при $(x, y) \rightarrow g$, т. е. второго решения, имеет неравномерный характер

$$z|_g \equiv 0, \quad z|_{(x,y) \rightarrow g-0} = L(t, y) \vee H(t, x) \quad (2.4)$$

Такое поведение решения вблизи границы обусловлено нечетностью функций $X_n(x)$ относительно $x = 0$, a и $Y_m(y)$ относительно $y = 0, b$, см. (2.2), и свойством сходимости рядов Фурье к среднему значению. Отметим, что для коэффициентов второго решения, обусловленного функциями U_{nm} , справедлива асимптотика, которая недостаточна для абсолютной и равномерной сходимости двойного ряда (2.1). Эти трудности обусловлены формой представления решения задачи (1.1)–(1.3).

Имеются способы выделения особенностей и улучшения сходимости функциональных рядов, в частности рядов Фурье. Можно также воспользоваться различными приемами сведения задачи (1.1)–(1.3) к эквивалентной с нулевыми граничными условиями [2–5]; об этом приеме упоминалось выше в п. 1. Действительно, искомое решение z задачи представим в виде $z = v + w$. Полагаем, что v есть решение задачи Дирихле $\Delta v = 0, v|_g = z_g(t, s)$, где t – параметр, а z_g как функция точки границы удовлетворяет требуемым условиям гладкости. Такое решение существует, причем $v \rightarrow z_g$ равномерно при $(x, y) \rightarrow g$; его можно выписать явно в виде ряда [4, 5]. Для второй неизвестной w получаем неоднородное гиперболическое уравнение $\dot{w} = \Delta w - \ddot{v}$ с однородными граничными условиями $w|_g = 0$ и следующими начальными распределениями: для смещений $w^0 = z^0 - v^0$, и скоростей $\dot{w}^0 = \dot{z}^0 - \dot{v}^0$. Отметим, что для переменной w может быть переформулирована задача управления и оптимизации, аналогичная поставленной (1.1)–(1.5) для z , причем в качестве управления можно взять \ddot{v} , см. п. 5.

Далее основное внимание уделим построению управляющих функций L, H на основе соотношений (2.3), конечных условий (1.4) и функционала (1.5). Будет рассмотрена также модификация задачи управления согласно (1.6).

3. Приближенное решение задачи оптимального управления. Конечные условия (1.4) и функционал (1.5) с помощью соотношений (2.1), (2.2) приведем к виду

$$\Theta_{nm}(T) = \Theta_{nm}^T = \langle z^T, Z_{nm} \rangle, \quad \dot{\Theta}_{nm}(T) = \dot{\Theta}_{nm}^T = \langle \dot{z}^T, Z_{nm}^- \rangle \quad (3.1)$$

$$J[L, H] = \frac{1}{2} \sum_m L_m^2 + \frac{1}{2} \sum_n H_n^2, \quad L_m^2 = L_{0m}^2 + L_{am}^2, \quad H_n^2 = H_{0n}^2 + H_{bn}^2$$

Здесь и далее ради сокращения записи полагаем $c_{L,H}^2 = 1$; это упрощение достигается переобозначениями коэффициентов α_m, β_m .

Для решения задачи (2.3), (3.1) воспользуемся условиями оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина. Непосредственное их применение приводит к громоздким выражениям. Поэтому предпочтительнее ввести оскулирующие переменные C_{nm}, S_{nm} , более удобные для асимптотического анализа задачи управления [13] при больших значениях $T \gg 1$, что далее и предполагается. Связь их с исходными переменными $\Theta_{nm}, \dot{\Theta}_{nm}$ и уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \Theta_{nm} &= C_{nm} \cos \lambda_{nm} t + S_{nm} \sin \lambda_{nm} t, \quad \dot{\Theta}_{nm} = \partial \Theta_{nm} / \partial t \\ C_{nm} &= -\frac{U_{nm}}{\lambda_{nm}} \sin \lambda_{nm} t, \quad C_{nm}(0) = C_{nm}^0 = \Theta_{nm}^0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\dot{S}_{nm} = \frac{U_{nm}}{\lambda_{nm}} \cos \lambda_{nm} t, \quad S_{nm}(0) = S_{nm}^0 = \frac{\dot{\Theta}_{nm}^0}{\lambda_{nm}}$$

$$C_{nm}(T) = C_{nm}^T = \Theta_{nm}^T \cos \lambda_{nm} T - (\dot{\Theta}_{nm}^T / \lambda_{nm}) \sin \lambda_{nm} T$$

$$S_{nm}(T) = S_{nm}^T = \Theta_{nm}^T \sin \lambda_{nm} T + (\dot{\Theta}_{nm}^T / \lambda_{nm}) \cos \lambda_{nm} T$$

Дополнительные преимущества заключаются в "симметричности" выражений и в постоянстве сопряженных им переменных Φ_{nm}, Ψ_{nm} . Однако уравнения (3.2) оказываются неавтономными в отличие от уравнений для оскулирующих переменных типа "амплитуда-фаза" [13].

Формально выполняя стандартные операции принципа максимума, для оптимальных управлений получим представления

$$L_m(t) = \sum_k \frac{\alpha_k}{\lambda_{km}} \theta_{km}(t), \quad \theta_{nm}(t) = -\Phi_{nm} \sin \lambda_{nm} t + \Psi_{nm} \cos \lambda_{nm} t \quad (3.3)$$

$$H_n(t) = \sum_l \frac{\beta_l}{\lambda_{nl}} \theta_{nl}(t), \quad U_{nm}(t) = \sum_k \frac{(\alpha_n, \alpha_k)}{\lambda_{km}} \theta_{km}(t) + \sum_l \frac{(\beta_m, \beta_l)}{\lambda_{nl}} \theta_{nl}(t)$$

Здесь неизвестные постоянные Φ_{nm}, Ψ_{nm} входят линейно; они подлежат определению из финальных условий для C_{nm}, S_{nm} (3.2). Для этого подставим выражения $U_{nm}(t)$ (3.3) в (3.2); интегрируем, получим выражения

$$C_{nm} = C_{nm}^0 + \frac{\alpha_n^2 + \beta_m^2}{2\lambda_{nm}} \Phi_{nm} t + \delta C_{nm}(t, \{\Phi_{kl}\}, \{\Psi_{kl}\}) \quad (3.4)$$

$$S_{nm} = S_{nm}^0 + \frac{\alpha_n^2 + \beta_m^2}{2\lambda_{nm}} \Psi_{nm} t + \delta S_{nm}(t, \{\Phi_{kl}\}, \{\Psi_{kl}\})$$

в которых выделены основные, растущие по t , "резонансные" члены. Слагаемые $\delta C_{nm}, \delta S_{nm}$ в (3.4) есть квадратуры от выражений, в которых опущены составляющие $\theta_{nm}(t)$; они имеют осциллирующий характер по t . Обоснование относительной малости этих величин требует отдельного рассмотрения вследствие наличия "малых знаменателей" типа $\lambda_{nm} - \lambda_{km}, \lambda_{nm} - \lambda_{nl}$, где $n \neq k, m \neq l$.

Применим асимптотический подход к решению, аналогичный методу разделения переменных [13]. Будем считать далее, что T — асимптотически большая величина, т. е. $T \sim \varepsilon^{-1}$, где $0 < \varepsilon \ll 1$ — малый параметр; при этом полагаем, что изменения величин C_{nm}, S_{nm} порядка единицы по отношению к малому параметру. Тогда из (3.4) следуют приближенные выражения для искомым Φ_{nm}, Ψ_{nm} и соответствующие им переменные $C_{nm}(t), S_{nm}(t)$:

$$\Phi_{nm}^{(1)} = \frac{2}{T} \frac{\lambda_{nm}^2}{\alpha_n^2 + \beta_m^2} \Delta C_{nm}, \quad \Delta C_{nm} = C_{nm}^T - C_{nm}^0 \sim 1, \quad \Phi_{nm}^{(1)} \sim \varepsilon$$

$$\Psi_{nm}^{(1)} = \frac{2}{T} \frac{\lambda_{nm}^2}{\alpha_n^2 + \beta_m^2} \Delta S_{nm}, \quad \Delta S_{nm} = S_{nm}^T - S_{nm}^0 \sim 1, \quad \Psi_{nm}^{(1)} \sim \varepsilon$$

$$C_{nm}^{(1)}(t) = C_{nm}^0 + (t/T) \Delta C_{nm} + \delta C_{nm}^{(1)}(t), \quad \delta C_{nm}^{(1)} \sim \varepsilon \quad (3.5)$$

$$S_{nm}(t) = S_{nm}^0 + (t/T) \Delta S_{nm} + \delta S_{nm}^{(1)}(t), \quad \delta S_{nm}^{(1)} \sim \varepsilon$$

Слагаемые $\delta C_{nm}^{(1)}, \delta S_{nm}^{(1)}$ в (3.5) получаются в результате подстановки $\Phi_{nm}^{(1)}, \Psi_{nm}^{(1)}$ в $\delta C_{nm}, \delta S_{nm}$ (3.4); строго говоря, в первом приближении по ε они должны быть опущены.

Подставим теперь приближенные значения $\Phi_{nm}^{(1)}, \Psi_{nm}^{(1)}$ в формулы для оптимальных управлений (3.3). Получим квазиоптимальные законы управления в следующем смысле. Под действием этих управлений при $t = T$ движения мембраны z, \dot{z} приходят в ε -окрестности требуемого состояния z^T, \dot{z}^T (1.4) или (3.2) и остаются в этой окрестности (по переменным C_{nm}, S_{nm} , а z совершает свободные колебания) при $t > T$, если положить $L = H \equiv 0$. Для функционала J (1.5) или (3.1) получим оценку $J^{(1)} = O(\varepsilon)$, причем погрешность его определения составит величину $O(\varepsilon^3)$, поскольку точка минимума является внутренней.

Отметим, что искомые постоянные Φ_{nm}, Ψ_{nm} могут быть уточнены методом последовательных приближений по ε :

$$\Phi_{nm}^{(2)} = \Phi_{nm}^{(1)} - \frac{2}{T} \frac{\lambda_{nm}^2}{\alpha_n^2 + \beta_m^2} \delta C_{nm}(T, \{\Phi_{kl}^{(1)}\}, \{\Psi_{kl}^{(1)}\}) \quad (3.6)$$

$$\Psi_{nm}^{(2)} = \Psi_{nm}^{(1)} - \frac{2}{T} \frac{\lambda_{nm}^2}{\alpha_n^2 + \beta_m^2} \delta S_{nm}(T, \{\Phi_{kl}^{(1)}\}, \{\Psi_{kl}^{(1)}\})$$

Из (3.3), (3.5) вытекает, что ряды для приближенных управляющих функций $L^{(1)}(t, y), H^{(1)}(t, x)$ абсолютно и равномерно сходятся, если коэффициенты $\Delta C_{nm}, \Delta S_{nm}$ достаточно быстро убывают при $n, m \rightarrow \infty$. Это условие будет выполнено, если начальные и конечные распределения $z^{0,T}, \dot{z}^{0,T}$ окажутся достаточно гладкими в смысле Стеклова функциями [7]. Ряды для искомым приближенных управлений имеют вид

$$L^{(1)}(t, y) = \frac{2}{T} \sum_m Y_m(y) \sum_k \frac{\alpha_k \lambda_{km}}{\alpha_k^2 + \beta_m^2} (-\Delta C_{km} \sin \lambda_{km} t + \Delta S_{km} \cos \lambda_{km} t) \quad (3.7)$$

$$H^{(1)}(t, x) = \frac{2}{T} \sum_n X_n(x) \sum_l \frac{\beta_l \lambda_{nl}}{\alpha_n^2 + \beta_l^2} (-\Delta C_{nl} \sin \lambda_{nl} t + \Delta S_{nl} \cos \lambda_{nl} t)$$

Ряды (3.7) будут заведомо сходящимися абсолютно и равномерно при $\Delta C_{nm}, \Delta S_{nm} \sim 1/(nm)^{1+\gamma}, \gamma > 0$. Для существования производных по t, x, y степень убывания коэффициентов $\Delta C_{nm}, \Delta S_{nm}$ по n, m должна возрастать. На основе достаточно гладких функций $L^{(1)}(t, y), H^{(1)}(t, x)$ может быть построено решение $z^{(1)}(t, x, y)$, равномерно сходящееся к $L^{(1)}, H^{(1)}$ при $(x, y) \rightarrow g$ (см. [2-5]). Отметим, что с помощью "уточненных" значений коэффициентов $\Phi_{nm}^{(2)}, \Psi_{nm}^{(2)}$ (3.6) аналогично (3.7) выписываются управляющие функции $L^{(2)}(t, y), H^{(2)}(t, x)$ во втором приближении по ε .

Используя вышеизложенный подход, можно приближенно построить управление, траекторию и функционал в других задачах, например следующих:

$$J_*[L, H] = \frac{\varepsilon}{2} c_z^2 \|z(T) - z^T\|^2 + \frac{\varepsilon}{2} c_{\dot{z}}^2 \|\dot{z}(T) - \dot{z}^T\|^2 + J[L, H] \quad (3.8)$$

$$J_{**}[L, H] = \frac{\varepsilon^2}{2} c_T^2 T + J[L, H]$$

Здесь предполагается, что для функционала J_* время $T \sim \varepsilon^{-1}$ фиксировано, а требуемые конечные условия удовлетворяются методом "штрафов" (с весовыми коэффициентами $\varepsilon c_z^2, \varepsilon c_{\dot{z}}^2$) в среднеквадратическом. Далее, в задаче (3.8) с функционалом J_{**} конечные условия типа (1.4) заданы при некотором неизвестном значении $T \sim \varepsilon^{-1}$, величина которого должна быть определена в процессе ее решения из условий трансверсальности принципа максимума. Эта величина регулируется выбором весового коэффициента $c_T^2 \sim 1$.

4. Управление по скорости перемещения границы. Рассмотрим задачу (1.1)–(1.4) при условии, что управлением является скорость перемещения границы Λ, Γ , т.е. $W = p$ в (1.6). Квадратический функционал типа (1.5) берется по отношению к этим управляющим функциям. Итак, имеем наряду с соотношениями (1.1)–(1.4) следующие:

$$\dot{L} = \Lambda, \quad L(0, y) = L^0(y), \quad L(T, y) = L^T(y), \quad \Lambda = (\Lambda_0, \Lambda_a) \quad (4.1)$$

$$\dot{H} = \Gamma, \quad H(0, x) = H^0(x), \quad H(T, x) = H^T(x), \quad \Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_b)$$

$$J[\Lambda, \Gamma] = \frac{1}{2} \int_0^T (\|\Lambda\|^2 + \|\Gamma\|^2) dt \rightarrow \min_{\Lambda, \Gamma}, \quad T \sim \varepsilon^{-1}$$

Переходя к коэффициентам Фурье по базисам $Z_{nm}(x, y), X_n(x), Y_m(y)$, получим для осциллирующих переменных C_{nm}, S_{nm} уравнения (3.2), а также начальные и конечные значения. Функции $U_{nm}(t)$ имеют вид (2.3), где L_m, H_n удовлетворяют уравнениям

$$\dot{L}_m = \Lambda_m, \quad \dot{H}_n = \Gamma_n, \quad J = \frac{1}{2} \sum_m \Lambda_m^2 + \frac{1}{2} \sum_n \Gamma_n^2 \rightarrow \min \quad (4.2)$$

Введем сопряженные переменные $\Phi_{nm}, \Psi_{nm}, P_m$ и Q_n . Составляя функцию Гамильтона и определяя ее максимум по Λ_m, Γ_n , получим выражения $\Lambda_m = P_m, \Gamma_n = Q_n$. Дифференцируя по C_{nm}, S_{nm} функцию Гамильтона, вновь находим, что $\Phi_{nm}, \Psi_{nm} = \text{const}$. Из уравнений для P_m, Q_n элементарным интегрированием функций $\theta_{nm}(t)$ (3.3) по t находим

$$\Lambda_m(t) = P_m(t) = P_m^0 - \sum_k \frac{\alpha_k}{\lambda_{km}^2} \chi_{km}(t)$$

$$\Gamma_n(t) = Q_n(t) = Q_n^0 - \sum_l \frac{\beta_l}{\lambda_{nl}^2} \chi_{nl}(t) \quad (4.3)$$

$$\chi_{nm}(t) = -\Phi_{nm}(1 - \cos \lambda_{nm}t) + \Psi_{nm} \sin \lambda_{nm}t$$

Отметим, что функции χ_{nm} , как и θ_{nm} , линейно зависят от искомым неизвестных параметров Φ_{nm}, Ψ_{nm} . В выражениях (4.3) для коэффициентов Фурье оптимальных управлений Λ_m, Γ_n неизвестными, также подлежащими определению, будут постоянные P_m^0, Q_n^0 .

Подставим теперь функции $\Lambda_m(t), \Gamma_n(t)$ (4.3) в уравнения (4.2) и проинтегрируем их по t , получим выражения, определяющие перемещение точек границы. Они содержат линейные функции времени и тригонометрические ряды

$$L_m(t) = L_m^0 + A_m t - \sum_k \frac{\alpha_k}{\lambda_{km}^3} \chi_{km}(t), \quad A_m = P_m^0 + \sum_k \frac{\alpha_k}{\lambda_{km}^2} \Phi_{km}$$

$$H_n(t) = H_n^0 + B_n t - \sum_l \frac{\beta_l}{\lambda_{nl}^3} \chi_{nl}(t), \quad B_n = Q_n^0 + \sum_l \frac{\beta_l}{\lambda_{nl}^2} \Phi_{nl} \quad (4.4)$$

$$\chi_{nm}(t) = \Phi_{nm} \sin \lambda_{nm}t + \Psi_{nm}(1 - \cos \lambda_{nm}t)$$

Здесь вместо P_m^0, Q_n^0 введены новые неизвестные коэффициенты A_m, B_n ; функции $\chi_{nm}(t)$, как и θ_{nm} , χ_{nm} , линейно зависят от неизвестных параметров Φ_{nm}, Ψ_{nm} . При помощи выражений (4.4) для функций $U_{nm}(t)$ получим представления

$$U_{nm}(t) = (\alpha_n, L_m^0 + A_m t) - \sum_k \frac{(\alpha_n, \alpha_k)}{\lambda_{km}^3} \chi_{km}(t) + (\beta_m, H_n^0 + B_n t) - \sum_l \frac{(\beta_m, \beta_l)}{\lambda_{nl}^3} \chi_{nl}(t) \quad (4.5)$$

Наконец, проинтегрируем уравнения для C_{nm}, S_{nm} (3.2) после подстановки $U_{nm}(t)$ (4.5). Получим весьма громоздкие выражения, содержащие также искомые параметры $A_m, B_n, \Phi_{nm}, \Psi_{nm}$. Приравнявая при $t = T$ требуемым значениям величины L_m, H_n, C_{nm}, S_{nm} , см. (4.1), (3.2), имеем для определения неизвестных параметров квазидиагональную счетную систему линейных уравнений, решение которой строится последовательно.

Вначале выделяем главные члены в уравнениях (4.4) при $t = T$ для A_m, B_n ; разрешая квазидиагональную систему, получим в первом приближении по ϵ :

$$A_m^{(1)} = \frac{\Delta L_m}{T}, \quad \Delta L_m = L_m^T - L_m^0, \quad L_m^{(1)}(t) = L_m^0 + \frac{t}{T} \Delta L_m + \delta L_m^{(1)}(t) \quad (4.6)$$

$$B_n^{(1)} = \frac{\Delta H_n}{T}, \quad \Delta H_n = H_n^T - H_n^0, \quad H_n^{(1)}(t) = H_n^0 + \frac{t}{T} \Delta H_n + \delta H_n^{(1)}(t)$$

Предполагается, что по отношению к малому параметру ϵ имеют место оценки $\Delta L_m \sim 1, \Delta H_n \sim 1$; тогда $A_m^{(1)} \sim \epsilon, B_n^{(1)} \sim \epsilon$. Подставляя $A_m = A_m^{(1)}, B_n = B_n^{(1)}$ в функции U_{nm} (4.5), из финальных уравнений для C_{nm}, S_{nm} (3.2) получим Φ_{nm}, Ψ_{nm} и C_{nm}, S_{nm} в первом приближении по ϵ :

$$\Phi_{nm}^{(1)} = \frac{2}{T} \frac{\lambda_{nm}^4}{\alpha_n^2 + \beta_m^2} \Delta C_{nm}^*, \quad \Psi_{nm}^{(1)} = \frac{2}{T} \frac{\lambda_{nm}^4}{\alpha_n^2 + \beta_m^2} \Delta S_{nm}^*$$

$$C_{nm}^{(1)}(t) = C_{nm}^0 + \frac{t}{T} \Delta C_{nm}^* - V_{nm}^s(t) + \delta C_{nm}^{(1)}(t), \quad \Delta C_{nm}^* = \Delta C_{nm} + V_{nm}^s(T) \quad (4.7)$$

$$S_{nm}^{(1)}(t) = S_{nm}^0 + \frac{t}{T} \Delta S_{nm}^* + V_{nm}^c(t) + \delta S_{nm}^{(1)}(t), \quad \Delta S_{nm}^* = \Delta S_{nm} - V_{nm}^c(T)$$

$$V_{nm}^{s,c}(t) = \frac{1}{\lambda_{nm}^0} \int_0^t [(\alpha_n, L_m^0 + A_m^{(1)}\tau) + (\beta_m, H_n^0 + B_n^{(1)}\tau)] \begin{pmatrix} \sin \\ \cos \end{pmatrix} \lambda_{nm} \tau d\tau$$

Последовательными приближениями по степеням ϵ путем учета недиагональных членов уравнений, описывающих конечные условия, постоянные $A_m, B_n, \Phi_{nm}, \Psi_{nm}$ могут быть "уточнены", например следующим образом

$$A_m^{(2)} = A_m^{(1)} + \sum_k \frac{\alpha_k}{\lambda_{km}^3} \kappa_{km}^{(1)}(T), \quad B_n^{(2)} = B_n^{(1)} + \sum_l \frac{\beta_l}{\lambda_{nl}^3} \kappa_{nl}^{(1)}(T) \quad (4.8)$$

В выражения для функций κ_{nm} подставляются первые приближения постоянных $\Phi_{nm}^{(1)}, \Psi_{nm}^{(1)}$, см. (4.4). После подстановки $A_m^{(1)}, B_n^{(1)}$ и $\Phi_{nm}^{(1)}, \Psi_{nm}^{(1)}$ в относительно малые слагаемые $O(\epsilon)$ в $U_{nm}(t)$ (4.5) аналогично (4.8) из конечных условий для C_{nm}, S_{nm} можно получить уточненные значения $\Phi_{nm}^{(2)}, \Psi_{nm}^{(2)}$ путем учета недиагональных членов.

Рассмотрим теперь приближенные выражения для коэффициентов Фурье функций управления Λ_m, Γ_n (4.3). Согласно найденным выражениям первого приближения (4.4), (4.6), (4.7) имеем

$$\Lambda_m^{(1)}(t) = \frac{\Delta L_m}{T} - \frac{2}{T} \sum_k \frac{\alpha_k \lambda_{km}^2}{\alpha_k^2 + \beta_m^2} (\Delta C_{km} \cos \lambda_{km} t + \Delta S_{km} \sin \lambda_{km} t) \quad (4.9)$$

$$\Gamma_n^{(1)}(t) = \frac{\Delta H_n}{T} - \frac{2}{T} \sum_l \frac{\beta_l \lambda_{nl}^2}{\alpha_n^2 + \beta_l^2} (\Delta C_{nl} \cos \lambda_{nl} t + \Delta S_{nl} \sin \lambda_{nl} t)$$

$$\Lambda^{(1)}(t, y) = \sum_m \Lambda_m^{(1)}(t) Y_m(y), \quad \Gamma^{(1)}(t, x) = \sum_n \Gamma_n^{(1)}(t) X_n(x)$$

Таким образом, установлено, что приближенное оптимальное управление движе-

ниями мембраны путем регулируемого изменения скорости перемещения границы состоит аддитивно из двух частей. Первое слагаемое обеспечивает требуемое перемещение границы, а второе – изменение мод колебаний мембраны, см. (4.6), (4.7). Это явление асимптотического разделения процесса перемещения и изменения мод колебаний при соответствующем согласовании порядков величин по отношению к малому параметру было отмечено ранее [13, 14]. Вопросы сходимости и выделения нерегулярностей сходны с рассмотренными выше в п. 2, 3, т.е. имеет место ситуация (2.4).

Решения задач управления для других типов функционалов и способов задания момента времени окончания процесса, см. (3.8), можно построить на основе вышеизложенного. Аналогично исследуются задачи в случае более сложного способа управления движениями границы, см. (1.6), в частности, посредством ускорения $\ddot{L} = F_L$, $\ddot{H} = F_H$, где $F_{L,H}$ – управляющие воздействия.

Итак, в п. 3, 4 приближенно в явной форме решены задачи управления движениями мембраны при произвольных начальных и конечных распределениях смещений и скоростей.

5. Квазистационарное перемещение мембраны. Для приложений представляет интерес задача приведения мембраны в требуемое положение с гашением относительных колебаний. Колебания мембраны могут быть подавлены при помощи управляющих воздействий, построенных выше в п. 3, 4. Представляется полезной постановка задачи о перемещении вдоль оси Z невозмущенной мембраны ($z^0 = \dot{z}^0 \equiv 0$) на требуемое расстояние с фиксированной или нефиксированной скоростью движения при условии отсутствия колебаний в конце процесса ($z^T = \dot{z}^T = \text{const}$).

Таким образом, рассмотрим задачу управления (1.1)–(1.4) в предположении $z^0(x, y) = \dot{z}^0(x, y) \equiv 0$, т.е. начальные смещения и скорости элементов мембраны отсутствуют. Требуется привести систему в состояние $z(T, x, y) = h$, $\dot{z}(T, x, y) = c$, где h, c – произвольные постоянные, причем одно из двух условий может быть не задано. Граничные смещения $z_g(t, s)$, где s – координата точки границы g , будем строить в виде $z_g = \xi(t)$, $\xi(0) = \dot{\xi}(0) = 0$. Считая функцию ξ гладкой, преобразуем уравнение и краевые условия посредством подстановки $z = w + \xi$; получим задачу управления

$$\ddot{w} = \Delta w - f, \quad (x, y) \in D \setminus g, \quad w|_g = 0, \quad w(0, x, y) = \dot{w}(0, x, y) \equiv 0$$

$$\ddot{\xi} = \eta, \quad \dot{\eta} = f, \quad \xi(0) = \eta(0) = 0, \quad f = \ddot{\xi}, \quad f(t) \in F \quad (5.1)$$

$$w(T, x, y) = \dot{w}(T, x, y) \equiv 0, \quad \xi(T) = h, \quad \eta(T) = c$$

В соответствии с (5.1) мембрана при $t > T$ будет совершать движение без относительных колебаний, как целое, если положить $f(t) \equiv 0$.

При известной функции $f(t)$, $0 \leq t \leq T$, выражение $w(t, x, y)$ может быть представлено в виде квадратуры

$$w(t, x, y) = - \int_0^t G(t - \tau, x, y) f(\tau) d\tau, \quad G|_g \equiv 0 \quad (5.2)$$

$$G(t, x, y) = \frac{2}{\pi^2} (ab)^{1/2} \sum_{n,m} \frac{1 - (-1)^n}{n} \frac{1 - (-1)^m}{m} X_n(x) Y_m(y) \frac{\sin \lambda_{nm} t}{\lambda_{nm}}$$

Распределение скоростей $\dot{w}(t, x, y)$ получается дифференцированием w по t , т.е. заменой G на \dot{G} в (5.2). Проинтегрируем выражения для w, \dot{w} многократно по частям; воспользуемся соотношениями [15]:

$$I_s(t, \lambda, [f]) = \int_0^t \sin \lambda(t - \tau) f(\tau) d\tau = \left[\frac{1}{\lambda} \cos \lambda(t - \tau) f(\tau) + \frac{1}{\lambda^2} \sin \lambda(t - \tau) f(\tau) - \frac{1}{\lambda^3} \cos \lambda(t - \tau) \ddot{f}(\tau) - \frac{1}{\lambda^4} \sin \lambda(t - \tau) \ddot{\ddot{f}}(\tau) \right]_0^t + \frac{1}{\lambda^4} I_s(t, \lambda, [f^{(4)}]) \quad (5.3)$$

$$I_c(t, \lambda, [f]) = \int_0^t \cos \lambda(t - \tau) f(\tau) d\tau = \left[-\frac{1}{\lambda} \sin \lambda(t - \tau) f(\tau) + \frac{1}{\lambda^2} \cos \lambda(t - \tau) \dot{f}(\tau) + \frac{1}{\lambda^3} \sin \lambda(t - \tau) \ddot{f}(\tau) - \frac{1}{\lambda^4} \cos \lambda(t - \tau) \ddot{\ddot{f}}(\tau) \right]_0^t + \frac{1}{\lambda^4} I_c(t, \lambda, [f^{(4)}])$$

Следующие неинтегральные члены представлений (5.3) получаются на основе рекуррентных формул. Их возможный порядок определяется степенью гладкости по Стеклову рассматриваемого класса функций, $f \in F$, заданных на интервале $0 \leq t \leq T$, где $T \sim \varepsilon^{-1}$ – асимптотически большой (по сравнению с максимальным периодом $2\pi/\lambda_{11}$) интервал времени, $0 < \varepsilon \ll 1$ – малый параметр. Будем считать, что функция $f = f(vt)$, где малые величины v и ε согласованы (см. далее), причем $\varepsilon \leq v \leq 1$, является медленной, но такой, что на рассматриваемом интервале времени может произойти ее существенное изменение. Возьмем класс функций $f(vt) \in F$ таких, что

$$f(vt) = \dot{f}(vt) = \ddot{f}(vt) = \dots = f^{(N)}(vt) = 0, \quad t = 0, \quad T; \quad |f^{(N+1)}| \leq Cv^{N+1} \\ \int_0^T f(vt) dt = c, \quad \int_0^T (T-t) f(vt) dt = h \quad (N=1, 2, \dots) \quad (5.4)$$

Тогда согласно (5.1) граница мембраны в момент времени $t = T$ перейдет в положение $z_g = h$ со скоростью $\dot{z}_g = c$. На основе соотношений (5.3) для выражений w , \dot{w} (5.2) при $t = T$ следуют оценки

$$|w| \leq Cv^{N+1}T, \quad |\dot{w}| \leq Cv^{N+1}T, \quad (x, y) \in D, \quad C = \text{const} \quad (5.5)$$

Таким образом, выбором достаточно гладких и плавных управляющих функций задача приведения в требуемое состояния движения мембраны с отсутствием колебаний по окончании процесса управления решена с требуемой точностью. В частности, при $v = \varepsilon$ погрешность составит величину $O(\varepsilon^N)$, см. (5.5). Отметим, что в процессе движения упругие смещения мембраны могут быть существенными (порядка $|f|_{\max}$), однако они имеют квазистационарный характер. Конструктивно класс функций $f(vt) \in F$ можно построить на основе степеней тригонометрических синусов в виде $f_k(vt) = \sin^k vt$, причем должно быть выполнено условие согласования типа $vT = \pi j$, где k – целое число, а j – полуцелое или целое. Для более простой задачи квазистационарного управления движениями струны, распределенной пружины или упругого вала аналогичный подход реализован в работе [15]; задача управления движениями упругого манипулятора посредством электромеханических приводов исследована в [13].

Задачи стабилизации упругих систем типа стержня или вала с учетом характеристик приводов изучены в [16, 17] и др. Представляют интерес постановки и решение аналогичных задач для гибридных систем, содержащих мембраны.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96-01-00221) и Международного научного фонда (J17100).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967. 476 с.
2. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 1. М.: Гостехиздат, 1951. 476 с.
3. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 930 с.
4. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.
5. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 1972. 688 с.
6. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 444 с.
7. Стеклов В.А. Основные задачи математической физики. М.: Наука, 1983. 432 с.
8. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 414 с.
9. Lions J.L. Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems // SIAM Review. 1988. V. 30. No. 1. P. 1-68.
10. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975. 568 с.
11. Акуленко Л.Д. Управление движениями мембраны посредством граничных силовых воздействий // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 5. С. 731-741.
12. Брайсон А., Хо Ю-Ши. Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972. 544 с.
13. Акуленко Л.Д. Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987. 365 с.
14. Акуленко Л.Д. Конструктивное управление движением колебательных систем с дискретными и распределенными параметрами // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 4. С. 596-607.
15. Акуленко Л.Д. Квазистационарное финитное управление движением гибридных колебательных систем // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 2. С. 183-192.
16. Лавровский Э.К., Формальский А.М. Стабилизация заданной позиции упругого стержня // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 5. С. 752-760.
17. Лавровский Э.К., Формальский А.М. Устойчивость процесса управления стержнем при наличии продольных или крутильных деформаций // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1991. № 6. С. 203-214.

Москва

Поступила в редакцию
8.П.1996